Studia Linguistica
Universitatis Iagellonicae Cracoviensis 124 (2007)

EWA WILLIM
Instytut Filologii Angielskiej

LICZBA JAKO KATEGORIA GRAMATYCZNA I POJĘCIOWA

1. Liczba jako podstawa oceny ilościowej

Liczba jest podstawą oceny ilościowej, czyli miary rzeczy i zdarzeń, którą człowiekowi narzuca struktura mózgu, bowiem to struktura mózgu rejestrująca dane empiryczne i przetwarzająca je na reprezentacje mentalne odpowiedzialna jest za fakt, że tak jak nie potrafimy postrzegać przedmiotów w rzeczywistości, nie rejestrując ich koloru i położenia w przestrzeni, nie potrafimy również postrzegać przedmiotów, nie rejestrując ich cech ilościowych (Dehaene 2001: 16).

Liczba rozumiana jako wspólna własność zbiorów mających tyle samo elementów to pojęcie abstrakcyjne: liczebność jest własnością zbioru niezależnie od tego, czym są jego elementy i jakie są ich cechy jakościowe (np. kolor, kształt czy położenie). Jak zauważył w XVII wieku angielski filozof John Locke, liczba przysługuje w równym stopniu zbiorom ludzi, aniołów, zdarzeń, myśli, jednym słowem zbiorom wszystkich wzajemnie rozróżnialnych rzeczy istniejących w świecie zewnętrznym, jak i zbiorom rzeczy, które istnieją jedynie w umyśle ludzkim (Butterworth 2005: 7).

W matematyce liczba jest jednym z pojęć podstawowych. Pierwotnie liczbę rozumiano jako twór służący do liczenia elementów zbiorów skończonych. Z czasem zaczęto używać liczb do wyrażania wyniku pomiarów wielkości ciągłych, takich jak długość, temperatura, ciężar, objętość, pole powierzchni (Waliszewski *et al*. 1997: 188)[1]. Wyrażaniu ilości dyskretnej (tj. wielości lub liczebności) służą głównie liczby naturalne. O ich prymarności w kształtowaniu pojęcia liczby najlepiej świadczy słynne stwierdzenie niemieckiego matematyka Leopolda Kroneckera, że to „Bóg stworzył liczby naturalne, wszystko inne jest dziełem człowieka" (Waliszewski *et al*. 1997: 193; Gallistel *et al*. 2005: 247).

[1] Rozróżnienie między dwoma odmianami ilości, dyskretną (nieciągłą) i niedyskretną (ciągłą), ma długą tradycję w filozofii. Przykładowo, Arystoteles definiował ilość jako właściwość rozciągłości i podzielności rzeczy (Metafizyka 1020a). Wielkość, nazywana też ilością ciągłą, jest właściwością takiego bytu podzielnego, który nie ma aktualnych, a jedynie potencjalne granice. Ilość ciągła jest według Arystotelesa podstawą takich parametrów, jak długość, szerokość itp. Wielość, zwana również ilością krotną, mnogością lub liczbą, jest właściwością bytów, których części mają aktualne granice, czyli bytów podzielnych na części nieciągłe (dyskretne).

Rozwój liczb rzeczywistych, reprezentujących ilość ciągłą, jest uważany w naukach ścisłych za wynalazek cywilizacyjny, u którego źródeł tkwi potrzeba wyrażania za pomocą liczb oceny ilościowej również w przypadku, gdy danej wielkości nie da się określić, posługując się liczbą naturalną ani też liczbą wymierną, jak jest np. w przypadku obliczenia stosunku długości okręgu do długości jego średnicy (Waliszewski *et al.* 1997: 188, 197)[2].

Właściwość oznaczania liczebności zbioru liczba (naturalna) zawdzięcza dwóm zasadom: zasadzie odpowiedniości i zasadzie następstwa. Zasada odpowiedniości odnosi się do łączenia w pary jednego elementu ze zbioru liczonych elementów z jednym elementem ze zbioru liczb. W trakcie liczenia każdemu elementowi zbioru przypisana jest kolejna wartość liczbowa, czyli kolejny numer. Innymi słowy, liczenie jest relacją przyporządkowania jednemu elementowi ze zbioru obiektów dyskretnych jednego elementu ze zbioru liczb[3]. Ponieważ poszczególnym elementom zbioru liczonych obiektów w trakcie liczenia zostają przyporządkowane kolejne liczby, zbiór liczonych obiektów i zbiór liczb użytych podczas liczenia ma tę samą liczność (Wiese 2003: 385)[4].

Aspekt następstwa odnosi się do zasady, że od dowolnej liczby naturalnej zawsze można przejść do jej następnika, czyli kolejnej większej liczby (Ifrah 1990: 38). Na mocy tej zasady, znaczenie danej liczby naturalnej wynika z jej relacji do innych liczb, związanych ze sobą w układ hierarchiczny. Stąd jeśli zbiór liczy np. cztery elementy, zawiera w sobie zbiór złożony z trzech elementów, który z kolei zawiera zbiór dwuelementowy itd. (Butterworth 2005: 3). Liczebność zbioru określa ostatnia liczba przyporządkowana ostatniemu liczone-

---

[2] Zbiór liczb rzeczywistych, tj. liczb za pomocą których wyrażane są wielkości ciągłe, obejmuje liczby naturalne (1, 2, 3, ...), całkowite (..., –2, –1, 0, 1, 2, ...), wymierne, czyli takie, które mogą być przedstawione w postaci ułamka, gdzie zarówno w mianowniku, jak i w liczniku występują liczby całkowite (np. ¾), oraz liczby niewymierne, czyli takie, których rozwinięcie w ułamek dziesiętny jest nieskończone (np. $\sqrt{2}$ czy liczba π).

[3] Liczby naturalne mają bezpośredni związek z liczeniem, ponieważ każda liczba naturalna różna od liczby 1 jest następnikiem tylko jednej innej liczby naturalnej, np. następnikiem liczby 1 jest liczba 2, następnikiem liczby 4 jest liczba 5 itd. Innymi słowy, zbiór liczb naturalnych zawiera liczbę 1 oraz następniki swoich elementów, różnych od tych elementów o liczbę 1. W odróżnieniu od liczb naturalnych, liczby rzeczywiste nie są uszeregowane na zasadzie następnika, np. większa od liczby rzeczywistej 3 jest zarówno liczba 3.000015, liczba π, $\sqrt{11}$, liczba 3,5, jak i liczba 4 itd. Innymi słowy, liczbie 3 przyporządkowany jest jeden i tylko jeden następnik jedynie jako liczbie naturalnej, wyrażającej krotność liczby podstawowej, czyli liczby 1. Jako liczba rzeczywista, 3 nie ma jednego i tylko jednego następnika (Gallistel *et al.* 2005: 248). Ogólnie przyjmuje się, że dana ilość ciągła (np. długość) jest wielkością, którą można przedstawić jako odpowiedni odcinek linii prostej. Liczby rzeczywiste mogą reprezentować wielkości ciągłe, ponieważ zbiór liczb rzeczywistych można utożsamić ze zbiorem punktów na linii prostej: każdemu odcinkowi prostej odpowiada tylko jedna liczba rzeczywista, wyrażająca długość tego odcinka, i każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowany jest tylko jeden odcinek prostej (Waliszewski *et al.* 1997: 194; Dehaene 2001).

[4] Ogólnie przyjmuje się, iż umiejętność liczenia odgrywa istotną rolę w kształtowaniu abstrakcyjnego pojęcia liczby, ponieważ ucząc się liczenia, dziecko przez indukcję dochodzi do wiedzy, że liczenie polega na policzeniu zbioru obiektów dyskretnych i że ostatnia użyta liczba określa liczebność całego zbioru. Wiedza ta umożliwia dziecku wywnioskowanie, że każda kolejna liczba w zbiorze liczb naturalnych różni się od poprzednika dokładnie o liczbę 1 (Butterworth 2005). Przy założeniu, że pojęcie liczb naturalnych nie jest wrodzone, indukcja ta ma według niektórych psychologów fundamentalne znaczenie dla wykształcenia się u dziecka abstrakcyjnego pojęcia liczb naturalnych i mentalnych reprezentacji ilości dyskretnej (Carey 2004).

mu przedmiotowi, niezależnie od którego przedmiotu zaczynamy liczyć, ponieważ pojęcie liczby łączy w sobie dwa aspekty: aspekt kardynalny i aspekt porządkowy[5].

Z faktu, że każdy wyraz w ciągu liczb całkowitych większych od 1 powstaje przez dodanie liczby 1 do danej liczby wynika, że ciąg liczb całkowitych jest nieskończony. Dla Locke'a idea nieskończoności zawarta w pojęciu liczby wywodzi się z elementarnego charakteru pojęcia liczby 1 i możliwości tworzenia większych liczb przez powtarzanie operacji dodawania liczby 1 w nieskończoność (Butterworth 2005: 7). Nieskończoność zbioru liczb, tak jak nieskończoność zbioru zdań generowanych przez gramatykę języka naturalnego, zasadza się więc na możliwości wielokrotnego zastosowania tej samej reguły, czyli rekurencji, oraz na możliwości generowania wyrażeń wyższego rzędu przez kombinację wyrażeń niższego rzędu.

Ogólnie przyjmuje się, że pojęcie liczby, bazy numeracyjnej oraz pisma cyfrowego kształtowało się i rozwijało wraz z rozwojem cywilizacji i kultury (Ifrah 1990; Waliszewski *et al.* 1997: 188; Carey 2004). Według Georgesa Ifraha, autora *Historii powszechnej liczb*, historia liczb to „historia wielkiego wynalazku, a właściwie bardzo długiego szeregu wynalazków, rozciągniętego na wiele tysiącleci, a może nawet na kilkadziesiąt tysięcy lat" (Ifrah 1990: 9).

Pismo rozwinęło się ponad 5000 lat temu w starożytnym Sumerze. Wobec faktu, że człowiek pojawił się w Europie i Azji około 70 000 lat temu, wynalazek pisma ma stosunkowo krótką historię. Historia zapisu liczb jest znacznie dłuższa i sięga epoki górnego paleolitu, tj. do okresu od 35 do 20 tysięcy lat p.n.e., skąd pochodzą pierwsze świadectwa twórczej myśli człowieka: malowidła naskalne oraz kości z pionowymi nacięciami, które zwykle interpretuje się jako prymitywne, ikoniczne zapisy liczb. Dwa przedmioty z tego okresu mają szczególne znaczenie dla ustalenia, że liczba należy do elementarnych zdolności poznawczych człowieka. Jednym jest kość promieniowa wilka, na której znajduje się 55 nacięć w dwóch rzędach. Znajdujące się w równej odległości nacięcia pogrupowane są po pięć. Ilość nacięć w każdej grupie sugeruje ikoniczną reprezentację liczby 5. Jeśli zasada pogrupowania nacięć nie jest przypadkowa, można sądzić, że człowiek już w najstarszym okresie epoki kamiennej rozumiał abstrakcyjne znaczenie liczb i grupował liczone obiekty według określonej zasady, tzw. bazy numeracyjnej (Ifrah 1990: 79). Podstawą bazy opartej na liczbie 5 są palce jednej ręki. Na bazie pięć opierają się nazwy liczb np. w języku api (Nowe Hebrydy). W języku tym liczby od 1 do 4 mają własne, niezależne nazwy. Liczba 5 to wyraz oznaczający również rękę. Liczba 10 to dosłownie „dwie ręce", liczba 15 – „trzy ręce" itd. Liczby pośrednie między 6 i 9 derywowane są za pomocą (rdzenia) wyrazu „nowy" przyłączanego do nazwy liczby od 1 do 4, np. liczba 6 to dosłownie „nowe 1", czyli 1 dodane do bazy 5. Nazwy liczb pomiędzy 11 i 19 są wyrazami złożonymi za pomocą łącznika „i". Jeden

[5] Poza funkcją kardynalną i porządkową, liczba może również pełnić funkcję nominatywną. Ta ostatnia polega na użyciu liczby jako etykietki odróżniającej elementy zbioru, takie jak np. linie autobusowe (np. *autobus nr 144*), kanały telewizyjne (np. *TVP1*), domy przy tej samej ulicy (np. *Brzozowa 5*) itp. (Wiese 2003).

człon złożenia to nazwa krotności liczby 5, a drugi to odpowiedni liczebnik ze zbioru nazw od 1 do 4 (Ifrah 1990: 47):

(1)	*tai*	*lua*	*tolu*	*vari*	*luna*		
	1	2	3	4	5 (‘ręka’)		
	otai	*olua*	*otolu*	*ovari*	*lualuna*		
	6	7	8	9	10 (‘dwa + ręka’= 2 x 5)		
	lualuna i tai		*lualuna i lua*		*tololuna*	*tololuna i tai*	*variluna*
	11 (2 x 5 + 1)		12 (2 x 5 + 2)		15 (3 x 5)	16 (3 x 5 + 1)	20 (4 x 5)

Najbardziej rozpowszechniona baza dziesiątkowa oparta jest na liczbie palców obu rąk. Na bazie decymalnej zbudowane są nazwy liczb w różnych językach indoeuropejskich, semickich, chińsko-tybetańskich itd. Majowie i Aztekowie przyjęli w czasach prekolumbijskich bazę dwudziestkową, której współcześnie używają Eskimosi na Grenlandii oraz różne grupy etniczne zamieszkujące Afrykę (Ifrah 1900: 48). Starożytni Sumerowie używali bazy dwunastkowej, której podstawą też jest ręka, z tym że system dwunastkowy prawdopodobnie opiera się na zasadzie liczenia członów czterech palców jednej ręki przy pomocy kciuka tej samej ręki. Trzy człony każdego palca jednej ręki dającego się policzyć za pomocą liczącego kciuka dają w sumie liczbę 12. Znana jest również baza 60, używana w starożytności przez Sumerów i Babilończyków (Ifrah 1990: 52–53). Pochodzenie tej bazy, stanowiącej podstawę np. pomiaru czasu (w godzinach, minutach i sekundach) oraz miary kąta (w stopniach, minutach i sekundach), nie zostało dotąd przekonująco wyjaśnione, jednak fakt, że nazwy niektórych liczb w języku używanym przez Sumerów oparte są na liczbie 5 (np. liczebnik 6 jest wyrazem złożonym z liczebnika „pięć” oraz liczebnika „jeden” (dosłownie „pięć-jeden”)), może sugerować, że baza 60 powstała z kombinacji dwóch baz: bazy dwunastkowej oraz bazy pięć. Suma członów czterech palców jednej ręki, które można policzyć za pomocą kciuka, stanowi 12. Jeśli każdy palec drugiej ręki służy do oznaczenia krotności liczby 12, policzyć na obu rękach można w ten sposób do 60, pięciokrotnie licząc liczbę 12. Dwójkowy (binarny) system liczbowy oparty na nazwach liczb 1 i 2 używany jest przez Aborygenów z plemienia Gumulgal zamieszkujących wyspy na południowym wybrzeżu Australii. W języku tej grupy etnicznej nazwy wyższych liczb są złożeniami, np. liczba 3 wyrażana jest jako złożenie nazw liczb „dwa” i „jeden” (dosłownie „2–1”). Liczba 4 to dosłownie „2–2”, 5 to dosłownie „2–2–1” itd. (Gordon 2004). Taki system liczbowy jest również potencjalnie nieskończony.

Drugi z prehistorycznych przedmiotów szczególnie interesujących w kontekście rozważań nad kształtowaniem się abstrakcyjnego pojęcia liczby to zaostrzony kawałek rogu renifera z tzw. okresu magdaleńskiego epoki paleolitu (lata 19 000–12 000 p.n.e.). Znajdują się na nim w dwóch rzędach oddzielonych podłużnym nacięciem poziomym po dwie grupy równoległych pionowych nacięć. Grupy w jednym rzędzie składają się z 3 oraz z 7 nacięć, a grupy w drugim rzędzie składają się z 9 oraz z 5 nacięć (Ifrah 1990: 80–81). Jeśli takie grupowanie nacięć nie jest umotywowane jakimiś względami praktycznymi związanymi z przydatnością rogu do wykonywania szczególnych czynności praktycznych niemających związku z rachunkami, przeciw czemu przemawia fakt, że nie znaleziono innych podobnie oznakowanych narzędzi, z układu nacięć na rogu można wnioskować, iż człowiek prehistoryczny rozumiał, że pewne liczby mają swoiste własności (np. suma liczb nieparzystych jest liczbą parzystą), oraz znał podstawowe działania arytmetyki. Róg mógł być przyrządem służącym do reprezentowania znaczenia liczb jako wyniku operacji na liczbach. Gdyby grupy nacięć umieszczonych na rogu zapisać w postaci cyfr arabskich i przyjąć, że nacięcie podłużne jest znakiem równości, układ liczb na prehistorycznym rogu renifera przedstawia wyniki m.in. następujących działań na liczbach (Ifrah 1990: 81):

(2)

3		7
	—	
9		5

$3 + 9 = 5 + 7 = 12$
$9 - 7 = 5 - 3 = 2$
$7 - 3 = 9 - 5 = 4$
$(9 + 5) - (7 + 3) = 4$

Czy prehistoryczny róg renifera był w istocie prekursorem liczydła, instrumentu służącego do zapisywania i utrwalania wyniku rachunków, czy też układ liczb nie ma związku z działaniami arytmetycznymi, na zawsze pozostanie tajemnicą, ale faktem jest, że wynalazek współcześnie używanych cyfr arabskich poprzedziła długa historia skomplikowanych wynalazków służących do zapisu wartości liczbowych, wśród których wymienić warto gliniane żetony (*calculi*) używane przez Sumerów na oznaczenie liczb 1, 10, 60, 600, 3600 i 36 000, późniejsze tabliczki gliniane z wgłębieniami o różnych kształtach i głębokości dla oznaczenia różnych liczb, które mogły również zawierać rysunki liczonych obiektów, egipskie hieroglify, ideograficzno-fonetyczny zapis cyfr azteckiego pisma obrazkowego, pismo kipu stosowane przez Inków, litery hebrajskie używane jako cyfry oraz numerację pisaną wymyśloną niezależnie przez Chińczyków i Greków (Ifrah 1990)[6]. Zapis pozycyjny wprowadzili w V wieku Hindusi, którzy po Babilończykach i jednocześnie z Majami wynaleźli cyfrę zero. Jako liczba, zero pojawiło się w matematyce późno, bo dopiero na przełomie XVI––XVII wieku. Liczby ujemne, znane co najmniej od II wieku p.n.e., zostały sformalizowane dopiero w połowie wieku XVIII (Waliszewski *et al.* 1997).

Fakt, że pojęcie liczby oraz zapis liczb ewoluowały wraz z rozwojem kultury i cywilizacji, nasuwa pytania o naturę związku między różnymi umiejętnościami poznawczymi człowieka, w szczególności o naturę związku między zdolnością do posługiwania się językiem i zdolnością do posługiwania się liczbą jako pojęciem abstrakcyjnym. Kwestia ta interesuje przedstawicieli różnych nauk zajmujących się zdolnościami poznawczymi człowieka i jest przedmiotem dyskusji na płaszczyźnie antropologii kultury, biologii ewolucyjnej, neuropsychologii, psy-

[6] Notacje używane przez Sumerów, Egipcjan i Rzymian, a także zapis alfabetyczny są addytywnymi systemami liczbowymi. W takich systemach wartość liczby jest sumą znaków użytych do jej zapisu. W systemie pozycyjnym liczbę przedstawia się jako ciąg znaków cyfrowych, których wartość zależy od ich pozycji w ciągu, np. 144.

chologii poznawczej, jak również językoznawstwa. Podczas gdy zarówno człowiek, jak i niektóre gatunki zwierząt mają umiejętność precyzyjnej oceny liczby przedmiotów w przypadku niewielkich grup przedmiotów (zwykle zawierających od jednego do czterech elementów), to jedynie człowiek posiada jednocześnie umiejętność precyzyjnej oceny liczby, kiedy liczba przedmiotów przekracza cztery. W przypadku większych liczb zwierzęta potrafią dokonać jedynie przybliżonego szacunku ilościowego (Dehaene *et al.* 1998; Gallistel, Gelman 2000; Dehaene 2001; Feigenson *et al.* 2004; Gallistel, Gelman 2005; Gallistel *et al.* 2005)[7]. Brak umiejętności precyzyjnych ocen ilościowych w przypadku liczb większych niż 4 u zwierząt zwykle wiąże się z faktem, że w odróżnieniu od człowieka zwierzęta nie posługują się językiem: aby określić liczbę obiektów w przypadku liczb większych od 4, elementy zbioru muszą być po kolei policzone, do czego potrzeba użyć nazw liczb naturalnych zgodnie z zasadą następnika.

Wśród poglądów na naturę związku między zdolnością poznawczą, jaką jest język, i umiejętnościami arytmetycznymi wyróżnić można hipotezę, zgodnie z którą język i liczba są z sobą ściśle związane, ponieważ zarówno język, jak

---

[7] O tym, że niektóre gatunki zwierząt mają umiejętność dokonania oceny ilościowej, świadczą wyniki eksperymentów, np. na szczurach, gołębiach oraz małpach. Przykładowo, eksperyment, w którym szczury naciskały przycisk urządzenia otwierającego wejście do klatki z pożywieniem wykazał, że zwierzęta te rozróżniają liczby w zakresie od 4 do 24. Co ważne, ich reakcje (tj. liczba naciśnięć) były niezależne od czasu wykonywanego zadania: głodne zwierzęta wykonywały zadanie w krótszym czasie, dokonując przy tym tej samej liczby naciśnięć. Eksperymenty na gołębiach wykazały, że te zwierzęta potrafią odróżnić liczbę 40 od liczby 50 w 90% przypadków, a liczby 45 i 50 w 60% przypadków. Badania nad małpami pokazały, że zwierzęta te rozumieją zasadę następnika: nauczone wskazywania na grupy przedmiotów (lub cyfry arabskie) zgodnie z kolejnością liczb w zakresie od 1 do 4, spontanicznie zastosowały tę samą zasadę w przypadku grup przedmiotów o liczebności od 5 do 9 (Dehaene *et al.* 1998; Feigenson *et al*. 2004; Gallistel *et al*. 2005). Niemniej pojęcie liczby u zwierząt nie jest pojęciem precyzyjnym. Jeśli na przykład szczur ma nacisnąć przycisk 40 razy, aby dostać się do pomieszczenia z pożywieniem, zwykle wykonuje kilka dodatkowych ruchów. Liczba dodatkowych naciśnięć przycisku wzrasta wprost proporcjonalnie do testowanej liczby (Carey 2004). Nieprecyzyjność oceny ilościowej u zwierząt tłumaczy się dwoma zasadami, nazywanymi prawem Webera, zgodnie z którym rozróżnienie dwóch wielkości jest funkcją stosunku między nimi. Im większe są porównywane liczby i im mniejsza jest różnica między nimi, tym większe jest prawdopodobieństwo błędu. Prawo Webera tłumaczy, dlaczego np. ocena, która liczba jest większa, jest obciążona większym prawdopodobieństwem błędu w przypadku liczb 2 i 3 (oraz 65 i 62) niż w przypadku liczb 2 i 5 (oraz 65 i 47) (Gallistel, Gelman 2005). Wyniki uzyskiwane w badaniach nad zwierzętami pokrywają się z wynikami badań nad niewerbalnymi zdolnościami arytmetycznymi u ludzi (w tym dzieci w wieku poprzedzającym rozwój języka) i mieszczą się w granicach błędu określonych prawem Webera. Istotne jest przy tym, że granica błędu u ludzi jest określona prawem Webera zarówno w przypadku liczb większych od 4, jak i liczb w zakresie od 1 do 4, co sugeruje, że mentalne reprezentacje oceny ilościowej dokonywanej bez udziału kodu werbalnego są reprezentacjami ilości ciągłej. Dlatego przyjmuje się, że zarówno mózg człowieka, jak i niektórych gatunków zwierząt wyposażony jest w ten sam psychologiczny mechanizm reprezentacji ilości ciągłej. Model mentalnych reprezentacji ilości ciągłej, tzw. zbiornika (*accumulator*), przedstawiony jest m.in. w pracy Gallistela i Gelman (2000). Dehaene (2001) modeluje mentalne reprezentacje ilości ciągłej, wyrażanej przez liczby rzeczywiste, jako zbiór odcinków linii prostej. W obu modelach trudniej odróżnić wartości zbliżone do siebie, ponieważ mentalne symbole poszczególnych wartości nie wyrażają precyzyjnych wielkości, a objętości zbiornika lub długości prostej odpowiadające danym wielkościom są trudniejsze do rozróżnienia w przypadku wielkości zbliżonych do siebie: trudniej odróżnić miary objętości lub odcinki reprezentujące np. liczby 1 i 2 niż liczby 1 i 5.

i liczba są systemami generującymi nieskończenie wiele wyrażeń z elementów dyskretnych, odpowiednio wyrazów i liczb, przy użyciu reguł rekurencyjnych o podobnych własnościach strukturalnych (Chomsky 1988). Dla Hausera *et al.* (2002) język wykształcił się w konsekwencji rozwoju w ludzkim mózgu wyspecjalizowanego mentalnego modułu, charakteryzującego się właściwością dyskretnej nieskończoności, koniecznego do dokonywania ocen ilościowych. Z kolei dla Wiese (2003) to abstrakcyjne pojęcie liczby nie wykształciłoby się bez rozwoju języka i symbolicznych reprezentacji wyrażeń językowych. Dla innej grupy badaczy (Dehaene 2001; Gallistel, Gelman 2005; Gallistel *et al.* 2005) podstawą abstrakcyjnego pojęcia liczby nie są algorytmy generowane zgodnie z regułami generującymi wyrażenia językowe, ale wrodzona umiejętność przetwarzania przez mózg danych empirycznych na mentalne reprezentacje ilości, cechujące się określonym stopniem nieostrości, tj. reprezentacje wielkości wyrażane przez liczby rzeczywiste[8].

Celem niniejszego artykułu jest rozważenie, jaką rolę język pełni w kształtowaniu pojęcia liczb naturalnych w kontekście rezultatów niedawnych badań nad pojęciem liczby i umiejętnościami arytmetycznymi głównie u ludzi posługujących się językami pozbawionymi nazw liczb naturalnych, pacjentów z afazją, dzieci ze strukturalnym zaburzeniem zdolności matematycznych, tzw. dyskalkulią, oraz osób autystycznych o pewnych niezwykłych umiejętnościach matematycznych. W następnej części artykułu omówione są niektóre aspekty językowej reprezentacji kategorii liczby, interesujące w kontekście rozważanego problemu[9]. W trzeciej części artykułu omówione są implikacje wyników różnych badań dotyczących zależności między językową i pojęciową kategorią liczby dla hipotez wysuwanych w tej kwestii.

---

[8] Jednocześnie niektórzy badacze uznający posiadanie przez człowieka niewerbalnych umiejętności reprezentowania szacunków ilościowych w kategoriach nieostrych, np. Wiese (2003), Carey (2004) i Gallistel *et al.* (2005), przypisują językowi istotną rolę w wykształceniu się u ludzi, obdarzonych wspólnie z niektórymi gatunkami zwierząt umiejętnością dokonywania przybliżonych, niedyskretnych ocen ilościowych, umiejętności oceny ilościowej, u której podstaw tkwią mentalne reprezentacje ilości dyskretnej, tj. liczebności, wyrażające znaczenia liczb naturalnych. Innymi słowy, według tych badaczy umiejętność precyzyjnej oceny ilościowej zależy od tego, czy reprezentacje oceny ilościowej w mózgu danego osobnika wyrażają precyzyjne wartości liczbowe symbolizujące znaczenie liczby 1 i jej krotności uszeregowane zgodnie z zasadą następnika, czy też mózg danego osobnika generuje jedynie nieprecyzyjne reprezentacje wielkości, wyrażane przez liczby rzeczywiste, które nie wyznaczają następnika.

[9] Dla Carey (2004) wykształcenie się mentalnych reprezentacji precyzyjnych ocen ilościowych w przypadku liczb większych od 4 u ludzi możliwe jest dzięki integracji informacji o liczebności zbioru kodowanej przez językowe wykładniki kwantyfikacji numerycznej, zarówno leksykalne (nazwy liczb), jak i gramatyczne (wykładniki liczby pojedynczej i mnogiej), oraz informacji ilościowej kodowanej w mentalnych reprezentacjach nieprecyzyjnych wartości liczbowych. Innymi słowy, bez języka liczby takie jak 1, 2, 3, ... są liczbami rzeczywistymi, a nie liczbami naturalnymi. Język, wnoszący do systemu pojęciowego dziecka informację o precyzyjnych wartościach liczbowych, oraz liczenie, polegające na uszeregowaniu liczb zgodnie z zasadą następnika, odpowiedzialne są za rozwój u dziecka pojęcia liczb naturalnych, którym odpowiadają mentalne reprezentacje ilości dyskretnej (liczebności). Ich wykształcenie się jest możliwe dzięki temu, że reprezentacje wyrażeń językowych zawierają symbole dyskretne (tj. wyrazy) i ich kombinacje.

2. Liczba jako kategoria językowa

W języku kodowaniu liczebności rozumianej jako kwantyfikacja numeryczna zbioru służy kategoria liczby (Polański *et al.* 1999: 337). Jej wykładnikami są zarówno jednostki leksykalne (np. liczebniki), jak i środki gramatyczne (np. prefiksy lub sufiksy przyłączane do rzeczownika i/lub czasownika). Podstawowa opozycja, na której oparte są wszystkie systemy gramatycznej kategorii liczby w znanych językach naturalnych, to opozycja między liczbą pojedynczą, kodującą odniesienie do jednostkowego, i liczbą mnogą kodującą odniesienie do niejednostkowego desygnatu rzeczownika lub zaimka[10]. O ile jednak wszystkie znane języki mają leksykalne wykładniki oceny ilościowej, o tyle w wielu językach liczba nie jest kategorią gramatyczną (morfoskładniową), tzn. informacja o tym, czy wyraz odnosi się do jednostki czy zbioru niejednostkowego, nie jest w takich językach kodowana przez wzajemnie wykluczające się formy wyrazu (Cruse 1994, Corbett 2000).

W opozycji jednostkowość : niejednostkowość, niejednostkowość może podlegać dalszym rozróżnieniom. Na podstawie danych pochodzących z ponad 250 języków z różnych rodzin językowych Corbett (2000) wykazał, że w ramach odniesienia do wielości status odrębnej wartości kategorii liczby może mieć odniesienie do zbioru złożonego z dwóch elementów (*dualis*), z trzech elementów (*trialis*), do przybliżonej małej liczby kodowanej również liczebnikami typu *parę* lub *kilka*, jak również do przybliżonej wielkiej liczby elementów, zwykle używanej w przypadku, gdy liczba wykracza ponad standard. Ilość tę można również wyrazić, używając określeń takich, jak *zbyt dużo*, *w nadmiarze*, *mnóstwo* itp.

Na tle różnych semantycznie umotywowanych kategorii gramatycznych, czyli takich, które wyróżniane są na podstawie kryteriów logicznych, pojęciowych lub funkcjonalnych i które wyrażają opozycje określonych treści, liczba gramatyczna jawi się jako kategoria wewnętrznie spójna i nieskomplikowana. W przeciwieństwie do takich kategorii gramatycznych, jak tryb, strona czy aspekt, o których można powiedzieć, że wyrażają treści subiektywne, wymagające dla ich przekazania kontekstu językowego, opozycje sygnalizowane przez wykładniki liczby w języku mogą się manifestować w sposób obiektywny w rzeczywistości pozajęzykowej. Innymi słowy, jeśli podstawą wiedzy o przekazywanych treściach jest w przypadku strony czy aspektu samo wyrażenie językowe czy szerszy kontekst językowy, informacja o liczebności zbioru może wynikać z bezpośredniej, perceptualnej obserwacji rzeczywistości pozajęzykowej przynajmniej w przypadkach, gdy rzeczownik denotuje przedmioty fizyczne lub zdarzenia o inherentnie ograniczonym zakresie temporalnym. Według Slobina (1996) ten fakt tłumaczy, dlaczego w niektórych językach ocena ilościowa nie ma wykładników formalnych lub ich użycie nie jest obligatoryjne i rzeczownik użyty w wyrażeniu zdaniowym może się odnosić zarówno do jednostki, jak i do pluralności, co ilustruje następujący przykład z języka japońskiego:

[10] Kwantyfikacja numeryczna zdarzeń nie będzie omówiona w niniejszym artykule. Niektóre kwestie dotyczące opozycji między odniesieniem do zdarzeń jednostkowych i niejednostkowych (pluralnych) przedstawione są w pracy Corbetta (2000, rozdział 8).

(3) *Kooen ni wa inu ga iru rasii.*
‘Wydaje się, że w parku jest pies. / Wydaje się, że w parku są psy.’

Jak pokazują polskie odpowiedniki przykładowego zdania, rzeczownik *inu* ‘pies’ nie jest w nim określony w stosunku do liczby desygnatów (Corbett 2000: 14).

Określenie natury związku między pojęciową kategorią liczby a jej językowym odpowiednikiem komplikuje fakt, że wykładniki językowej kategorii liczby nie zawsze wyrażają treści ściśle związane z kwantyfikacją numeryczną. Przykładowo, nawet w językach gramatykalizujących kategorię liczby odniesienie do wielości może jednocześnie kodować różnicę między pluralnością rozumianą dystrybutywnie a pluralnością rozumianą całościowo (*collectivum*). W takim języku liczba mnoga ma dwa różne wykładniki, używane w zależności od tego, czy elementy zbioru wieloelementowego zgrupowane są według jakiejś określonej zasady organizacji lub uporządkowania, czy też nie. W języku sierra populuca na przykład wyraz *dom* oznacza wielość domów w połączeniu z dystrybytywnym sufiksem liczby mnogiej, natomiast w połączeniu z sufiksem kodującym ujęcie wielości jako całości oznacza wioskę lub osadę (Cruse 1994: 2858). Należy zauważyć, że odniesienie do całości w przypadku pluralności jest aspektem znaczenia naddanym w stosunku do samego konceptu wielości (Bogusławski 1973).

Ponadto, o ile liczba pojęciowa jest wspólną własnością wszystkich zbiorów o tej samej liczbie elementów, o tyle w językach z gramatyczną kategorią liczby poszczególne wartości kategorii liczby mogą nie być własnością każdego zbioru obiektów o danej liczebności. W języku słoweńskim na przykład, w którym wyodrębniona jest kategoria liczby podwójnej, jej zasięg ograniczony został do zbiorów dwuelementowych, których elementy zwykle nie występują w parach. Tak więc informacja, iż rzeczowniki takie jak *noga* lub *ręka* odnoszą się do dwóch nóg lub rąk, nie może być lub zwykle nie jest kodowana wykładnikiem liczby podwójnej i kodowana jest wykładnikami liczby mnogiej, w odróżnieniu od np. klasycznej greki (Cruse 1994: 2858). W języku pamé rzeczowniki żywotne mają trzy formy liczby: pojedynczą, podwójną oraz mnogą, natomiast rzeczowniki nieżywotne mają tylko dwie formy liczby. Jedna forma używana jest w odniesieniu do jednostki lub do dwóch obiektów, a druga do zbioru zawierającego więcej niż dwa elementy. Innymi słowy, w przypadku rzeczowników nieżywotnych jedna forma koduje jednocześnie odniesienie do jednostki (liczba pojedyncza), jak i odniesienie do wielości ograniczonej do liczby „dwa” (liczba podwójna), a druga odnosi się do liczby „więcej niż dwa”. Sytuacja, gdzie nie wszystkie leksykalne klasy rzeczowników i rodzaje zaimków mają wszystkie formy liczby gramatykalizowane w danym języku, jest dość powszechna w perspektywie ogólnojęzykowej (Corbett 2000: 89–132). Faktu tego nie da się łatwo pogodzić z tezą Carey (2004), według której wykształcenie pojęcia liczby naturalnej rozumianej jako wspólna, abstrakcyjna własność zbiorów złożonych z tej samej liczby elementów opiera się na semantycznej funkcji wykładników liczby pojedynczej i mnogiej w językach z gramatyczną kategorią liczby, polegającej na kodowaniu podstawowej opozycji między jednostką (liczba pojedyncza) a zbiorem wieloelementowym (liczba mnoga).

Konsekwencją gramatykalizacji kategorii liczby w języku jest fakt, że rzeczowniki są używane w wyrażeniach zdaniowych takiego języka w jednej z form liczby niezależnie od tego, czy rzeczownik denotuje zbiór skończony czy nie. Stąd nie tylko tzw. rzeczowniki policzalne, lecz także tzw. rzeczowniki niepoliczalne mają formy liczby. W przypadku rzeczowników niepoliczalnych można przyjąć, że liczba nie wyraża kwantyfikacji numerycznej. Określenie, kiedy liczba koduje kwantyfikację numeryczną, a kiedy jej nie koduje, nie zawsze jest do przewidzenia na podstawie ontologicznej kategorii referenta. Przykładowo, angielskie odpowiedniki polskich rzeczowników policzalnych takich jak *owoc*, *błyskawica*, *tost*, *piżama*, *lornetka*, *informacja* oraz *porada* są niepoliczalne. Ponadto, w niektórych językach z gramatyczną kategorią liczby, gdzie użycie wykładników liczby nie jest obligatoryjne w przypadku rzeczowników policzalnych, jak np. w j. perskim, funkcja morfemów liczby przyłączonych do rzeczowników niepoliczalnych porównywalna jest do funkcji kwantyfikatorów partytywnych. Morfemy liczby pojedynczej informują, że ilość jest niewielka. Znaczenie to wyrazić można za pomocą kwantyfikatorów typu *trochę*, *niewiele*, *mało* itp. Morfemy liczby mnogiej kodują informację o dużej ilości, którą wyrażają kwantyfikatory typu *dużo*, *mnóstwo* (Corbett 2000). Również w polszczyźnie wykładniki liczby mnogiej rzeczowników niepoliczalnych (np. *piaski*, *bóle*, *wody*) nie mają funkcji kwantyfikacji numerycznej i nie wyrażają liczebności zbioru elementów dyskretnych.

O braku bezpośredniego związku między pojęciową i gramatyczną kategorią liczby można również mówić w odniesieniu do rzeczowników typu *sanie*, *drzwi*, *nożyczki*, *spodnie*, *okulary* itp., leksykalnie nacechowanych jako pozbawione liczby pojedynczej, oraz w odniesieniu do rzeczowników zbiorowych typu *amunicja*, *biżuteria*, *garderoba* itp., leksykalnie nacechowanych jako pozbawione liczby mnogiej w swoim podstawowym znaczeniu. W obu przypadkach rzeczownik zawiera w swojej strukturze semantycznej zasadę indywiduacji, tzn. wyodrębniania przedmiotów dyskretnych, ale przeciwnie do rzeczowników policzalnych może być użyty w przysługującej mu formie liczby zarówno w odniesieniu do jednostki, jak i do wielości, z tym, że wielość nie ma w tym przypadku określonych granic, w przeciwieństwie do policzalnych rzeczowników leksykalnie kodujących zbiorowość, typu *rodzina*, *drużyna*, *chór* itp.:

(4) a. *Otworzył (wszystkie) drzwi.*
b. *Naostrzył (wszystkie) nożyczki.*

(5) a. *Z magazynu wynieśli całą amunicję – słownie jedną rakietę.*
b. *Z magazynu wynieśli całą amunicję – 30 granatów i 4 miny.*

Poza kodowaniem treści związanych z kwantyfikacją numeryczną lub kwantyfikacją partytywną, kategoria liczby wykorzystywana jest do przekazywania treści niezwiązanych z oceną ilościową. Nienumeryczne funkcje liczby uwidaczniają się w różnych językach głównie w kategoriach honoryfikatywności i *intensivum* (Corbett 2000, rozdział 7). Polski przykład na nienumeryczne użycie kategorii liczby podany poniżej ilustruje użycie zaimka w liczbie mnogiej w odniesieniu do pojedynczego referenta:

(6) *Co wy tu robicie, obywatelu?*

Podsumowując, jakkolwiek gramatyczna kategoria liczby służy kodowaniu podstawowego kontrastu w obrębie ilości dyskretnej (krotnej), tj. opozycji jednostkowość: zbiór niejednostkowy, związki między pojęciową i gramatyczną kategorią liczby nie są całkiem ścisłe. Liczba gramatyczna na tle danych z różnych języków ukazuje się jako kategoria o pewnym stopniu komplikacji zarówno od strony formalnej (morfoskładniowej), jak i semantycznej. Tym samym trudno upatrywać w niej podstaw pojęciowej kategorii ilości dyskretnej (liczebności). Jeśli istnieje związek między tymi dwiema kategoriami, wynikać on może z innych niż gramatyczne wykładników pojęcia liczby, w szczególności ze słownictwa wyrażającego znaczenie liczb oraz strukturalnych właściwości reguł gramatyki, w tym przede wszystkim rekurencji.

Jakkolwiek leksykalne wykładniki kwantyfikacji numerycznej, przede wszystkim liczebniki główne, są wykładnikami precyzyjnych (dyskretnych) wartości liczbowych w wielu językach, w tym w polszczyźnie, to istnieją również takie języki, w których nazwy liczb nie są liczebnikami *sensu stricto*[11]. Ponadto zakres nazw liczb może być znacznie ograniczony. Przykładowo, w języku Indian pirahã (Brazylia) występują tylko trzy określenia liczebności zbioru: *hói*, *hoí* oraz *báagiso*[12]. Według Everetta (2005: 623), ich odpowiedniki to w kolejności *mała ilość lub wielkość*, *nieco większa ilość lub wielkość*, oraz *dużo / wiele*. Pierwsze określenie może być użyte np. w odniesieniu do jednej lub dwóch małych ryb (ale nie np. do jednej dużej ryby), drugie do paru ryb (np. dwóch lub trzech ryb), a trzecie do większej liczby ryb (Gordon 2004; Everett 2005). Innymi słowy, w odróżnieniu od liczebników *jeden*, *dwa*, *trzy* itd. w polszczyźnie, *hói* oraz *hoí* są wykładnikami nieostrych wartości liczbowych, a nawet mogą się odnosić do tej samej liczby referentów. Język pirahã również nie ma gramatycznej kategorii liczby i nie odróżnia zaimków według liczby. O języku tym można powiedzieć, że nie posiada językowej kategorii liczby. Istnienie takiego języka nasuwa pytanie, czy Indianie posługujący się językiem pirahã posiadają abstrakcyjne pojęcie liczby. Kwestia ta zostanie rozważona w następnym podrozdziale w kontekście ogólnych poglądów na naturę zależności między systemem językowym i pojęciowym sformułowanych w odniesieniu do kategorii liczby.

3. Związki między pojęciową kategorią liczby a językiem

Rozważania nad istotą relacji między światem językowym człowieka i jego światem pojęciowym mają długą tradycję. Mówiąc ogólnie, do współczesności przeważał pogląd, że kategorie pojęciowe są prymarne w stosunku do kategorii

[11] Precyzyjna (dyskretna) wartość liczbowa to wartość absolutna raczej niż przybliżona. Na przykład liczba 4 oznacza „dokładnie 4”, a nie „mniej więcej 4”, „około 4” itp.

[12] Język pirahã nie jest pod tym względem wyjątkiem. Wśród innych języków, których leksykon liczbowy ograniczony jest do liczb 1, 2 oraz 3, a niekiedy również liczb 4 i 5, są języki plemion zamieszkujących Nową Gwineę oraz różne języki australijskich Aborygenów (Butterworth 2005).

językowych: dopiero po tym, jak w umyśle powstanie pojęcie czy myśl, możliwe jest wyrażenie jej w języku. Taki pogląd przypisuje się m.in. Platonowi oraz Kartezjuszowi. We współczesności następuje odwrót od tak rozumianej relacji między światem pojęć i językiem. Dla Wittgensteina na przykład, to granice języka, którym mówi człowiek, określają granice jego świata mentalnego. Według Wilhelma Humboldta, język jest narzędziem wytwarzającym i transformującym myśli oraz pojęcia człowieka. Innymi słowy, dla Humboldta pojęcia nie istnieją niezależnie od języka, w którym są wyrażane. Teza owa implikuje, że mówiący, którzy posługują się różnymi językami, posiadają odmienny obraz świata zewnętrznego, zawierający się w strukturze ich języka rodzimego. Podobny pogląd wyrażał też Benjamin Whorf, twierdząc, iż

> rzeczywistość jawi się nam jako kalejdoskopowy strumień wrażeń, strukturę natomiast nadają jej nasze umysły – to jest przede wszystkim tkwiące w naszych umysłach systemy językowe ... system językowy nie jest reproduktywnym narzędziem wyrażania idei, lecz czynnikiem owe idee kształtującym... (Polański *et al.* 1999: 635).

Według dosłownej interpretacji tezy Whorfa, myśli nie da się oddzielić od słów, w których są one wyrażane. Według jej złagodzonej wersji, język ma wpływ na sposób postrzegania świata zewnętrznego i umożliwia kształtowanie pojęć niedostępnych dla umysłu bez jego udziału. Teza, jakoby reprezentacje myśli były tożsame z reprezentacjami językowymi, jest niemożliwa do obrony, ponieważ niektóre procesy umysłowe przebiegają niezależnie od języka (Pinker 1994). Gdyby jednak się okazało, że ludzie posługujący się językiem pozbawionym wykładników precyzyjnych wartości liczbowych mają ograniczone pojęcie liczby oraz ograniczone umiejętności arytmetyczne, za słuszną można by uznać „słabszą" wersję tezy o związku języka ze światem pojęciowym, zgodnie z którą język odgrywa kluczową rolę w rozwoju (pewnych) zdolności poznawczych człowieka. Postulat zgodny ze „słabszą" wersją hipotezy Whorfa sformułował Gordon (2004) w odniesieniu do wspomnianego wcześniej języka pirahã.

Według Gordona, Indianie z plemienia Pirahã nie posiadają abstrakcyjnego pojęcia liczby. Liczba jest dla nich nieprecyzyjnym poczuciem „wielości materialnej", opartym na bezpośredniej percepcji i umiejętności zapamiętania „obrazów" różnych obiektów w danej sytuacji[13]. Ogólnie przyjmuje się, że nasze możliwości szybkiej rejestracji precyzyjnej liczby obiektów ograniczają się do małych grup, zawierających nie więcej niż 4 elementy. Dla Gordona poczucie małych liczb u Indian z plemienia Pirahã opiera się właśnie na owej umiejętności indywiduacji postrzeganych obiektów ograniczonej co do liczby przez ograniczenia pamięci krótkotrwałej.

[13] We współczesnych badaniach nad zdolnościami percepcyjnymi człowieka popularny jest pogląd, że ludzki mózg posiada psychologiczny (mentalny) mechanizm sprzężony z układem postrzegania bodźców zewnętrznych. Dzięki temu mechanizmowi, znanemu jako *object indexing system* lub też jako *object file system*, elementy świata zewnętrznego rejestrowane są przez mózg jako obiekty dyskretne, kiedy danemu fragmentowi rzeczywistości przypisany zostaje abstrakcyjny indeks, który można porównać do wskaźnika wyróżniającego jakiś przedmiot na tle obserwowanej sytuacji. Indeks przypisany zostaje do obiektu prymarnie na podstawie informacji o jego położeniu (Leslie *et al.* 1998; Carey 2004; Butterworth 2005). Model indywiduacji i identyfikacji obiektów, polegający na przypisaniu im mentalnych indeksów, jest alternatywą dla tradycyjnych poglądów, w których zindywidualizowane obiekty to kompleksy bodźców lub cech percepcyjnych.

Z obserwacji codziennego życia wspomnianych Indian wynika, że nie prowadzą oni rachunków i nie liczą przedmiotów czy istot. Badania umiejętności arytmetycznych, jakim Gordon poddał grupę Indian Pirahã, obejmowały sprawdzenie rozumienia zasady odpowiedniości, umiejętności porównania wielkości zbiorów oraz rozumienia znaczenia operacji dodawania i odejmowania w zakresie liczb od 1 do 4 oraz od 4 do 10. W przypadku ocen ilościowych w zadaniach niejęzykowych wyniki okazały się porównywalne z wynikami, jakie osiągają dorośli posługujący się językiem angielskim w zadaniach sprawdzających rozumienie wartości poszczególnych liczb w takich sytuacjach, gdy oceny ilościowe nie odbywają się w kodzie werbalnym[14]. Podobne wyniki odnotowano również w przypadku niektórych zwierząt oraz dzieci w wieku poprzedzającym rozwój mowy (Dehaene *et al.* 1998; Dehaene 2001; Feigenson *et al.* 2004; Butterworth 2005; Gallistel *et al.* 2005). Skoro umiejętności arytmetyczne tychże Indian porównywalne są z umiejętnościami arytmetycznymi niektórych zwierząt oraz małych dzieci, świadczy to, że mózg niektórych zwierząt oraz mózg ludzki wytwarzają niewerbalne (nieprecyzyjne) reprezentacje ilości ciągłej. W reprezentacjach takich różnica między np. zbiorem złożonym z czterech elementów i np. zbiorem dwuelementowym może się nie zasadzać na różnicy liczebności zbiorów, lecz np. na różnicy ich wielkości, na różnicach między elementami zbiorów itp. Z faktu, że badani Indianie nie posługują się nazwami dyskretnych wartości liczbowych oraz nie potrafią wykonać działań na precyzyjnych wartościach liczbowych i np. podają jako wynik dodawania liczb 3 i 4 liczby 6, 7 lub 8, Gordon wysnuł tezę o przyczynowej roli języka w rozwoju abstrakcyjnego pojęcia liczb naturalnych i zdolności arytmetycznych. Rola ta mogłaby polegać na istnieniu w mózgu osób posługujących się językiem zawierającym nazwy precyzyjnych wartości liczbowych odrębnego typu mentalnych reprezentacji ilości dyskretnej, których format miałby te same własności, co reprezentacje wyrażeń językowych (Feigenson *et al.* 2004).

Do czynników tłumaczących analogie między reprezentacjami ilości dyskretnej oraz reprezentacjami językowymi należy obecność symboli elementarnych (dyskretnych) i rekurencyjny charakter kombinatorycznych reguł gramatyki języka naturalnego z jednej strony, a także reguł rządzących operacjami na liczbach z drugiej strony. Rekurencyjność gramatyki tłumaczy właściwość dyskretnej nieskończoności języka, czyli możliwość generowania zdań złożonych z potencjalnie nieskończonej liczby wyrazów, tj. elementów dyskretnych, za pomocą skończonej liczby reguł rekurencyjnych. Dla Chomsky'ego (1988) jest to cecha wyróżniająca język naturalny. Cecha dyskretnej nieskończoności charakteryzuje również arytmetykę: operacja dodania liczby może być powtórzona dowolnie wiele razy, a tym samym nie ma górnej granicy na liczbę wyrażeń w ciągu liczb. Wspomniana analogia ilustrowana jest w odniesieniu do ciągu wyrazów i ciągu liczb odpowiednio w (7) i (8):

[14] Udział kodu werbalnego, dzięki którym mentalne reprezentacje oceny ilościowej mogłyby mieć charakter dyskretny, tj. mogłyby być wyrażane liczbami naturalnymi a nie rzeczywistymi, wykluczała konieczność wypowiadania przez badanych w trakcie wykonywania zadania wyrażenia zdaniowego (np. *Mary had a little lamb*) lub wyrazu (np. *the*). Nie jest prawdopodobne, żebyśmy potrafili jednocześnie liczyć przedmioty, przypisując im mentalnie nazwy liczb, i jednocześnie artykułować inne wyrazy (Gallistel *et al.* 2005).

(7) *Jacek poprosił o pomoc Basię, Marysię, Bożenę...*
(8) 2 + 4 + 7 ....

Inną istotną cechą wskazującą na podobieństwo między gramatyką języka naturalnego i „gramatyką" liczb jest również zależność kombinacji wyrazów oraz liczb od elementów, z których się składają, a także od reguł kombinacji. Przykładowo, znaczenie wyrażenia językowego, które utworzone jest z rzeczowników *Jan* oraz *Maria* i czasownika *uderzyć*, zależy od relacji strukturalnej między tymi elementami, a mianowicie, od tego, czy w dopełnieniu czasownika jest rzeczownik *Jan* a *Maria* jest podmiotem, czy też odwrotnie, dopełnieniem jest *Maria* a *Jan* jest podmiotem. Podobnie jest w arytmetyce, gdzie wynik odejmowania liczb np. 12 i 14 zależy od tego, czy liczba 12 jest odejmowana od liczby 14, czy też na odwrót, liczba 14 jest odejmowana od liczby 12:

(9) *Jan uderzył Marię.* ≠ *Maria uderzyła Jana.*
(10) $12 - 14 \neq 14 - 12$

„Obliczenie" znaczenia wyrażenia wymagającego wykonania działań arytmetycznych zależy od ich rodzaju i relacji między nimi, podobnie jak „obliczenie" znaczenia wyrażenia wygenerowanego przez gramatykę wymaga określenia zależności strukturalnych między jego składnikami:

(11) *Człowiek, który ukradł kurę, był głodny.* ≠ *Człowiek, który był głodny, ukradł kurę.*
(12) $(3 + 17) \times 3 \neq 3 + (17 \times 3)$

Założenie, iż mentalne reprezentacje ilości dyskretnej (liczebności) oraz mentalne reprezentacje wyrażeń językowych mają ten sam format, implikuje, że język ma istotny wpływ na jakość procesów mentalnych towarzyszących rozumowaniu w kategoriach ilościowych. Jednak badanie testujące umiejętności oceny ilościowej w zakresie liczb od 1 do 80, przeprowadzone na grupie Indian z plemienia Mundurukú (Brazylia), których leksykon liczb ogranicza się do nazw liczb od 1 do 5, przy czym jedynie nazwy liczb 1 i 2 używane są dla wyrażenia precyzyjnej liczby referentów, i którzy podobnie jak Indianie z plemienia Pirahã nie wykonują obliczeń w swoim życiu codziennym, nie wykazało żadnych istotnych różnic w stosunku do kompetencji arytmetycznych Indian posługujących się językiem pirahã, pomimo że wśród badanych znajdowała się grupa dzieci posługująca się jako drugim językiem portugalskim (Pica *et al.* 2004)[15].

[15] Badanie to wykazało, że nawet dzieci posługujące się w pewnym zakresie językiem portugalskim jako swym drugim językiem wykonywały zadania arytmetyczne, opierając się na nieprecyzyjnych reprezentacjach ilości ciągłej obciążonych prawdopodobieństwem błędu określonym prawem Webera nawet w przypadku operacji dotyczących ilości dyskretnych, w odróżnieniu od grupy kontrolnej złożonej z osób francuskojęzycznych, które wykonywały takie zadania, nie popełniając błędów inherentnie związanych z ocenami w kategoriach ilości ciągłej. Różnica ta niekoniecznie dowodzi istnienia różnic w mentalnych reprezentacjach ilości u osób posługujących się językami wyposażonymi w rozwinięte leksykony liczbowe i może wynikać z faktu, że osoby nieznające i niestosujące praktyki liczenia przedmiotów w życiu codziennym, nie używają reprezentacji ilości dyskretnej w ocenach ilościowych, jakkolwiek ich mózg ma umiejętność konstrukcji takich reprezentacji.

Gdyby język odgrywał istotną rolę w kształtowaniu precyzyjnego pojęcia liczby, należałoby oczekiwać, że umiejętności numeryczne dzieci z plemienia Mundurukú, posługujących się w pewnym zakresie drugim językiem mającym szeroki zakres precyzyjnych nazw wartości liczbowych, a przy tym pobierających naukę w szkole, będzie się znacząco różnić na korzyść w stosunku do członków plemienia posługujących się wyłącznie językiem Mundurukú w zadaniach sprawdzających umiejętność precyzyjnych ocen ilości. Brak istotnych różnic podważa ścisłą korelację między językową a pojęciową kategorią liczby i podaje w wątpliwość tezę Gordona (2004), że systemy pojęciowe osób posługujących się językami zawierającymi nazwy liczb naturalnych powyżej liczby 4 oraz osób, których języki takich nazw nie zawierają, są nieporównywalne w odniesieniu do kategorii liczby.

Twierdzenie o istnieniu ścisłej zależności między abstrakcyjnym pojęciem liczb naturalnych i językiem oraz o istnieniu analogii między gramatyką języka i „gramatyką" liczb sugeruje, że pojęciowa i językowa kategoria liczby reprezentowana jest w tych samych strukturach mózgu. Badania z zakresu neuropsychologii wykazują pewne asymetrie w strukturach mózgu aktywnych podczas procesów wymagających przetwarzania mentalnych reprezentacji wyrażeń językowych i strukturach mózgu aktywnych podczas wykonywania działań na liczbach (Dehaene *et al.* 1998). Z licznych badań dotyczących afazji wiadomo, że uszkodzeniom struktury mózgu aktywnej przy przetwarzaniu danych językowych nie musi towarzyszyć ograniczenie umiejętności arytmetycznych. Zdolności arytmetyczne, u których podstaw tkwi rozumienie znaczenia liczb, mogą nie ulec żadnym upośledzeniom nawet przy prawie całkowitej utracie kompetencji gramatycznych (Varley *et al.* 2005)[16]. Strukturalne ograniczenie umiejętności arytmetycznych u dzieci wywołane specyficznymi uszkodzeniami struktur mózgu, z których część uważana jest za ośrodki mowy, niekoniecznie ma negatywny wpływ na rozwój kompetencji językowych u dzieci z dyskalkulią (Butterworth 2005)[17]. O braku zależności między językiem i umiejętnościami

---

[16] Dorośli pacjenci z afazją badani przez Varley *et al.* (2005) nie rozróżniali strukturalnych zależności między składnikami zdania i ich wpływu na znaczenie zdań, nie rozumieli zdań złożonych podrzędnie i nie potrafili utworzyć nowych zdań, manipulując określoną liczbą wyrazów. Jednocześnie pacjenci ci bezbłędnie rozwiązywali arytmetyczne zadania wymagające umiejętności o podobnych cechach strukturalnych. Innymi słowy, jakkolwiek nie mieli oni praktycznie żadnych kompetencji gramatycznych, ich kompetencje arytmetyczne nie odbiegały od normy.

[17] Obserwacja ta odnosi się również do dzieci ze specyficznym zaburzeniem rozwoju językowego (SLI). Przeprowadzona została przez Donlana *et al.* (2007). Poza brakami w znajomości języka, dzieci z SLI mogą mieć problemy z liczeniem (np. w zakresie liczb od 1 do 41 lub od 25 do 32) oraz dodawaniem i odejmowaniem liczb odczytywanych na głos w zadaniu. Przykładowo, około 40% dzieci z SLI nie potrafi liczyć w zakresie liczb od 1 do 20, podczas gdy tylko 4% (młodszych od nich) dzieci o podobnym stopniu rozwoju języka ma podobne problemy. Badanie rozumienia znaczenia liczb w zadaniach wymagających określenia, która z przedstawionych wizualnie liczb jest większa (np. 45 czy 55, 1892 czy 1792 itd.), dało nieco gorsze rezultaty w grupie dzieci z SLI w porównaniu z dziećmi bez deficytu językowego. W porównaniu z dziećmi z SLI, wyniki grupy (młodszych) dzieci o porównywalnym stopniu rozwoju języka były znacząco gorsze. Jednocześnie wyniki testów sprawdzających rozumienie reguł rządzących działaniami na liczbach były porównywalne w przypadku dzieci z SLI oraz w grupie kontrolnej dzieci w tym samym wieku. Młodsze dzieci o porównywalnym z dziećmi z SLI stopniu rozwoju języka nie potrafiły wykonać np. zadań sprawdzających rozumienie przemienności i łączności dodawania oraz strukturalnej różnicy między odjemną i odjemnikiem. Jest oczywiste, że rozumienie działań arytmetycznych

arytmetycznymi świadczą również wybitne zdolności matematyczne, np. umiejętność podania liczb pierwszych wśród liczb pięciocyfrowych na podstawie obserwacji ciągu cyfr arabskich reprezentujących liczby pierwsze w zakresie od 1 do 19 u dziecka autystycznego całkowicie pozbawionego języka (Anderson *et al.* 1999). Fakty te sugerują, że kompetencje arytmetyczne i kompetencje językowe są w sensie neuroanatomicznym niezależne w strukturze mózgu oraz że te dwa rodzaje kompetencji są od siebie niezależne również w sensie funkcjonalnym. Także fakt, że dzieci w wieku poprzedzającym rozwój mowy odróżniają precyzyjne wartości liczbowe i manipulują nimi (wykonując operacje dodawania i odejmowania) niezależnie od modalności, czyli medium, w jakim odbierane są sygnały ze świata zewnętrznego, sugeruje obecność mentalnych reprezentacji ilości dyskretnej w ludzkim mózgu, które są niezależne od językowych wykładników liczby.

4. Podsumowanie

Wyniki przedstawionych badań nad pojęciem liczby i umiejętnościami arytmetycznymi u niektórych gatunków zwierząt, dzieci w wieku poprzedzającym rozwój mowy, osób posługujących się językami pozbawionymi nazw precyzyjnych wartości liczbowych, a także osób z deficytami językowymi, którym niekoniecznie towarzyszą zaburzenia kompetencji arytmetycznych (i odwrotnie), przeczą istnieniu ścisłego, przyczynowo-skutkowego związku między pojęciową kategorią liczby i językiem. W odniesieniu do liczby podają one w wątpliwość hipotezę Whorfa, zgodnie z którą język znacząco kształtuje system pojęciowy człowieka. W świetle licznych współcześnie prowadzonych badań z zakresu psychologii poznawczej i neuropsychologii wydaje się, że człowiek posiada intuicyjne pojęcie liczby, u podstawy którego stoją mentalne reprezentacje ilości dyskretnej (liczebności). Wniosek ten zgodny jest z tezą Johna Locke'a, według którego abstrakcyjne pojęcie liczby nie zależy od tego, czy język dysponuje nazwą dla tej liczby (Butterworth 2005: 7).

Wyniki przedstawionych powyżej badań podają również w wątpliwość hipotezę upatrującą istnienie ścisłych zależności między różnymi zdolnościami poznawczymi człowieka na podstawie wykazywania przez nie tych samych cech strukturalnych (Anderson *et al.* 1999, Varley *et al.* 2005). Jak zauważają Laurence i Margolis (2005), dyskretna nieskończoność liczby naturalnej nie może się opierać na dyskretnej nieskończoności języka, jako że o ile wyrażenia ciągu liczb naturalnych są symbolami dyskretnymi o precyzyjnym znaczeniu, o tyle dyskretne elementy języka, tj. wyrazy, mogą równie dobrze kodować zbiory obiektów dyskretnych, jak i obiekty niedyskretne (ciągłe) typu *woda*, *piasek*, *błoto* itp. Podobnie nazwy liczb w języku, same będące dyskretnymi elementami (np. liczba π), mogą wyrażać wartości niedyskretne. Uwaga ta odnosi się również do wykładników gramatycznej kategorii liczby (np. wykładnik liczby mnogiej rzeczowników typu *piaski, bóle* itp. nie koduje kwantyfikacji numerycznej,

---

zależne jest od rozumienia znaczenia liczb. Z badań Dolana *et al.* 2007 wynika jasno, że wiedza arytmetyczna (rozumienie liczb i działań na nich) jest możliwa nawet w przypadku znacznego deficytu językowego.

ale partytywną, czyli nieostrą, którą wyrazić może również kwantyfikator typu *mnóstwo*). Z kolei wykładniki liczby mnogiej rzeczowników typu *mydliny*, *nudności* itp. w ogóle nie wyrażają kwantyfikacji. Wydaje się więc, że właściwość dyskretnej nieskończoności oraz zależność reguł rekurencyjnych od strukturalnych własności symboli i ich kombinacji może być cechą różnych, niezależnych od siebie systemów kognitywnych. Jeśli wniosek ten jest prawdziwy, podważa twierdzenie Chomsky'ego (1988) oraz Hausera *et al.* (2002), że gdy różne systemy pojęciowe (liczba i język) mają te same formalne właściwości, świadczy to, iż mają ten sam format reprezentacyjny. Formalnych cech reprezentacji mentalnych nie można utożsamić z właściwościami ich interpretacji.

Związek między systemem językowym i pojęciowym człowieka nie wydaje się tak ścisły, jak postuluje się powszechnie zarówno w funkcjonalnych, jak i formalnych ujęciach stosowanych w naukach zajmujących się zdolnościami poznawczymi człowieka, a w szczególności językiem. Rola języka wydaje się polegać na wyposażeniu dziecka w nazwy dyskretnych wartości liczbowych narzuconych mu przez strukturę mózgu wyposażonego w pewne wrodzone zdolności poznawcze i znajdujące się u ich podłoża mentalne reprezentacje. Tak wyposażone dziecko może w trakcie kontaktów z językowymi wyrażeniami denotującymi dyskretne wartości liczbowe i operacjami wykonywanymi na nich zdobyć formalną wiedzę matematyczną, przy czym nabycie formalnej wiedzy matematycznej porównać można raczej do nauki drugiego języka niż do przyswojenia języka pierwszego, ponieważ nabycie wiedzy o liczbach i działaniach arytmetycznych odbywa się w sposób świadomy i jest procesem długotrwałym.

Bibliografia

Anderson M., O'Connor N., Hermelin B. (1999): *A specific calculating ability*, „Intelligence" 26, s. 383–403.

Bogusławski A. (1973): *Nazwy pospolite przedmiotów konkretnych i niektóre właściwości ich form liczbowych i połączeń z liczebnikami w języku polskim* [w:] Z. Topolińska, M. Grochowski red. *Liczba, ilość, miara*, Wrocław, s. 7–32.

Butterworth B. (2005): *The development of arithmetical abilities*, „Journal of Child Psychology" 46, s. 3–18.

Carey S. (2004): *Bootstrapping and the origin of concepts*, „Daedalus" 133, s. 59–68.

Chomsky N. (1988): *Language and Problems of Knowledge. The Managua Lectures*, Cambridge, MA.

Corbett G. (2000): *Number*, Cambridge, UK.

Cruse D. (1994): *Number and number systems* [w:] R. Asher, J. Simpson red. *Encyclopedia of Language and Linguistics*, Oxford, s. 2857–2861.

Dehaene S., Dehaene-Lambertz G., Cohen L. (1998): *Abstract representations of numbers in the animal and human brain*, „Trends in Neurosciences" 21, s. 355–361.

Dehaene S. (2001): *Précis of „The number sense"*, „Mind and Language" 16, s. 16–36.

Donlan C., Cowan R., Newton E., Lloyd D. (2007): *The role of language in mathematical development: evidence from children with specific language impairments*, „Cognition" 103, s. 23–33.

Everett D. (2005): *Cultural constraints on grammar and cognition in Pirahã*, „Current Anthropology" 46, s. 621–646.

Feigenson L., Dehaene S., Spelke E. (2004): *Core systems of number*, „Trends in Cognitive Sciences" 8, s. 307–314.

Gallistel C.R., Gelman R. (2000): *Non-verbal numerical cognition: from reals to integers*, „Trends in Cognitive Sciences" 4, s. 59–65.
Gallistel C.R., Gelman R. (2005): *Mathematical cognition* [w:] K. Holyoak, R. Morrison, red. *The Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning*, Cambridge, UK, s. 559–588.
Gallistel C.R., Gelman R., Cordes S. (2005): *The cultural and evolutionary history of real numbers* [w:] S. Levinson, P. Jaisson red. *Culture and Evolution*, Cambridge, MA, s. 247–274.
Gordon P. (2004): *Numerical cognition without words: Evidence from Amazonia*, „Science" 306, s. 469–499.
Ifrah G. (1990): *Dzieje liczby, czyli historia wielkiego wynalazku*, Wrocław.
Laurence S., Margolis E. (2005): *Number and natural Language* [w:] P. Carruthers, S. Laurence, S. Stich red. *The Innate Mind: Structure and Contents*, Oxford, s. 216–235.
Leslie A., Xu F., Tremoulet P., Scholl B. (1998): *Indexing and the object concept: developing 'what' and 'where' systems*, „Trends in Cognitive Sciences" 2, s. 10–18.
Pica P., Lemer C., Izard V., Dehaene S. (2004): *Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group*, „Science" 306, s. 499–503.
Pinker S. (1994): *The language instinct*, London.
Polański K. red. (1999): *Encyklopedia językoznawstwa ogólnego*, Wrocław.
Slobin D. (1996): *From 'thought and language' to 'thinking for speaking'* [w:] J. Gumperz, S. Levinson red. *Rethinking Linguistic Relativity*, Cambridge, UK, s. 70–96.
Varley R., Klessinger N., Romanowski C., Siegal M. (2005): *Agrammatic but numerate*, „Proceedings of the National Academy of Sciences, USA" 102, s. 3519–3524.
Waliszewski W. *et al.* red. (1997): *Encyklopedia szkolna. Matematyka*, Warszawa.
Wiese H. (2003): *Iconic and non-iconic stages in number development: the role of language*, „Trends in Cognitive Sciences" 7, s. 385–390.

Summary

On the Category of Number in Language and Cognition

Number is the foundation of quantitative evaluation and an important parameter underpinning mental representations of the external reality formed in both the human and the non-human animal brain. It is generally accepted in cognitive sciences that at least some cognitive functions are mediated through language. Like the language faculty, the number faculty is characterized by the properties of recursion and generativity, which raises questions about the nature of the relationship between numerical cognition and language. Simply put, the main question is whether language is the key to number and whether mathematical reasoning can develop without the lexical and syntactic resources of language. This article overviews the results of various studies investigating the nature of the relationship between language and number. Taken together, the studies on the numerical capacities of speakers of indigenous languages lacking names of discrete quantities, pre-linguistic children, speakers with brain damage to the left perisylvian language area, as well as certain non-human animals demonstrate that language and numerical cognition are functionally independent of each other. This finding suggests that the links between language and thought are not as tight and direct as is often argued in linguistics, cognitive and developmental psychology as well as in the philosophy of language.