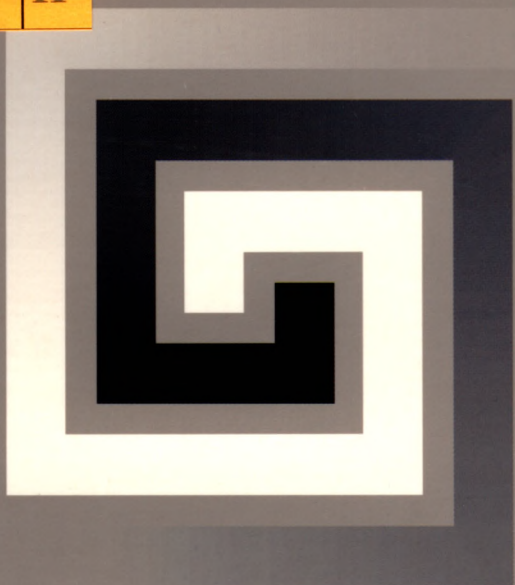
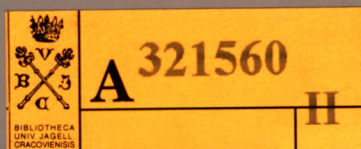


Katarzyna Kijania-Placek

**prawda  
i  
konsensus**



**DIALOGIKON**

**Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego**



# PRAWDA I KONSENSUS

LOGICZNE PODSTAWY  
KONSENSUALNEGO KRYTERIUM PRAWDY



**Uniwersytet Jagielloński**  
**Dialogikon Vol. IX** ✓

*Redaktor serii Dialogikon:* Ewa Żarnańska-Biały

*Rada Naukowa Serii Dialogikon:*

Jan Szrednicki (Uniwersytet w Melbourne) przewodniczący

Wojciech Gasparski (IFiS PAN)

Witold Marciszewski (Uniwersytet Warszawski)

Roberto Poli (Uniwersytet w Trento)

Czesław Porębski (Akademia Ekonomiczna w Krakowie)

Władysław Stróżewski (Uniwersytet Jagielloński)

Wojciech Suchoń (Uniwersytet Jagielloński)

Jan Woleński (Uniwersytet Jagielloński)

Adres Redakcji serii *Dialogikon*:

ul. Grodzka 52, 31-044 Kraków, tel/fax (0-12) 422 49 16

e-mail: [uzzarnec@cyf-kr.edu.pl](mailto:uzzarnec@cyf-kr.edu.pl)



Katarzyna Kijania-Placek

# PRAWDA I KONSENSUS

LOGICZNE PODSTAWY  
KONSENSUALNEGO KRYTERIUM PRAWDY

PRZEDMOWA

Jacek J. Jadacki



WYDAWNICTWO UNIwersYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

DIALOGIKON Vol. IX

Katarzyna Kijania-Placek

*Prawda i konsensus. Logiczne podstawy konsensualnego kryterium prawdy*

Przedmowa – Jacek J. Jadacki

Słowa kluczowe: prawda, konsensus, kryterium prawdy, zgoda większości, uznawanie zdań, kwantyfikatory uogólnione, logika częściowa, spełnianie superwaluacyjne

Książka zawiera spis użytych symboli i definicji, indeks nazwisk oraz bibliografię

Recenzenci: Jacek J. Jadacki, Jerzy Perzanowski

Redaktor naukowy: Jan Woleński

Redaktor wydawnictwa: Lucyna Sadko

Projekt okładki: Wojciech Grabski

Książka finansowana przez Wydział Filozoficzny Uniwersytetu Jagiellońskiego

© Copyright by Uniwersytet Jagielloński  
Wydanie I, Kraków 2000

ISBN 83-233-1320-2  
ISSN 1505-4594

Dystrybucja: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego  
ul. Grodzka 26, 31-044 Kraków, Poland  
tel. (012) 636 80 00 w. 2022, 2023, 0604 41 45 68, fax (012) 430 19 95  
e-mail: [wydaw@if.uj.edu.pl](mailto:wydaw@if.uj.edu.pl) <http://www.uj.edu.pl>  
Konto: BPH SA IV/O Kraków. nr 10601389-320000478769

# SPIS TREŚCI

<i>Przedmowa – Jacek J. Jadacki</i> .....	7
WSTĘP .....	11
CZĘŚĆ I	
1. RYS HISTORYCZNY .....	17
1.1. Zgoda powszechna w starożytności .....	17
1.2. <i>Consensus Gentium</i> .....	18
1.3. Rola zgody powszechnej w pragmatyzmie Charlesa S. Peirce'a .....	20
1.4. Zgoda powszechna jako kryterium prawdy u Edwarda Poznańskiego i Aleksandra Wundheilera .....	20
1.5. Konsensualna teoria prawdy Jürgena Habermasa .....	23
1.6. Metody osiągania konsensusu według Keitha Lehrera i Carla Wagnera .....	24
1.7. Zgoda powszechna a zgoda większości .....	27
2. UZNAWANIE ZDAŃ .....	29
2.1. Język $L^*(M)$ .....	29
2.2. Funkcja $T$ tłumacząca zdania o uznawaniu z języka naturalnego na język formalny .....	31
2.3. Uznawanie a odrzucanie .....	32
3. KWANTYFIKATORY UOGÓLNIONE – PODSTAWOWE POJĘCIA I TWIERDZENIA .....	35
3.1. Kwantyfikatory uogólnione w analizie języka naturalnego .....	37
3.2. <i>Większość</i> typu $\langle 1 \rangle$ , a <i>większość</i> typu $\langle 1, 1 \rangle$ .....	43
3.3. Charakterystyka kwantyfikatora większości .....	47
3.4. Logiczność kwantyfikatorów, a w szczególności kwantyfikatora większości ..	49
CZĘŚĆ II	
4. MODELE SKOŃCZONE DLA $M$ .....	53
4.1. Model standardowy dla $L^*(M)$ .....	53
4.2. Model częściowy dla $L^*(M)$ .....	57
4.2.1. Wynikanie w modelach częściowych .....	65
4.3. Superwaluacyjne ujęcie logiki predykatów .....	67
4.3.1. Superwaluacje .....	68
4.3.2. Spełnianie superwaluacyjne .....	70
4.4. Definicja kryterium prawdy przez zgodę większości w modelu częściowym dla $L^*(M)$ ze spełnianiem superwaluacyjnym .....	80

5. MODELE SKOŃCZONE DLA $M^2$ .....	81
5.1. Język $L^*(M^2)$ .....	82
5.2. Modele częściowe dla $L^*(M^2)$ .....	83
5.2.1. Modele semiczęściowe dla $L^*(M^2)$ .....	90
5.3. Definicja kryterium prawdy przez zgodę większości w modelu semiczęściowym dla $L^*(M^2)$ ze spełnianiem superwaluacyjnym .....	91
5.4. Logiczne funkcje <i>quorum</i> .....	92
5.5. Alternatywa dla modeli częściowych .....	93
5.6. Ograniczenia teorii modeli skończonych .....	96
6. MODELE O DOWOLNYM UNIWERSUM .....	99
6.1. Interpretacja większości w modelu o dowolnym uniwersum .....	99
6.2. Model semiczęściowy o dowolnym uniwersum .....	101
6.2.1. Język $L^{**}(M^2)$ .....	101
6.2.2. Model semiczęściowy o dowolnym uniwersum dla $L^{**}(M^2)$ .....	102
6.3. Definicja kryterium prawdy przez zgodę większości w modelu semiczęściowym dla $L^{**}(M^2)$ ze spełnianiem superwaluacyjnym .....	103
7. TEORIA TW .....	107
7.1. $L_{\omega_1\omega}$ .....	107
7.2. Modele semiczęściowe dla $L_{\omega_1\omega}^{**}$ .....	113
7.3. Definicja kryterium prawdy przez zgodę większości w modelu semiczęściowym dla $L_{\omega_1\omega}^{**}$ ze spełnianiem superwaluacyjnym, przy założeniu NIEP .....	117
7.4. Teoria TW .....	122
7.4.1. Ujęcie syntaktyczne $L_{\omega_1\omega}$ .....	122
7.4.2. Teoria TW .....	123
7.5. Teoria TW dla modeli skończonych .....	125
CZĘŚĆ III	
8. WNIOSKI .....	129
8.1. Kryterium prawdy przez zgodę większości a konsensualne kryterium prawdy .....	129
8.2. Konsensualne kryterium prawdy a korespondencyjna teoria prawdy. Ograniczenia stosowalności konsensualnego kryterium prawdy .....	130
8.3. Biwalencja .....	132
8.4. Niemonotoniczność kryterium prawdy przez zgodę większości .....	135
8.5. Podsumowanie .....	137
SPIS SYMBOLI .....	139
SPIS DEFINICJI .....	140
BIBLIOGRAFIA .....	143
INDEKS NAZWISK .....	149
SUMMARY .....	151

# PRZEDMOWA

## 1.

Głównym przedmiotem rozprawy, którą Czytelnicy mają przed sobą, jest formalna rekonstrukcja pojęcia *zgody powszechnej*. Rekonstrukcja ta umiejętnie wykorzystuje odpowiednio przystosowane koncepcje kwantyfikatorów uogólnionych i superwaluacji – przedstawione w należyty sposób w niezbędnych fragmentach. Pozwala to p. Kijani-Placek na dokonanie nienagannej formalnie eksplikacji kilku głównych wariantów rekonstruowanego pojęcia. Eksplikacja ta jest wzbogacona poglądowo przejrzystymi diagramami, a śledzenie formuł i ciągów dowodowych ułatwia starannie zestawiony spis symboli i definicji. Przy okazji p. Kijania-Placek konstruuje aksjomatyczną teorię (pseudo)większości i wykazuje m.in., że teoria ta jest pełna.

Wedle mojej wiedzy – a w latach osiemdziesiątych wiele czasu poświęciłem studiom nad problemem natury i kryteriów prawdy oraz nad zagadnieniem uznawania – stanowi to rezultat oryginalny i w pełni satysfakcjonujący pod względem metodologicznym. Co więcej, rozprawę p. Kijani-Placek uważam za jedną z najlepszych prac dotyczących tej problematyki.

Nie znam jednak tekstu, który nie mógłby być ulepszony, już choćby z tego powodu, że nie da się napisać czegoś, co byłoby najlepsze pod wszystkimi względami, bo niektóre z nich stoją ze sobą w konflikcie: ulepszając tekst pod jednym względem, pogarszamy go pod innym. Dotyczy to także *Prawdy i konsensusu*. Dlatego polecając gorąco Czytelnikom lekturę tej książki, chciałbym zwrócić Ich uwagę na dwie kwestie, które dały mi wiele do myślenia w trakcie, gdy sam ją – z wielkim dla siebie pożytkiem – studiowałem. Liczę na to, że pobudzi to Czytelników do krytycznego przemyślenia tych kwestii i – w konsekwencji – podniesie walor książki, która je tak sugestywnie przedstawia.

Pierwsza kwestia związana jest z relacją *zgody i prawdy*, druga – z *intuicyjnym tłem* przeprowadzonej analizy logicznej.

## 2.

Otóż *zgoda większości* (a w szczególności: *zgoda powszechna*) jest w rozprawie p. Kijani-Placek traktowana jako *kryterium prawdy*.

Osobiście jestem przyzwyczajony do używania pojęcia *kryterium* w ten sposób, że kryterium tego, że *p*, jest w każdym razie pewnym warunkiem wystarczającym tego, że *p*. Jest wtedy oczywiste, że może być wiele takich kryteriów dla danego »tego, że *p*«. W wypowiedziach, zdających sprawę z intuicji, które chce uchwycić p. Kijania-Placek w swej pracy, rozumienie funktora „gdy” jest chwiejne: nie zawsze z kontekstu można się domyśleć, czy chodzi o potoczny odpowiednik implikacji, czy też – ekwiwalencji. Na ogół chyba jednak chodzi p. Kijani-Placek o ekwiwalencję. W takim wypadku mielibyśmy do czynienia z wypowiedziami o formie definicji normalnej (*scil.* równoważnościowej); ale też byłyby to definicje jawnie nieadekwatne. Pani Kijania-Placek przecież w wielu miejscach dystansuje się od

uznania kryterium konsensualnego za kryterium uniwersalne; wolno to rozumieć jako zastrzeżenie, że nie jest to warunek zarazem wystarczający i konieczny. Skądinąd p. Kijania-Placek – mówiąc w pewnym uproszczeniu – samą zgodę interpretuje jako uznanie, przy czym przedmiotem uznania czyni zdanie. Wydaje się zaś, że powiedzenie „ $x$  uznaje zdanie  $\alpha$  (zdanie w sensie logicznym)” jest w takich kontekstach skrótem powiedzenia „ $x$  uznaje zdanie  $\alpha$  jako (*resp.* za) prawdziwe”. Przesądzałoby to, że nawet przy wzięciu funktora „gdy” za funktor ekwiwalencji, odpowiednie równoważności byłyby co najwyżej definicjami „prawdy” z błędnym kołem; to nie jest jeszcze, rzecz jasna, konsekwencja obciążająca takie rozwiązanie, bo można by powiedzieć, że chodzi przecież o definicję *kryterialną*. Wymagałoby to jednak rozważenia dodatkowych kombinacji, związanych np. z powiedzeniami typu „ $x$  odrzuca zdanie  $\alpha$  jako fałszywe”, których w pracy się bliżej nie rozważa.

W tej sytuacji może lepiej byłoby zrezygnować z traktowania zgody większości w powyższy sposób (tj. brania zgody – czyli uznania za prawdę – za kryterium prawdy). Można by np. potraktować zgodę większości jako *kryterium obowiązywania* tego, co taką zgodę uzyskało, według recepty: Jeżeli większość członków populacji  $b$  zgadza się na  $p$ , to  $p$  obowiązuje pewną populację  $c$  (oczywiście w szczególnym wypadku tożsamą z  $b$ ). Przemawia za tym fakt, że sama p. Kijania-Placek często odwołuje się do ilustracji sugerujących takie traktowanie zgody większości; np. przesądza prawostronną monotoniczność binarnego kwantyfikatora większości.

Nie usuwa to pewnego innego kłopotu, który został pominięty przez p. Kijanię-Placek. Podkreśla ona wielokrotnie nie tylko to, że kryterium większości ma ograniczoną stosowność i jest wobec tego – jak się wyraża – „kryterium uzupełniającym”, ale nawet, że pozostaje w konflikcie z innymi kryteriami. Taka sytuacja jest dopuszczalna tylko wtedy, gdy chodzi nie o kryterium prawdy, lecz o kryterium *uznawania za prawdę*. Oto pewna osoba  $A$  rozważa, czy ma *uznać* zdanie  $\alpha$ , i z braku innych racji osoba  $A$  kieruje się tym (*scil.* „kryterium uzupełniającym”), że w pewnej populacji  $b$  większość uznaje zdanie  $\alpha$ . Zwróćmy uwagę, iż może być tak, że sama osoba  $A$  nie należy do populacji  $b$ , ale może być i tak, że  $A$  należy do  $b$  (mianowicie do niezdecydowanej części populacji  $b$ ). Czy obliczając większość,  $A$  ma się zaliczyć do odpowiedniej części populacji  $b$  – przed podjęciem własnej decyzji, czy dopiero po podjęciu?

Jeśliby już praca miała ostatecznie dotyczyć kryterium prawdy odwołującego się do zgody, to adekwatność takiego kryterium wymagałaby dokonania relatywizacji owej zgody nie tylko do populacji, w której do takiej zgody dochodzi, ale także np. do (przekrojów czasowych) członków tej populacji. Tymczasem p. Kijania-Placek bierze pod uwagę jedynie sytuację, w której ktoś początkowo niezdecydowany zajmuje w końcu określoną postawę asertywną, choć równie interesujące byłoby rozważenie sytuacji, w której ktoś początkowo zdecydowany np. na *tak*, później decyduje się na *nie* lub przechodzi do »obozu« niezdecydowanych. Czy nie świadczy to o tym, że w tle analiz p. Kijani-Placek jest nie tyle prawda, co – demokratyczne procedury głosowania?

Zresztą p. Kijania-Placek we „Wstępie” nawet deklaruje, że praca jej będzie analizą zwrotu „większość członków populacji  $b$  uznaje zdanie  $p$ ”. Po co więc forsować wątpliwą ideę, że zwrot ten wskazuje kryterium prawdy?

Namawiam Czytelników do eksperymentu myślowego, który sam z powodzeniem przeprowadziłem: do uwolnienia książki *Prawda i konsensus* od niepotrzebnego balastu metafizycznego i spojrzenia na nią jako na – alternatywną wobec propozycji Lehrera i Wagnera – rekonstrukcję zasad „osiągania wspólnych wniosków przez grupy niekoniecznie zgadzających się ze sobą ekspertów czy innych uczestników dyskusji”.

## 3.

Istotne dla analizy logicznej, podjętej w rozprawie *Prawda i konsensus*, jest tło intuicyjne tej analizy. P. Kijania-Placek nie zestawia – w jednym miejscu – pełnej listy tworzących to tło intuicji. Zrobiłem na własny użytek takie zestawienie (zresztą bez pretensji do zupełności) i zamieszczam je poniżej w przekonaniu, że i innym Czytelnikom ułatwi to śledzenie subtelných rekonstrukcji formalnych p. Kijani-Placek.

Oto więc lista 22 postulatów zdających sprawę ze wspomnianych intuicji; status poznawczy tych postulatów jest różny: są tu postulaty dotyczące »faktów empirycznych« – i postulaty wyrażające indywidualne preferencje. Niektóre postulaty podają cytując odpowiednie sformułowania z książki. Gwiazdką zaznaczam postulaty związane z intuicjami, które – z różnym stopniem przekonania – sam podzielam.

## A. Postulaty w sprawie PRAWDY:

- (1)\* Negacja prawdy jest równoważna fałszowi.
- (2) „[Zdanie typu] »Większość szarmanckich jest szarmancka« nie jest prawdziwe, gdy w ogóle nie ma szarmanckich”.
- (3) „Zdanie, na które nie ma zgody większości, ani też większość go nie odrzuca, nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe”.
- (4)\* „Prawdziwość lub fałszywość [przysługuje] także zdaniom, które zostałyby tak lub inaczej zakwalifikowane, gdyby wszyscy uprawnieni do głosowania wzięli w nim udział, wypowiadając się za lub *przeciw* jakiemuś zdaniu, bez względu na to, jakie byłyby ich decyzje”. „Są takie zdania złożone [mianowicie wszystkie i tylko tautologie logiczne], co do których sam fakt, że wszyscy wypowiedzieliby się za lub *przeciw* zdaniom, z których one się składają, wystarczyłoby, aby w wyniku każdego z tych możliwych głosowań okazały się one prawdziwe”.
- (5) „W większości wypadków zakres stosowalności kryterium prawdy przez zgodę większości zależy od naszych preferencji filozoficznych”.
- (6)\* „Kryterium prawdy przez zgodę większości stosować będziemy tam, gdzie inne kryteria nie dają nam odpowiedzi na pytanie o prawdziwość zdania”.
- (7) „Istnieje [...] grupa zdań, do których nie możemy stosować kryterium prawdy przez zgodę większości z powodów czysto logicznych. Do grupy tej należą zdania stwierdzające uznawanie innych zdań przez większość”. Pierwszy z tych powodów polega na tym, że „w tym wypadku narażamy się na niebezpieczeństwo regresu w nieskończoność”. Drugi z powodów polega w uproszczeniu na tym, iż „może się zdarzyć, że zdanie *p* okaże się prawdziwe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości, a zdanie »Większość członków populacji *b*<sub>1</sub> uznaje zdanie *p*« okaże się zgodnie z tym kryterium fałszywe”.

## B. Postulaty w sprawie UZNAWANIA:

- (8) „Logika uznawania nie wydaje się *do końca* [kursywa moja, JJJ] ekstensjonalna”. W szczególności „uznawanie zdań nie jest do końca ekstensjonalne i na przykład uznawanie alternatywy nie jest całkowicie wyznaczone poprzez uznawanie jej składników”.
- (9) „Większość z nas przy próbie podania [...] wartości [liczbowej subiektywnego prawdopodobieństwa z jakim dana osoba uznaje dane zdanie] ograniczyłaby się do trzech kwalifikacji: »tak«, »nie«, »nie wiem«”.
- (10)\* „Nie co do każdego możliwego – a nawet wypowiedzianego – zdania potrafimy określić swój stosunek, to znaczy zdecydować się, czy uznajemy je, czy nie; w wielu wypadkach pozostajemy niezdecydowani”. „Nie każdy z nas potrafi zdecydować o każdym zdaniu, czy uznaje je, czy odrzuca”.
- (11) „Niezdeterminowanie polega na tym, że nie wiemy, czy uznajemy dane zdanie, czy nie, co jest zgodne zarówno z późniejszym jego uznaniem, jak i odrzuceniem”. „Nie wszyscy i nie co do wszystkich zdań potrafimy określić, czy zdanie to jest uznane przez nich, czy odrzucone”.

(12)\* „Do uznania [...] negacji [danego zdania] zobowiązani są [...] tylko ci, którzy odrzucili to zdanie”. „Odrzucanie formuły jest [...] równoważne ze spełnianiem jej negacji”.

(13)\* „Nawet jeżeli rzeczywiście nie jest tak, że uznajemy wszystkie konsekwencje zdań przez nas uznawanych, to powinno tak być w sytuacji modelowej. [...] Większość z nas poczuwa się do odpowiedzialności za [...] konsekwencje [uznawanych przez siebie zdań]”.

#### C. Postulaty w sprawie ZGODY:

(14)\* „Zgoda powszechna jest szczególnym przypadkiem zgody większości”.

(15)\* „W prawie żadnym z [...] przypadków nie [...] [mamy] do czynienia z wymogiem zgody [...] absolutnej wszystkich członków danej populacji. [...] Możemy więc [...] wydzielić grupę ekspertów, a następnie wymagać od nich pełnej zgody. Sprowadza się to [do] zacieśnienia rozważanej populacji. Możemy [też] uznać, że grupa ekspertów jest trudna do wydzielenia i [...] wymagamy zgody większości”. Proponowana aparatura „pozwała rozpatrywać oba te warianty”.

(16)\* „Przy podejmowaniu decyzji kolegialnych dba się zazwyczaj o to, aby grupy decyzyjne składały się z nieparzystej liczby osób, aby wykluczyć impas, polegający na równomiernym rozłożeniu się głosów »za« i »przeciw«”.

#### D. Postulaty w sprawie WIĘKSZOŚCI:

(17)\* Wyrażenie „większość danej grupy” ma różne sensy, m.in.: „więcej niż połowa całej grupy”, „więcej niż połowa tych członków grupy, którzy wypowiadają się w danej sprawie” lub „prawie wszyscy członkowie danej grupy”. Uwzględnia się więc w szczególności „model takiej demokracji, w której większość jest rozumiana jako większość uprawnionych do głosowania, a nie po prostu większość głosujących”.

(18) „Populacje, o których mówimy [w związku z uznawaniem], są zawsze skończone”. „Liczba członków populacji, które rozważamy [obliczając większość] jest [w praktyce] zawsze skończona”. „Termin »większość« występujący w zdaniu »Większość populacji *m* uznaje zdanie *p*« to kwantyfikator języka naturalnego”, a więc operujący w zbiorze skończonym. „Ludzi raczej na zaludnienie [...] [zbioru o mocy nieskończonej] nie wystarczy”.

(19) „W języku naturalnym mówimy raczej o tym, że wszyscy mieszkańcy Londynu chorują na gardło, niż że wszyscy chorują na gardło, a jeżeli nawet używamy tego ostatniego zdania, to nigdy – bądź bardzo rzadko – nie chcemy kwantyfikować po dziedzinie wszystkich przedmiotów”.

(20) „Gdy pytamy o nie-fizyków, to używamy negacji kontekstowej, angielskiej *non-*, która niestety nie ma naturalnego odpowiednika w języku polskim, i mamy na myśli co najwyżej wszystkich ludzi, którzy nie są fizykami”.

(21)\* „Badając [...], [co jest większością] danej grupy, ze względów praktycznych bralibyśmy pod uwagę jedynie te osoby, które do danej grupy niewątpliwie należą”.

(22)\* W „głosowaniu, które jest rozciągnięte w czasie, [może być tak, że] [...] choć ci, którzy już zagłosowali, nie mogą swego głosu zmienić, to [jednak] głos pozostałych ma często decydujące znaczenie”.

Jak widać (por. gwiazdki), dzielam większość z 22 intuicji p. Kijani-Placek.

Chcę na zakończenie wyraźnie podkreślić: fakt, że nie dzielam wszystkich tych intuicji, nie zmniejsza w moich oczach w żadnym razie ani celowości podjęcia rekonstrukcji intuicji *dobrych* przez p. Kijanię-Placek, ani – tym bardziej – nie podważa adekwatności faktycznie przeprowadzonej przez p. Kijanię-Placek formalizacji.

Cóż zaś warte są intuicje bez formalnej ekspozycji?



## WSTĘP

Zgodnie z konsensualnym kryterium prawdy zdanie  $p$  jest prawdziwe, gdy jest ono powszechnie uznane przez pewną populację, nazwijmy ją populacją  $b$ . Celem tej książki jest dostarczenie aparatury logicznej, pozwalającej na zdefiniowanie i analizę konsensualnego kryterium prawdy. Analiza, którą proponuję, ujmuje zgodę powszechną jako szczególny przypadek zgody większości; w ogólnej postaci kryterium to będzie miało następującą postać:

(\*) Zdanie  $p$  jest prawdziwe, gdy większość członków populacji  $b$  uznaje je.

Analiza logiczna tego kryterium będzie wobec tego analizą zwrotów, które w (\*) występują po prawej stronie, a więc zwrotu „większość członków populacji  $b$ ” oraz zwrotu „uznaje zdanie  $p$ ”.

Książka ta adresowana jest do czytelników o zainteresowaniach filozoficznych, a szczególnie do tych, których interesują kwestie logiczne z tymi zagadnieniami związane. Czytelnik zaznajomiony z logiką predykatów pierwszego rzędu i teorią mnogości nie powinien mieć kłopotów z lekturą, gdyż użyta aparatura logiczna, która wybiega poza te dwie teorie, zostanie wprowadzona od podstaw.

W przypadku zdań atomowych wyrażenie „osoba  $x$  uznaje zdanie  $p$ ” przyjmuję za wyrażenie pierwotne i jego analizie nie będę poświęcać uwagi, skupiając się jedynie na logicznych związkach pomiędzy uznawaniem przez większość zdań atomowych, a uznawaniem przez większość zdań złożonych. Oznacza to, że pozostawiam poza zakresem rozważań wszelkie kwestie związane z tym, co skłania ludzi do uznawania poszczególnych zdań atomowych, a w szczególności, jakimi kryteriami się kierują i czy w ogóle jakimiś się kierują. Pozostawiam też na boku kwestie racjonalności decyzji co do akceptacji lub nie zdań atomowych. Moje rozważania są niezależne od teoretycznych rozstrzygnięć tych kwestii.

Mówiąc o zgodzie większości, będę miała na myśli coś, co, używając terminologii Isaaca Leviego, nazwałabym raczej „podzielaną zgodą” (*shared agreement*) niż „wynikiem badań” (*outcome of inquiry*) (1985). Paradygmatem będzie tu raczej sytuacja głosowania w parlamencie niż dyskusja i przekonywanie, choć nie wykluczam, że przekonywanie odgrywa rolę w pierwotnym rozkładzie uznawania zdań atomowych.

Logiczna analiza konsensualnego kryterium prawdy przebiegała będzie w kilku etapach. Pierwszy krok to przetłumaczenie definicji kryterium prawdy przez zgodę większości sformułowanej w języku naturalnym na język formalny. Za pomocą kwantyfikatora większości zdefiniuję następnie kryterium prawdy przez zgodę większości w języku formalnym, kierując się postulatem adekwatności w stosunku do intuicji związanych z uznawaniem zdań, „większością” i kryteriami prawdy. Postulaty te zostaną sprecyzowane w poszczególnych rozdziałach.

Tu na wstępie chciałabym wyraźnie zaznaczyć, że praca moja nie dotyczy teorii prawdy rozumianej jako zgoda powszechna bądź zgoda większości, lecz jedynie kryterium prawdy.

Podstawową różnicą, jaka z tego zastrzeżenia wypływa jest fakt, iż koncepcja ta staje się odporna na argumenty poprzez kontrprzykłady, gdyż nic nie stoi na przeszkodzie, aby kryterium mogło być stosowane jedynie do wyróżnionej grupy zdań. Jestem daleka od bronięcia zgody większości jako teorii prawdy, gdyż uważam taką teorię za nieadekwatną bądź wręcz błędną. Mówienie o kryterium prawdy pozwala na potraktowanie zgody większości jako kryterium uzupełniającego, a nie zastępującego inne. Jest to swego rodzaju ostatnia deska ratunku, do której odwołujemy się wtedy, gdy inne kryteria zawodzą. Kryterium prawdy przez zgodę większości nie zamierza konkurować ze świadectwem danych zmysłowych czy dowodem matematycznym w kwestii poświadczenia prawdziwości. Są jednak dziedziny, w których inne kryteria zawodzą i aby obronić zasadność zajmowania się tym kryterium, wystarczy wskazać klasę zdań, do których ono się stosuje.

Taką klasą byłyby na przykład zdania etyczne. Oczywiście poszczególne koncepcje etyczne mogą odrzucać to kryterium jako nieadekwatne i w tej dziedzinie, istotne jest jednak to, iż stanowi ono jedno z kryteriów faktycznie stosowanych w ocenianiu sądów etycznych. Już ten jeden powód wydaje mi się wystarczający, aby analiza kryterium prawdy przez zgodę większości była zagadnieniem filozoficznie interesującym.

Elementy kryterium prawdy przez zgodę większości można odnaleźć w niektórych systemach prawnych, przede wszystkim anglosaskich. W ramach postępowania sądowego przyjmuje się bez dalszej dyskusji za prawdziwe sądy stwierdzające fakty powszechnie znane, to znaczy takie, co do których panuje powszechna zgoda. Także werdykt rady przysięgłych zapada większością głosów lub poprzez jednomyślność.

Dziedziną, w której konsensus odgrywa coraz częściej rolę decydującą o uznaniu danego zdania za obowiązujące, a więc w praktyce traktowaniu go w taki sposób, jak traktujemy zdania, o których wiemy, że są prawdziwe, jest medycyna. W wyniku rozwoju nowych technologii medycznych, niepełnej wiedzy na ich temat i kontrowersyjnych kwestii moralnych, związanych z ich stosowaniem (jak choćby kwestia eutanazji, przeszczepów organów od osób zmarłych czy sztucznego zapłodnienia), coraz częściej decyzja co do postępowania w danej sytuacji przekracza kompetencje jednego lekarza i poddawana jest pod dyskusję grupy składającej się zarówno z przedstawicieli świata medycyny, jak i pracowników społecznych, a nawet filozofów. Choć teoretycy zajmujący się tymi kwestiami w znacznej mierze skupiali się na podważaniu moralnej prawomocności decyzji podejmowanych przez takie komisje (Jennings 1991, Caws 1991), to powszechnym jest przekonanie, że pojęcie konsensusu czy zgody większości jest niezastąpione, a co za tym idzie – wymaga badania. Odgrywa ono absolutnie kluczową rolę w teoretycznych rozważaniach etyków, którzy odrzucają realizm etyczny i traktują kwestie etyczne jako kwestie „praktycznej dyskusji raczej, niż obiektywnego dowodu” (Jennings 1991, s. 447).

## STRUKTURA KSIĄŻKI

Książka ta podzielona jest na trzy części poprzedzone niniejszym wstępem. Na część pierwszą składają się rozdział pierwszy, drugi i trzeci, które mają charakter sprawozdawczy bądź są ogólnym wprowadzeniem, łącznikiem pomiędzy językiem naturalnym a konstrukcją logiczną.

Rozdział pierwszy poświęcony jest naszkicowaniu tła historycznego kryterium prawdy przez zgodę większości, począwszy od czasów starożytnych, aż do współczesności. Przedstawione są tam poglądy autorów, takich jak: Arystoteles, Seneka, Marcus Tullius Cicero,

G.H. Joyce, Bernard Boedder, Charles Hodge, Charles Sanders Peirce, Jürgen Habermas, Edward Poznański i Aleksander Wundheiler oraz Keith Lehrer i Carl Wagner. Jako że zasadniczym celem tej pracy jest logiczna analiza kryterium konsensualnego, rozważania historyczne pozostawiam na etapie szkicowym i wstępnym, bez pretendowania do pełności.

W rozdziale drugim wprowadzona zostaje definicja funkcji  $T$ , tłumaczącej zdania o uznaniu z języka naturalnego na język, a raczej języki formalne, które są językami logiki predykatów pierwszego rzędu z dodanym kwantyfikatorem większości, a w rozdziale 7. – na język  $L_{\omega_1, \omega}$ . Relacji uznawania zdania  $p$  przez osobę  $x$  odpowiada po stronie języka formalnego jednoargumentowy symbol relacyjny, którego zamierzoną interpretacją jest grupa osób uznających zdanie  $p$ . Z każdym więc zdaniem atomowym z języka naturalnego związany jest (w sposób sprecyzowany w definicji  $T$ ) jednoargumentowy symbol relacyjny z języka formalnego.

Rozdział trzeci ma charakter sprawozdawczy. Wprowadzone zostają w nim wszystkie podstawowe pojęcia i twierdzenia z teorii kwantyfikatorów uogólnionych, które są wykorzystywane w dalszej części.

Druga, zasadnicza część książki składa się z rozdziałów 4.–7., w których dokonana jest logiczna analiza kryterium prawdy przez zgodę większości. W rozdziale czwartym przeprowadzam analizę tego kryterium za pomocą kwantyfikatora większości  $M$  typu  $\langle 1 \rangle$  w aparaturze kwantyfikatorów uogólnionych. Ponieważ prawdziwość zdań zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zrelatywizowana jest z konieczności do populacji, której większość badamy, w przypadku kwantyfikatora  $M$  relatywizacji tej odpowiada relatywizacja do modelu (uniwersum modelu). Kwantyfikator ten zinterpretowany jest najpierw w modelu standardowym, który zostaje następnie zastąpiony modelem częściowym. Przejście od modelu standardowego do modelu częściowego motywowane jest intencją bycia w zgodzie z intuicjami dotyczącymi uznawania zdań przez podmioty ludzkie. Za pomocą pojęcia superwaluacyjnego spełniania zdań w modelach częściowych dla języka z dodanym kwantyfikatorem  $M$  formułuję pierwszą definicję kryterium prawdy przez zgodę większości.

W rozdziale piątym kwantyfikator większości  $M$  typu  $\langle 1 \rangle$  zastąpiony zostaje przez kwantyfikator  $M^2$  typu  $\langle 1, 1 \rangle$ . Różnica pomiędzy tymi kwantyfikatorami polega na tym, że argumentami kwantyfikatora  $M^2$  są dwie formuły z jedną zmienną wolną, z których pierwsza wyznacza kontekst badanej większości. Zamierzoną interpretacją pierwszej z tych formuł jest tak zwany zbiór kontekstowy, czyli zbiór członków populacji, której większość badamy. Oznacza to, że relatywizacja prawdziwości do populacji nie jest tu związana z relatywizacją do modelu, ale do podzbioru uniwersum tego modelu, który interpretuje pierwszy argument kwantyfikatora  $M^2$ . Argumentuję za tym, że to właśnie kwantyfikator  $M^2$  jest kwantyfikatorem używanym w języku naturalnym i dlatego lepiej nadaje się do analizy „większości” występującej w sformułowaniu kryterium prawdy przez zgodę większości. Ponadto w języku logiki predykatów pierwszego rzędu z dodanym kwantyfikatorem  $M^2$  definiowalny jest kwantyfikator  $M$ , a odwrotna zależność nie zachodzi. Zdefiniowanie spełniania superwaluacyjnego w przypadku języka z dodanym kwantyfikatorem  $M^2$  wymaga wyróżnienia pewnej klasy modeli częściowych, które nazywam modelami semiczęściowymi. Za pomocą superwaluacyjnego spełniania zdań w modelach semiczęściowych dla języka z dodanym kwantyfikatorem  $M^2$  formułuję kolejną definicję kryterium prawdy przez zgodę większości.

Zarówno w rozdziale czwartym, jak i piątym przyjmuję założenie o skończoności mocy uniwersum modeli, które rozważamy. Założenie to zostaje odrzucone w rozdziale szóstym. Dzięki wprowadzeniu dodatkowych typów wyróżnionych symboli predykatywnych, które otrzymują specjalną interpretację w modelach semiczęściowych, udaje się mimo to zacho-

wać intuicję związaną z przekonaniem o tym, że populacje, które rozważamy, zawierają zawsze skończoną liczbę członków. Po raz trzeci definiuję kryterium prawdy przez zgodę większości za pomocą superwaluacyjnego spełniania zdań w modelach semiczęściowych dla języka z dodanym kwantyfikatorem  $M^2$  oraz udowadniam równoważność sformułowanych dotychczas definicji kryterium prawdy przez zgodę większości.

W rozdziale siódmym przyjmuję dodatkowe założenie o tym, że rozważane populacje mają zawsze nieparzystą liczbę członków. Pozwala to na zdefiniowanie pewnej wersji kwantyfikatora większości w logice  $L_{\omega, \omega}$  i sformułowanie teorii większości, TW, powstałej na bazie tej logiki. Choć z logicznego punktu widzenia przyjęte założenie jest dość drastycznym ograniczeniem, to znajduje ono pewne uzasadnienie w pragmatycznym charakterze rozważanego kryterium.

Ostatnią część, trzecią, stanowi rozdział ósmy, w którym wyciągam wnioski natury logiczno-filozoficznej z analizy przeprowadzonej w poprzednich rozdziałach. Obejmują one kwestię obowiązywania biwalencji, monotoniczności kryterium, zakresu jego stosowalności, a także kwestię potraktowania konsensualnego kryterium prawdy jako szczególnego przypadku kryterium prawdy przez zgodę większości. Na końcu znajduje się spis definicji i symboli użytych w pracy, indeks nazwisk oraz bibliografia.

Na koniec chciałabym wyjaśnić ogólną strategię metodologiczną jaką przyjąłam w mojej pracy. Jako że logika jest tutaj jedynie narzędziem w analizie zagadnienia filozoficznego, zdecydowałam się na kompromis pomiędzy precyzją formalną, a przejrzystością wykładu. Przejawia się on na przykład w zrezygnowaniu z przyjęcia odrębnych znaków dla oznaczenia symboli i ich odpowiedników w metajęzyku tam, gdzie kontekst wyklucza, mam nadzieję, nieporozumienia.

## PODZIĘKOWANIA

Książka ta powstała na podstawie doktoratu, który obroniłam na Uniwersytecie Jagiellońskim w 1999 roku, a napisałam pod kierunkiem Profesora Jana Woleńskiego. To jemu należą się słowa podziękowania za to, że nie tylko czytał, komentował i krytykował kolejne wersje pracy, ale służył mi pomocą, udostępniając książki i artykuły ze swej biblioteki, zaś gdy i ta nie wystarczała, pomagał sprowadzać poszukiwane prace z zagranicznych ośrodków. Za to oraz za słowa zachęty do badań, chciałabym mu serdecznie podziękować. Wiele zawdzięczam recenzentom rozprawy doktorskiej, Profesorom Jackowi J. Jadackiemu i Jerzemu Perzanowskiemu. Ich uwagi, dotyczące zarówno kwestii merytorycznych, jak i sposobu przedstawienia poszczególnych zagadnień, sprawiły, że w wersji, którą Państwo czytają, jest znacznie mniej błędów i niejasności.

Inspiracją dla użycia właśnie takich narzędzi logicznych, to znaczy kwantyfikatorów uogólnionych i logiki  $L_{\omega, \omega}$ , było dla mnie seminarium Profesora Andrzeja Wrońskiego z logiki filozoficznej, w którym przez kilka lat uczestniczyłam. Pomysł przeprowadzenia logicznej analizy kryterium prawdy przez zgodę większości zawdzięczam doktorowi Adamowi Olszewskiemu, który sam tym tematem wcześniej się zajmował (Olszewski 1992). Jemu też należą się gorące podziękowania za cierpliwą i uważną lekturę oraz krytykę, która przyczyniła się do poprawienia wielu błędów. Dziękuję także dr Joannie Łojewskiej za pomoc w zrobieniu rysunków.

Badania tu referowane były przedmiotem grantu KBN nr pb. 447/H01/97/13. W czasie pisania pracy byłam też stypendystką Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej oraz The Ryoichi Sasakawa Young Leaders Fellowship Fund.

# Część I



## RYS HISTORYCZNY

Celem, który postawiłam sobie w tym rozdziale, jest podanie historyczno-filozoficznego tła dla rozważań logicznych, którym poświęcona jest zasadnicza część pracy. Przedstawienie szczegółowej i aspirującej do pełności historii tego zagadnienia to z pewnością temat wystarczająco obszerny, aby wystarczył na napisanie osobnej pracy. Stąd też będzie to zaledwie zarys historyczny, nie pretendujący do wyczerpania tematu. Z tego też powodu w większości wypadków ograniczę się do podania faktów historyczno-filozoficznych, a komentarzem opatrzę tylko nieliczne poglądy.

### 1.1. ZGODA POWSZECHNA W STAROŻYTNOŚCI

Choć niektórzy autorzy<sup>1</sup> odnajdują elementy zgody większości traktowanej jako kryterium prawdy nawet u Homera, to pierwsze wyraźne odniesienie znajdujemy u Arystotelesa. W księdze X *Etyki nikomachejskiej* pisze on:

Kto podnosi zarzut, że nie jest [koniecznie] dobrem to, do czego wszyscy zdążają, ten – obawiam się – utrzymuje coś, co jest bez sensu. Twierdzimy bowiem, że to, co wszystkim się wydaje, rzeczywiście też tak się ma. (1172b, 36–1173a, 2)

Jeżeli dodamy do tego sławne sformułowanie definicji prawdy Arystotelesa z *Metafizyki*, to otrzymamy konsensualne kryterium prawdy, gdyż, parafrazując, jeżeli wszystkim się wydaje, że coś jest dobre, to jest dobre, a mówić o czymś, że jest dobre, gdy jest dobre, jest prawdą, więc z prawa przechodniości otrzymujemy, że jeżeli wszystkim się wydaje, że coś jest dobre, to jest prawdą, że to coś jest dobre.

W *Topikach* natomiast Arystoteles stawia sobie za zadanie zbadanie sposobu rozumowania, który pozwala wyciągać wnioski z przesłanek uznawanych przez wszystkich, czyli rozumowania dialektycznego (100a 18–24). Jak argumentuje Klaus Oehler w „Der Consensus Omnium als Kriterium der Wahrheit in der antiken Philosophie und der Patristik”, traktowanie zdań, na które panuje powszechna zgoda, jako przesłanek w rozumowaniu jest równoznaczne z przyznaniem im statusu prawdziwości, a tym samym jest przykładem używania przez Arystotelesa zgody powszechnej jako kryterium prawdy. Choć można mieć wątpliwości, czy Arystoteles traktuje tu zgodę powszechną jako kryterium prawdy, gdyż rozumowania (sylogizmy) dialektyczne przeciwstawia on apodyktycznym, czyli takim rozumowaniom, które opierają się na przesłankach „prawdziwych i podstawowych”, to inne miejsca *Topik* wydają się potwierdzać tę diagnozę. Rozdział 14. z księgi I zaczyna się od następującego stwierdzenia:

---

<sup>1</sup>Por. Oehler (1961).

Istnieje tyle sposobów dobierania przesłanek, ile jest rodzajów wyróżnionych w rozdziale, który poświęciliśmy przesłance [104a 8–15]: można więc przyjąć opinie wszystkich ludzi albo większości, albo opinie filozofów, a wśród tych ostatnich albo opinie wszystkich, albo większości, albo najwybitniejszych, z wyjątkiem opinii niezgodnej z tym, co uchodzi za powszechnie przyjęte. (105a 33–36)

Pewnych elementów podobnego myślenia można doszukać się w konwencjonalizmie sofistów. Gdy Protagoras twierdził jednak, że prawdziwe jest to, co komuś wydaje się prawdziwe, kładł raczej nacisk na relatywność i nietrwałość orzeczenia prawdziwości i nie wyciągał z tego wniosku, że to, co się wielu lub większości wydaje prawdziwe, zasługuje w większym stopniu na miano prawdziwego niż to, co się wydaje jednostkom. Arystoteles wydaje się jedynym myślicielem starożytności, który w tak bezpośredni sposób traktował zgodę większości jako kryterium prawdy.

## 1.2. *CONSENSUS GENTIUM*

W czasach późniejszych kryterium prawdy przez zgodę powszechną stosowane było przede wszystkim jako argument za istnieniem Boga, tak zwany *consensus gentium*. Różne uzasadnienia tego, dlaczego z powszechnej zgody na dane twierdzenie możemy wnioskować o jego prawdziwości, można podzielić za Paulem Edwardsem (1967) przynajmniej na dwie grupy, z których pierwszą, tak zwaną wersję biologiczną, reprezentują między innymi Marcus Tullius Cyncero oraz Seneka, a w późniejszym okresie Charles Hodge i Augustus H. Strong, zaś drugą, antyseptyczną – G.H. Joyce, który jednocześnie należy wraz z Bernardem Boederem, do najgorętszych zwolenników tego argumentu. W takiej też mniej więcej kolejności poszczególne poglądy będą omawiać.

W księdze drugiej *O naturze bogów* Cynceron pisze, że wszyscy ludzie bez względu na to, jakiego są pochodzenia, mają przekonanie, że Bóg istnieje lub że bogowie istnieją; różnią się te przekonania tylko co do natury bogów. Siłę i odporność takiego przekonania na upływ czasu przypisuje Cynceron temu, że jest to przekonanie wrodzone: Bóg wyrył je w naszych umysłach (I, 44; II, 12). Konsensus wyjaśniany jest przez wspólną naturę wszystkich ludzi, do której należą wrodzone pojęcia, takie jak pojęcie Boga czy nieśmiertelności duszy. Poprzez zgodę powszechną ujawnia się, według Cyncerona, głos natury, „to zaś, w czym się wszyscy z natury swej zgadzają, nieodzownie musi być prawdą” (I, 44).

Tę wersję argumentu za istnieniem Boga często przypisuje się stoikom. Na potwierdzenie tego można by na przykład przytoczyć 117 list Seneki do Lucyliusza, w którym pisze on, że uważamy powszechne przekonanie ludzkości za przekonujący argument, i przypisuje tę powszechność temu, że „wszyscy mają wszczepione pojęcie bogów” (1998, s. 615). Oehler twierdzi jednak, iż to Cynceron jest autorem poglądu o biologicznym uwarunkowaniu powszechności tego przeświadczenia.

Późniejsi autorzy podzielili się co do tego, jak należy rozumieć wrodzoność pojęcia. Jedni twierdzili, że pojęcie Boga jest obecne w umyśle człowieka aktualnie, inni, jak Charles Hodge (1871–1873, s. 191–192), odwoływali się do dyspozycyjnego sensu wrodzoności: idea uaktualnia się na skutek odpowiednich bodźców otoczenia i czasem, gdy takich bodźców zabraknie, może nie uaktualnić się w ogóle. Według Hodge'a, wrodzoność idei ogranicza się do przyjęcia, że to nasza natura jest źródłem tych pojęć, a umysł człowieka jest tak skonstruowany, że przyjmujemy pewne rzeczy za prawdziwe bez dowodu i pouczenia o tym. Hodge przyjmuje wobec tego, iż „to, w co wszyscy wierzymy i musimy wierzyć, jest niewątpliwie



prawdziwe” (s. 193). Komentarza wymaga tu słowo „musimy”, które nie pojawiało się u innych autorów, i takiego komentarza dostarcza Hodge. Po pierwsze ogranicza on stosowanie tego kryterium do prawd „intuicyjnych”, czyli takich, które swoje uzasadnienie biorą z naszej natury. Zalicza do nich, oprócz przekonania o istnieniu Boga, między innymi twierdzenia geometryczne, przekonanie o tym, że nie ma skutku bez przyczyny, normy etyczne i przekonanie o prawdziwości naszych zmysłowych doznań (s. 192–193). Wyłączone z jego zakresu będą natomiast twierdzenia dotyczące świata zewnętrznego. Konsekwencją tego poglądu, którą przyjmuje Hodge, jest zbyteczność nauczania religii i nawracania: skoro wszyscy ludzie z natury swojej wierzą w istnienie Boga, to dzieje się tak z konieczności i w przeciwieństwie do tego, co przyjmuje Joyce, którego poglądy omawiam poniżej, umysł ludzki nie ma udziału w dojściu do tego przekonania (s. 199–200). Co jednak zrobić z niewątpliwym faktem istnienia niewierzących? Wy tłumaczyć można to, według Hodge’a, poprzez porównanie do wahadła, które pozostaje w odchyleniu od swojego naturalnego położenia jedynie tak długo, jak długo działa na niego siła zewnętrzna, która je z tego położenia równowagi wytrąca. Podobnie człowiek „zwindziony fałszywą filozofią” może przez pewien czas nie wierzyć w istnienie Boga. Takie stany niewiary są jednak według Hodge’a chwilowe, zawsze czymś spowodowane i, co charakterystyczne, powrót do „naturalnego” stanu wiary nie wymaga przekonywania, odbywa się pod wpływem impulsu (s. 198). Jak łatwo się domyślić, tego typu wybiegi były próbą odparcia ataków tych przeciwników konsensualnego kryterium prawdy, którzy kwestionowali powszechność wiary w Boga. Należą do nich choćby John Locke (1955) czy John S. Mill (1874, rozdział zatytułowany „Argument from the general consent of mankind”). Zarówno Locke, jak i Mill atakują to kryterium podając w wątpliwość wrodzoność idei Boga. Mill ponadto zauważa, że nawet gdyby przyjąć wrodzoność tej idei, to nie unikniemy błędnego koła, gdy chcemy przejść od wrodzoności do prawdziwości, gdyż trzeba by wtedy założyć, jak robił to niewątpliwie Cyceron, że idea ta pochodzi od Boga, który nie ludziłby swojego stworzenia, a to właśnie należało udowodnić.

Za autora antyseptycznej wersji argumentu za istnieniem Boga, powołującego się na zgodę powszechną jako gwaranta prawdziwości tego przekonania, uchodzi G.H. Joyce. Z faktu powszechnej zgody na istnienie Boga oraz przeświadczenia o tym, że ludzie doszli do tego przekonania za pomocą rozumowania (co odróżnia ten argument od poprzedniego) oraz z wiary w potęgę rozumu ludzkiego wnioskuje on, nie wprost, o jego prawdziwości. Gdybyśmy bowiem wszyscy mylili się w tej sprawie, to tym bardziej należałoby być sceptycznym co do innych twierdzeń, do których dochodzimy drogą rozumowania, a na które zazwyczaj aż tak powszechnej zgody nie ma. Przyjęcie więc, że powszechne przekonanie o istnieniu Boga jest przekonaniem prawdziwym, stanowi według Joyce’a jedyną alternatywę dla sceptycyzmu poznawczego (1923, s. 179–181, 198). Świadomy ataków za pośrednictwem kwestionowania powszechności wiary w Boga, Joyce należy do tych autorów, którzy odwołują się do większości i twierdzą, że ta większość jest na tyle dominująca, iż nieliczne wyjątki nie mogą zachwiać siły argumentu (s. 180).

Warto na koniec wspomnieć jeszcze o Boedderze, którego poglądy wymykają się do-tychczasowemu podziałowi na biologiczne i antyseptyczne wersje argumentu za istnieniem Boga. Boedder poświęca być może najwięcej uwagi argumentowi ze zgody powszechnej i chyba spośród teologów przywiązuje do niego największą wagę jako do samodzielnego argumentu, który „udowadnia istnienie inteligentnego ponadludzkiego władcy tego świata” (1891, s. 31, por. także s. 63). Inni często przyznawali mu pewną wagę, ale jedynie jako argumentowi pomocniczemu. Boedder, który nazywa go argumentem moralnym, przyjmuje za zasadę to, że „trwała powszechnie panująca opinia jest dowodem prawdy” (1891, s. 71),

a tym samym traktuje zgodę powszechną jako kryterium prawdy, zastrzegając się równocześnie, że ma na myśli zgodę większości. To właśnie powszechność oraz trwałość tego przekonania w przeciwieństwie do przekonań fałszywych, które nawet jeśli zdobyły powszechną akceptację, to jedynie na krótko, świadczy według Boeddera o jego prawdziwości, gdyż „błąd jest zawsze częściowy, lokalny, przejściowy”, a „prawda jedynie jest wszędzie ta sama” (s. 63).

### 1.3. ROLA ZGODY POWSZECHNEJ W PRAGMATYZMIE CHARLESA S. PEIRCE’A

To przekonanie, że prędzej czy później prawda wyjdzie na jaw i fałsz na dłuższą metę nie ma szansy, pojawia się w bardziej rozwiniętej formie u Charlesa S. Peirce’a (5.575, 5.582, 5.587). Definiuje on prawdę jako „[p]ogląd, który na mocy przeznaczenia musi być zaakceptowany przez wszystkich badaczy” (5.407). Ponieważ jednak równocześnie definiuje rzeczywistość jako „przedmiot reprezentowany w tym poglądzie” (5.407), pozwala mu to twierdzić, że prawda, do której dochodzimy na drodze konsensusu, jest prawdą w sensie tradycyjnym, w sensie korespondencyjnej koncepcji prawdy. Dodatkową kwestią łączącą poglądy Peirce’a z poglądami Boeddera jest przekonanie o instynktownej zdolności człowieka do odkrywania prawd (5.591, 5.603–604), przy czym Peirce rozciąga tę zdolność daleko poza granice wyznaczone przez Boeddera i stosuje konsensualne kryterium prawdy przede wszystkim do twierdzeń dotyczących świata zewnętrznego czy, ogólniej, twierdzeń nauki. Nie oznacza to oczywiście, że człowiek nie może się mylić; na dłuższą jednak metę poglądy fałszywe zostaną zdyskredytowane.

Czymś, co jednak w znacznym stopniu różni kryterium uznawane przez Peirce’a od przyjmowanych przez innych zwolenników konsensualnego kryterium prawdy, jest jego kontrfaktyczny charakter – nie chodzi o aktualną zgodę konkretnej grupy badaczy, czy nawet o zgodę całej ludzkości, ale o twierdzenia, do których doszlibyśmy, gdyby proces odkrywania rzeczywistości przebiegał w nieskończoność i jego elementy kumulowałyby się i uzupełniały nawzajem (5.553, 5.565, 5.589). W ten sposób kryterium to, mimo że z pozoru pragmatyczne, traci swój konstruktywny charakter, dlatego że w praktyce nie możemy go zastosować do zdecydowania, czy jakieś konkretne twierdzenie jest prawdziwe czy fałszywe. Z drugiej strony konstrukcja ta pozwala Peirce’owi utrzymać absolutny charakter prawdy w sensie niezależności od stanu wiedzy w danej epoce i niezależności od pojedynczego podmiotu poznającego (5.408). Jest to więc raczej definicja prawdy w terminach celu, do którego dąży nauka, niż kryterium, wbrew temu, co pisze na ten temat Otto Apel (1991, s. 21). Jest ona zgodna z korespondencyjną definicją prawdy w takim sensie, że nasze twierdzenia są prawdziwe tylko o tyle, o ile są one zgodne z tymi, do których doszlibyśmy u kresu nauki. W ten sposób ma on nadzieję rozwiązać dylemat klasycznej definicji, polegający na niezrozumiałości relacji korespondencji pomiędzy bytami o charakterze językowym a bytami pozajęzykowymi (5.443–444). Czy mu się to udaje, to już inna kwestia.

### 1.4. ZGODA POWSZECHNA JAKO KRYTERIUM PRAWDY U EDWARDA POZNAŃSKIEGO I ALEKSANDRA WUNDHEILERA

Wyraźne sformułowanie zgody powszechniej jako kryterium prawdy znajdujemy u Edwarda Poznańskiego i Aleksandra Wundheilera w pracy zatytułowanej „Pojęcie prawdy na

terenie fizyki” z 1934 roku. Rozwijają oni koncepcję, która łączy koherencyjne kryterium prawdy z konsensualnym, i argumentują na rzecz tego, że pojęcie prawdy absolutnej nie ma zastosowania w fizyce. Prawdziwość przypisują oni zdaniom i poprzez prawdziwość absolutną rozumieją to, że jest ona niezależna od podmiotu poznającego, od prawdziwości innych zdań i od stanu nauki w danym okresie; prawdziwość absolutna jest cechą dysjunktywną i niestopniowalną oraz jest niezależna od sposobów sprawdzania tej prawdziwości. Poznański i Wundheiler twierdzą, że w rzeczywistości zamiast tego absolutystycznego pojęcia prawdy, w fizyce i w innych dziedzinach życia ludzkiego, w których klasyczne pojęcie prawdy nie pozwala nam rozstrzygnąć, czy dane zdanie jest prawdziwe czy fałszywe, używamy tak zwanego operacjonistycznego pojęcia prawdy. Przy tym ujęciu prawda jest bezpośrednio związana z metodami, za pomocą których rozstrzygamy, czy dane zdanie jest prawdziwe czy fałszywe.

Propozycja Poznańskiego i Wundheilera polega na połączeniu dwu kryteriów: koherencyjnego, które według nich odnosi się do teorii fizycznej jako całości, i konsensualnego kryterium prawdy, które stosujemy w odniesieniu do zdań elementarnych. Poprzez zdania elementarne rozumieją oni cztery rodzaje zdań:

1. Stwierdzanie wzajemnych stosunków przestrzennych – zachodzenie lub niezachodzenie koincydencji przestrzennych. 2. Stwierdzanie wzajemnych stosunków czasowych – zachodzenie lub niezachodzenie koincydencji czasowych oraz porządek czasowy zjawisk. 3. Stwierdzanie liczby (fizycznej), tj. stwierdzanie równoliczności dwóch zbiorów. [...] 4. Stwierdzanie wszelkich innych koincydencji poza czasowo-przestrzennymi, tj. stwierdzanie braku różnic w innych dziedzinach, np. jednakowości: barwy, oświetlenia, wysokości dźwięku i in. (1934, s. 126).

Poznański i Wundheiler twierdzą, że w części dotyczącej konsensualnego kryterium prawdy podążają dość dokładnie za rozważaniami Normana R. Campbella, który według nich traktował powszechną zgodę jako kryterium prawdy (Poznański i Wundheiler 1934, s. 124). W rzeczywistości jednak dla Campbella zgoda powszechna była jedynie kryterium wyboru przedmiotu nauk szczegółowych, takich jak fizyka. Definiuje on przedmiot nauk szczegółowych jako dotyczący zdań, na które zgoda powszechna może zostać osiągnięta (Campbell 1920, s. 22), i odżegnuje się od traktowania zgody powszechnej jako kryterium prawdziwości tych zdań (*ibid.* s. 34). Choć więc Poznański i Wundheiler podążają za Campbellem jeżeli chodzi na przykład o to, które zdania uznamy za elementarne (pierwsze trzy rodzaje zdań podają za Campbellem, a ostatnią dodają od siebie), to idee zgody powszechnej jako kryterium prawdy stosowane w fizyce należy uznać za ich własny pomysł.

Drugą kategorią zdań, na które według Poznańskiego i Wundheilera panuje powszechna zgoda, są twierdzenia logiki i reguły wnioskowania, dzięki czemu własność powszechnej zgody jest dziedziczna – przyznajemy własność zgody powszechnej zdaniom wydedukowanym ze zdań elementarnych. Weryfikacja zdań elementarnych odbywa się poprzez powołanie się na świadectwo osób, które dane zjawisko obserwowały. Wymagana jest zgoda wszystkich tych osób, jednak z pewnymi zastrzeżeniami. Chcąc wykluczyć sytuacje, w których niezgoda osób niekompetentnych bądź fizycznie upośledzonych blokowałaby użycie kryterium, a tym samym uprzedzając oczywiste zarzuty, jakie by można przeciwko temu kryterium wysunąć, Poznański i Wundheiler formułują coś, co sami nazywają „powszechną zgodą z zastrzeżeniami”. Nie chodzi więc o powszechną zgodę *per se*, ale o powszechną zgodę normalnych, kompetentnych i bezinteresownych osób. W tym miejscu znowu odbiegają oni wyraźnie od Campbella, który nalega na to, aby przy rozpatrywaniu zgody powszechnej brać pod uwagę nie tylko osoby spełniające jakies warunki, ale wprost przeciwnie, należy uwzględnić nawet głos „niemowląt i zwierząt, o ile tylko uda nam się ustalić ich opinie” (Campbell 1920,

s. 23). Tak radykalne stanowisko Campbella bierze się stąd, iż uważa on, że zdania elementarne to tego typu zdania obserwacyjne, wobec których każdy jest „normalny” (*ibid.*, s. 30). Campbell jest po prostu optymistą. Poznański i Wundheiler zauważają konieczność rozwiązania sytuacji, w których nawet co do zdań elementarnych panuje odmiennosc opinii, i odróżnienia takich przypadków, w których ta odmiennosc będzie decydowała o odmówieniu danemu zdaniu charakteru zdania prawdziwego, od przypadków, w których mimo wszystko będziemy chcieli uznać to zdanie za prawdziwe. Formułują oni prawa powszechnej zgody, do których zaliczają to, iż „od powszechnej zgody wykluczeni są nienormalni, zainteresowani, niezdolni do rozumienia”, oraz to, że panuje powszechna zgoda na twierdzenia logiki, reguły wnioskowania i na zdania elementarne. Poznański i Wundheiler przyjmują powyższe prawa jako zdania o charakterze opisowym, a nie normatywnym. To jednak, iż powszechna zgoda podlega pewnym prawom, pozwala według nich stosować ją jako kryterium prawdy (1934, s. 129–130).

Poznański i Wundheiler rozważają potencjalne zarzuty przeciwko przyjęciu zgody powszechnej jako kryterium prawdy. Pierwszym z nich jest twierdzenie, iż zdarza się, że pewne zdanie uzyskuje powszechną zgodę, choć potem w miarę rozwoju nauki zdanie z nim sprzeczne jest uznane przez ogół, a więc w myśl tego kryterium, to ono jest prawdziwe. W odpowiedzi zwracają uwagę, iż naprawdę trudno przytoczyć przypadki zachwiania raz uzyskanej jednomyślności, gdy pamiętamy, że kryterium to stosujemy do zdań elementarnych, a nie do hipotez naukowych, takich jak kształt Ziemi czy prawa fizyki.

Drugim zarzutem byłaby możliwość uzyskania powszechnej zgody na zdanie fałszywe: nie jest przecież rzeczą wykluczoną, że „nawet w stosunku do zdania elementarnego – »wszyscy się mylą«” (1934, s. 132). Odpowiedź na ten zarzut sięga do samego pojęcia prawdy operacyjnej, które autorzy przyjmują za obowiązujące w fizyce. Uznają oni pojęcie prawdy absolutnej za „metodologicznie bezużyteczne” i twierdzą, że wykreślenie go ze słownika nie zmieni ani treści, ani wartości zdań fizyki. W zamian za to przyjmują, iż „prawdziwość zdań jest określona wprost przez metody weryfikacji” i prawdę zdefiniowaną przez procesy weryfikacyjne nazywają prawdą operacyjną, w analogii do operacyjnego poglądu na znaczenia pojęć fizyki, według którego „wielkość fizyczna jest określona przez zespół operacji pomiarowych, które prowadzą do przypisania wielkości pewnej określonej liczbowo wartości” (1934, s. 136). Zgodnie z tym poglądem na pojęcie prawdy, określenie „»zdanie jest prawdziwe«” znaczy operacyjnie tyle, co »zdanie jest zgodne z systemem, do którego należy«, albo »zdanie uzyskało powszechną zgodę«” (s. 136–137). Na tym gruncie nie bardzo wiadomo, co miałoby znaczyć, że zdanie takie jest fałszywe, skoro jedyny dostępny proces weryfikacyjny potwierdza nam prawdziwość tego zdania. A przyjęcie prawdy niezależnej od poznającego uniemożliwia nam wręcz wykrycie pomyłki, więc w praktyce tego typu prawdziwość pozostaje sprawą wiary i na terenie fizyki powyższy zarzut nie ma operacyjnego znaczenia.

Ostatnim zarzutem, a raczej wątpliwością rozważaną przez Poznańskiego i Wundheilera, jest pytanie o kryteria, jakimi należy się kierować przy wyborze lub ocenie samych praw zgody powszechnej. W odpowiedzi odwołują się do koherencyjnego kryterium prawdy, które dotyczy systemu rzeczywistości jako całości. Według nich, kryteria prawdy nie znajdują się poza tym systemem, ale do niego należą i podlegają ocenie na mocy zgodności tego systemu. Poznański i Wundheiler utrzymują, że „pozostajemy wewnątrz naszego systemu, nawet gdy mówimy o nim samym” (s. 134). I w tym miejscu znacznie odbiegają od Campbella, który nawet zdania logiki wykluczył z przedmiotu rozważań nauk szczegółowych.

Konsekwencją stanowiska operacyjnego w stosunku do pojęcia prawdy jest przyjęcie, że prawdziwość zdania zależy od systemu, do którego należy, a także od stanu wiedzy w danej

epoce; może się wobec tego zmienić wraz ze zmianą tego systemu lub stanu wiedzy. Prawda staje się cechą stopniowalną, ponieważ o ile dedukcja w całej pełni przenosi nam pewność co do zdań elementarnych na zdania z nich wydedukowane, to w procesie indukcji tracimy stopień pewności. Dodatkowo stanowisko to pozwala na współlistnienie dwu praw sprzecznych, gdyż możliwe jest współlistnienie dwu różnych systemów tłumaczących rzeczywistość. Poznański i Wundheiler przyjmują te konsekwencje i twierdzą, że „[p]rawda operacyjna dzieńczy tylko tę nieostrość i rozmytość, która jest charakterystyczna dla poznawanej przez nas rzeczywistości” (s. 142). Równocześnie zwracają jednak uwagę na to, że te „przykre” konsekwencje dotyczą przede wszystkich hipotez fizycznych, a tylko w niewielkim stopniu zdań elementarnych, do których stosujemy kryterium prawdy przez zgodę powszechną.

### 1.5. KONSENSUALNA TEORIA PRAWDY JÜRGENA HABERMASA

Jednym z niewielu filozofów, którzy oprócz stosowania konsensualnego kryterium prawdy byli zwolennikami konsensualnej teorii prawdy, jest Jürgen Habermas. Najpełniejszą wykładnię znajduje ta teoria w artykule zatytułowanym „Wahrheitstheorien” z 1973 roku, w którym Habermas przedstawia podstawowe założenia swojej teorii prawdy, opierającej się na logice dyskursu „wolnego od władztwa”. Według Habermasa, prawda jest cechą wypowiedzi, nie jest ona przy tym kwestią dowodu poprzez konfrontację z doświadczeniem, ale jest kwestią argumentacji (s. 218). Kwestia prawdziwości w ogóle nie powstaje wobec sądów dotyczących doświadczenia zewnętrznego, gdyż w tym doświadczeniu nie ma miejsca na błąd; możemy się mylić biorąc jedno doświadczenie za drugie, ale to da się w prosty sposób ustalić, powtarzając dane doświadczenia. Jeżeli już jednak czegoś doświadczyliśmy, to wraz z tym doświadczyliśmy pewności dotyczącej treści tego doświadczenia. Kwestia prawdziwości pojawia się wobec tego tylko tam, gdzie wątpliwości nie dotyczą doświadczenia zewnętrznego. Stąd to, czy dane zdanie jest prawdziwe, może być rozstrzygnięte jedynie na drodze dyskusji „wolnej od władztwa”, czyli takiej, w której każdy ma prawo do wypowiedzi i nie jest skrepowany żadnymi więzami, zarówno zewnętrznymi (jak na przykład obawa przed przełożonym czy świadome stosowanie pewnych strategii dyskusyjnych przez jej uczestników), jak i oporami wewnętrznymi. W takiej dyskusji zwyciężyć powinien jedynie „lepszy argument”. Wypowiedź jest prawdziwa, gdy wyraża konsensus osiągnięty w „rozmowie wolnej od władztwa”, ale tylko jeśli konsensus ten mógłby być osiągnięty podczas każdej innej dyskusji:

Mogę przypisać predykat przedmiotowi wtedy i tylko wtedy, gdy każdy inny człowiek, który mógłby podjąć ze mną dialog, przypisałby ten sam predykat temu samemu przedmiotowi. Po to, aby odróżnić zdania prawdziwe od fałszywych, odnoszę się do sądów innych ludzi – a tak właściwie to do sądów wszystkich innych ludzi, z którymi kiedykolwiek mógłbym prowadzić dialog (do których kontrfaktycznie zaliczam wszystkich tych partnerów dialogu, których mógłbym napotkać, gdyby moja historia życia pokrywała się z historią ludzkości). Warunkiem prawdziwości zdania jest potencjalna zgoda wszystkich pozostałych ludzi. (1973, s. 219)

Konsensualna teoria prawdy dotyczy zarówno prawdziwości zdań czy wypowiedzi, jak i poprawności norm i nakazów. O ile jednak kwestie prawdziwości zdań rozstrzygamy w dyskursie teoretycznym, o tyle normy i nakazy badamy pod względem ich poprawności w dyskursie praktycznym. Habermas krytykuje metafizyczne teorie prawdy za to, że stawiają kwestie prawdziwości za szeroko, oceniając pod tym względem nie tylko zdania, ale i nakazy, normy i oceny. Z kolei pragmatyczne teorie prawdy określają swój przedmiot za wąsko,

wyłaczając normy i nakazy całkowicie spod swoich rozważań. Konsensualna teoria prawdy znajduje się, według Habermasa, pośrodku, z jednej strony odróżniając prawdziwość zdań od poprawności norm, z drugiej jednak strony traktując obie te cechy jako przedmiot teorii prawdy ze względu na dyskursywny charakter, który dzielą.

Habermas poświęca wiele uwagi odróżnieniu konsensusu osiąganego w wyniku racjonalnego dyskursu, który to konsensus jedynie może być gwarantem prawdziwości, od zgody powszechnej osiągniętej w inny sposób. Dyskurs taki jest racjonalny, gdy opiera się tylko na zasadzie zwycięstwa lepszego argumentu z zachowaniem wszelkich zasad logiki teoretycznego dyskursu. Jak pisze Thomas McCarthy (1984, s. 299): „logika teoretycznego dyskursu jest analizą struktury i warunków tej formy komunikacji, w której hipotetyczne orzeczenia prawdziwości są dyskutowane i w wyniku tych dyskusji potwierdzone, zmienione lub odrzucone”. Jedną z zasad logiki teoretycznego dyskursu dotyczy charakteru związków pomiędzy poszczególnymi elementami tej dyskusji. Ponieważ argumentacja nie składa się według Habermasa z ciągu zdań, ale z aktów wypowiedzi, związki pomiędzy nimi nie mogą mieć ani czysto logicznego charakteru, ani nie mogą opierać się jedynie na doświadczeniu zewnętrznym. Tradycyjne modalności zastępuje on w logice dyskursu teoretycznego poprzez: niezgodność (*unstimmig*), która ma odpowiadać niemożliwości, zniewalający charakter wypowiedzi (*zwingend*) – zastępujący konieczność, i przekonujący charakter wypowiedzi (*triftig*) – zastępujący możliwość. Następną cechą racjonalnego konsensusu jest potencjalna możliwość przekonania do twierdzenia, które uzyskało status prawdziwego, każdej osoby, która tylko „podda się wymogom racjonalności” (McCarthy 1984, s. 307–308). Wszystkie osoby biorące udział w dyskusji muszą mieć ponadto taką samą szansę wypowiedzenia swojego zdania i kwestionowania twierdzeń wypowiedzianych przez innych, co ma gwarantować wzięcie pod uwagę wszystkich możliwych opcji, a jedynym motywem, jakim kierować się mają jej uczestnicy, powinno być wspólne poszukiwanie prawdy (Habermas 1975, s. 107–108).

Habermas zdaje sobie sprawę z tego, że taka sytuacja może w ogóle nie zaistnieć, twierdzi jednak, iż mimo wszystko nie jest ona jedynie czysto teoretycznym konstruktem – odgrywa rolę w dyskursie jako konieczne założenie, które przyjmujemy, aby taka dyskusja w ogóle miała sens (1973, s. 258–259). W dyskusji nie tylko poszczególne twierdzenia wypowiedziane przez uczestników mogą zostać zakwestionowane, ale i aparatura pojęciowa, w której ta dyskusja się odbywa; w samą strukturę dyskusji powinny zostać wbudowane mechanizmy pozwalające na odkrycie nieadekwatności tej aparatury pojęciowej, gdy taka okoliczność zajdzie. Możliwość ta ma uchronić racjonalny konsensus od relatywności (1973, s. 245–246). Konsensualna teoria prawdy Jürgena Habermasa sprowadza się do podania formalnych warunków, jakie musi spełniać dyskurs teoretyczny, aby konsensus w jego wyniku osiągnięty mógł zostać uznany za racjonalny, a tym samym służyć za gwarant prawdziwości zdań czy wypowiedzi.

## 1.6. METODY OSIĄGANIA KONSENSUSU WEDŁUG KEITHA LEHRERA I CARLA WAGNERA

Choć metodologia osiągania wspólnych wniosków przez grupy niekoniecznie zgadzających się ze sobą ekspertów czy innych uczestników dyskusji nie była w pracy Lehrera i Wagnera *Rational Consensus in Science and Society* z 1981 roku ani we wcześniejszych tekstach wiązana z pojęciem prawdy (patrz na przykład s. 7), to związek taki znajdujemy

w pracy Lehrera z roku 1987 pt: „Personal and social knowledge”, gdzie pisze on, że „subiektywne prawdopodobieństwa zbiegną się z konsensualnymi prawdopodobieństwami, a konsensualne prawdopodobieństwa zbiegną się z prawdą” (s. 87). Ponieważ właśnie powtarzane uprzedmiotowienie subiektywnych prawdopodobieństw jest, według Lehrera i Wagnera, jedyną racjonalną metodą na osiąganie zgody w spornych kwestiach, jej formalny opis może być potraktowany jako przedsięwzięcie konkurencyjne wobec powziętego w mojej pracy.

Lehrer i Wagner proponują metodę osiągania konsensusu w spornej kwestii, która polega na powtarzaniu korygowaniu swoich ocen, opierającym się na ocenach innych, przy czym korekta ta jest wprost proporcjonalna do szacunku, jakim darzymy te osoby. Z teoretycznego punktu widzenia uczestnicy dyskusji, po wstępnej wymianie informacji na temat kwestii spornej wyrażonej powiedzmy zdaniem  $q$ , przypisują temu zdaniu liczby, wyrażające ich subiektywne prawdopodobieństwo w odniesieniu do tego zdania. Oprócz tego w podobny sposób oceniają oni szacunek, jakim darzą pozostałych uczestników dyskusji. Liczby te są znormalizowane tak, aby sumowały się do jedynki, co pozwala zastosować do nich rachunek prawdopodobieństwa. Wzajemny szacunek uczestników dyskusji (nazywany wagami) dla grupy  $n$ -osobowej reprezentowany jest przez macierz  $n \times n$ , w której element  $w_{ij}$  odpowiada szacunkowi, jaki osoba  $i$  żywi wobec osoby  $j$ . Dane te są publicznie udostępniane, wobec czego, jak argumentują Lehrer i Wagner, osoba  $i$  jest racjonalnie zobowiązana do skorygowania swojej opinii na podstawie opinii osoby  $j$  w takim stopniu, w jakim darzy ją szacunkiem. Biorąc w ten sposób pod uwagę pozostałych, osoba  $i$  oblicza swoje nowe subiektywne prawdopodobieństwo według formuły:

$$p_i^1(q) = \sum_{j=1}^n w_{ij} p_j^0(q),$$

gdzie  $p_k^0(q)$  jest początkowym prawdopodobieństwem, jakie osoba  $k$  związała ze zdaniem  $q$ . Otrzymamy nowy rozkład prawdopodobieństwa i argumentacja, którą Lehrer i Wagner stosowali w poprzednim kroku, zachowuje swą ważność dla wykazania, że uczestnicy dyskusji znowu, pod wymogiem racjonalności, zobowiązani są do skorygowania swoich opinii w analogiczny sposób. Ogólnie, prawdopodobieństwo w  $n$ -tym kroku będzie opierało się, według podanego wzoru, na prawdopodobieństwie poprzednim. Jeżeli teraz założymy, że nawet jeśli nie wszyscy uczestnicy dyskusji darzą się wzajemnym szacunkiem, to pomiędzy dowolnymi dwoma osobami  $i$  i  $j$  istnieje „łańcuch szacunku”, zaczynający się na  $i$ , a kończący na  $j$ , taki że w tym łańcuchu każda osoba darzy szacunkiem następną, to okazuje się,<sup>2</sup> że gdyby taki proces korekcji przebiegał w nieskończoność, to wartości prawdopodobieństwa związane ze zdaniem  $q$  przez poszczególne osoby zbiegałyby się do konkretnej wartości  $p_c$ , którą autorzy nazwali konsensualnym prawdopodobieństwem. Konsensualne prawdopodobieństwo jest wobec tego średnią ważoną z indywidualnych rozkładów prawdopodobieństwa. To właśnie prawdopodobieństwo zostało w pracy z 1987 roku uznane przez Lehrera za zbiegające się z prawdą.

Metoda ta może być uznana za uogólnienie metody zaproponowanej przeze mnie w następnych rozdziałach w tym sensie, że głosowanie członków grupy za lub przeciw jakiemuś zdaniu mogłoby być tu reprezentowane przez przypisywanie temu zdaniu odpowiednio 1 lub 0 w skali prawdopodobieństwa. Aby osiągnąć ten sam skutek jak w modelach zaproponowanych w następnych rozdziałach, musielibyśmy zdefiniować kryterium prawdy w następujący sposób:

<sup>2</sup>Lehrer i Wagner udowodnili to w (1981).

zdanie  $p$  jest prawdziwe,  
gdy jego konsensualne prawdopodobieństwo jest większe od  $1/2$ .

Metoda Lehrera i Wagnera miałyby tę przewagę nad moją, że oprócz uwzględnienia skrajnych wartości prawdopodobieństwa pozwalałaby uczestnikom dyskusji na przyporządkowanie danemu zdaniu pośrednich stopni prawdopodobieństwa. Dodatkowo uwzględnienie wzajemnego szacunku, jakim otaczają się uczestnicy dyskusji, pozwala zarówno na zobrazowanie sytuacji, w której osoby o większym autorytecie mają większy wpływ na wynik dyskusji, jak i sytuacji, w których wszyscy traktowani są egalitarnie. Wszelako waga tej zalety słabnie, gdy uświadomimy sobie, że metoda ta ma niewielkie zastosowanie w analizie kryterium prawdy przez zgodę większości, gdyż da się w praktyce zastosować tylko w małych grupach: gdy osoby uczestniczące w dyskusji znają się wzajemnie i potrafią ocenić swoje kompetencje. W większości wypadków, w których w historii filozofii zgoda powszechna bądź zgoda większości rozpatrywana była jako kryterium prawdy, mieliśmy do czynienia z ogromnymi populacjami lub wręcz z całą ludzkością. Jeżeli więc chcemy, aby zaproponowana analiza obejmowała stanowiska reprezentowane w historii filozofii, to uwzględnianie informacji zakodowanej we wzajemnym szacunku, jakim otaczają się osoby, których zdanie bierzemy pod uwagę, traci na znaczeniu. Ponadto do formalnych i epistemologicznych zarzutów, jakie wobec metodologii Lehrera i Wagnera wysunęli liczni komentatorzy (por. choćby Nurmi 1985, Levi 1985 czy Baird 1985), dodam od siebie jeszcze dwa. Po pierwsze, metoda ta opiera się na rachunku prawdopodobieństwa, który, choć stosowany jako główne narzędzie w teorii decyzji, nie nadaje się, według mnie, do modelowania uznawania zdań przez podmioty ludzkie, ze względu na brak praktycznych metod ustalania liczbowej wartości subiektywnego prawdopodobieństwa, z jakim dana osoba uznaje dane zdanie.<sup>3</sup> Większość z nas przy próbie podania takich wartości ograniczyłaby się do trzech kwalifikacji: „tak”, „nie”, „nie wiem”, które, jak można przyjąć, odpowiadałyby prawdopodobieństwu równemu odpowiednio 1, 0 i  $1/2$ , choć w tym ostatnim wypadku nie jest to tak oczywiste. Na tych trzech kwalifikacjach opierają się modele, które przedstawię w dalszych rozdziałach pracy.

Właśnie z wątpliwościami co do możliwości reprezentowania niezdecydowania jako prawdopodobieństwa równego  $1/2$  związany jest mój drugi zarzut. Niezdecydowanie polega na tym, że nie wiemy, czy uznajemy dane zdanie czy nie, co jest zgodne zarówno z późniejszym jego uznaniem, jak i odrzuceniem. Metoda Lehrera i Wagnera nie zdaje wobec tego sprawy z niezdecydowania: uczestnicy dyskusji zobowiązani są do przypisania zdaniu  $p$ , którego dotyczy dyskusja, konkretnej wartości prawdopodobieństwa i osoby, które nie potrafią tego zrobić, po prostu są z niej wykluczane. Do pewnego stopnia wadę tę dzieli to ujęcie z pierwszym modelem, który opisuję w rozdziale 4., nazywam go modelem standardowym, w którym od każdego członka rozważanej grupy wymaga się, aby opowiedział się za lub przeciw zdaniu  $p$ . Dla mnie jest to powód do porzucenia modelu standardowego i zaproponowania analizy kryterium prawdy przez zgodę większości w terminach modeli częściowych. W kontekście metody Lehrera i Wagnera jest to natomiast bodziec, aby szukać innych dróg analizy kryterium, nie opierających się na ich konstrukcjach.

<sup>3</sup>Podstawową metodą, na jakiej opiera się teoria decyzji, jest badanie stopnia subiektywnego prawdopodobieństwa poprzez pytanie, jakie zakłady dana osoba jest skłonna przyjąć czy, inaczej mówiąc, ile zaryzykować, stawiając na dane zdanie. Nic wdając się tutaj w dłuższą dyskusję, chciałabym jedynie stwierdzić, że metoda ta działa tylko wobec osób, które w swoim życiu hazardem się parały, a większość równie niewiele wie o swojej gotowości do zakładów, jak o samym stopniu subiektywnego prawdopodobieństwa, który miałby być w ten sposób zbadany.



## 1.7. ZGODA POWSZECHNA A ZGODA WIĘKSZOŚCI

Jak wynika z powyższego przeglądu stanowisk, częściej mieliśmy o czynienia ze zgodą powszechną jako kryterium prawdy niż ze zgodą większości. Może się wobec tego nasunąć pytanie, dlaczego zajmuję się zgodą większości, skoro logiczna analiza jedynie zgody powszechnej byłaby nieporównywalnie prostsza. Po pierwsze, w moim ujęciu zgoda powszechna jest szczególnym przypadkiem zgody większości, więc analiza zgody większości jest tym samym analizą zgody powszechnej; jak mogłabym powtórzyć za Arystotelesem „zgodnie z opinią powszechną» to te przekonania, które są uznawane albo przez wszystkich, albo przez wielu” (*Topiki* 100b 21). Po drugie, w praktyce w prawie żadnym z tych przypadków nie mieliśmy do czynienia z wymogiem zgody powszechnej bez zastrzeżeń, zgody absolutnie wszystkich członków danej populacji. Zastrzeżenia zaś prowadziły do tego, że tylko część osób liczyła się do tej zgody. Miały te zastrzeżenia przeróżny charakter i ich weryfikacja stawała się często trudniejsza od weryfikacji samego zdania, o którego prawdziwość nam chodziło (por. Poznański i Wundheiler 1934, s. 105). Mamy więc do wyboru dwie drogi. Możemy przyjąć zastrzeżenia i, o ile to się uda, wydzielić grupę ekspertów, a następnie wymagać od nich pełnej zgody. Sprowadza się to do zacieśnienia rozważanej populacji. Możemy uznać, że grupa ekspertów jest trudna do wydzielenia i po prostu bierzemy pod uwagę tylko proste i obiektywne kwalifikacje, a następnie wymagamy zgody większości. Aparatura, którą proponuję, pozwala rozpatrywać oba te warianty.



## UZNAWANIE ZDAŃ

W rozdziale tym przedstawię sposób powiązania zdań z języka naturalnego, mówiących o uznawaniu z formułami języków formalnych, aby w rozdziałach następnych zdefiniować w tych językach kryterium prawdy przez zgodę większości. Jak już pisałam, nie zamierzam się zajmować kwestią motywacji czy mechanizmów, które decydują o tym, że ludzie uznają poszczególne zdania atomowe, takie jak na przykład „to jest piękne”, co sprowadza się do tego, że pozostawiam bez analizy zwrot „osoba  $x$  uznaje zdanie  $p$ ” (symbolicznie  $U(p, x)$ ) w przypadku, gdy  $p$  jest zdaniem atomowym. Jego znaczenie przyjmuję za intuicyjnie oczywiste. Zaproponuję natomiast interpretację tego typu zdań w językach kolejno  $L^*(M)$ ,  $L^*(M^2)$ ,  $L^{**}(M^2)$  i  $L_{\omega_1 \omega}^{**}$ <sup>1</sup> i modelach dla tych języków. Interpretacja ta pokaże, jak ze znajomości „rozkładu” uznawania dla zdań atomowych, wnioskować o uznaniu zdań złożonych przez większość członków jakiejś populacji. Model, który zaproponuję, będzie zdawał relację z „większością”, która pojawiła się w ostatnim zwrocie, za pomocą kwantyfikatora większości, natomiast uznawaniu zdań atomowych odpowiadały będą wyróżnione predykaty jednoargumentowe  $A_1, A_2, \dots$ . Zamierzoną interpretacją predykatu  $A_1$  będzie zbiór osób uznających zdanie  $p_1$ , a formuła  $A_1(x)$  kodowała będzie zdanie „osoba  $x$  uznaje zdanie  $p_1$ ”. Poniżej przedstawię dokładną definicję języka  $L^*(M)$ , dla którego modele opisane zostaną w rozdziale 4., aby na jego przykładzie pokazać działanie funkcji  $T$ , tłumaczącej zdania o uznawaniu z języka naturalnego na dowolny język formalny  $\mathcal{L}$ , o którym zakładamy tylko tyle, że zawiera on wyróżnione symbole predykatywne  $A_1, A_2, \dots$  i funktory zdaniowe  $\wedge, \vee$  oraz  $\neg$ . Te ostatnie symbole mogą występować w języku jako symbole pierwotne bądź zdefiniowane.

### 2.1. JĘZYK $L^*(M)$

#### DEFINICJA 2.1. (język $L^*(M)$ )

Język  $L^*(M)$  składa się z następujących wyrażeń:

##### 1. Symbole logiczne:

- (a) funktory zdaniowe:  $\vee, \wedge, \neg$ ;

<sup>1</sup>Symbol  $L(Q)$  oznacza logikę, bądź język logiki, która powstaje poprzez dodanie dodatkowego symbolu logicznego do języka logiki elementarnej. Tak więc na przykład język  $L(M)$  będzie językiem logiki elementarnej z dodatkowym kwantyfikatorem  $M$  – kwantyfikatorem większości. Gwiazdka przy  $L$  w rozważanych tu językach służy podkreśleniu dodatkowej różnicy: wszystkie te języki zawierają zbiory wyróżnionych symboli predykatywnych, jak na przykład symboli  $A_1, A_2, \dots$ , o których piszę poniżej. W standardowych oraz częściowych modelach, których definicje zostaną podane w następnych rozdziałach, interpretacja tych symboli niczym nie różni się od interpretacji innych symboli predykatywnych, ale już w modelach semiczęściowych będzie inaczej (patrz rozdział 5.2.1.).

- (b) przeliczalny zbiór zmiennych indywidualowych  $V$ ; dowolne elementy tego zbioru oznaczamy za pomocą symboli:  $x, y, z, x_1, x_2, \dots$ ;
- (c) symbole kwantyfikatorowe:  $M, \forall, \exists$ ;
- (d) symbol identyczności:  $=$ .

2. Symbole pozalogiczne:

- (a) dla każdego  $n = 1, 2, \dots$  zbiór (niekoniecznie niepusty)  $n$ -argumentowych symboli relacyjnych  $P^n$ ; dowolne elementy tych zbiorów oznaczamy za pomocą symboli  $P, R, S, P_1, P_2, \dots$ ;<sup>2</sup> jednoargumentowe symbole relacyjne nazywamy symbolami predykatywnymi lub po prostu predykatami;
- (b) zbiór wyróżnionych symboli predykatywnych  $A_1, A_2, \dots$

3. Nawiasy:  $(, )$ . □

DEFINICJA 2.2. (formuła  $L^*(M)$ )

R1. (a) Jeżeli  $R$  jest na  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, a  $x_1, \dots, x_n$  są zmiennymi, to  $R(x_1, \dots, x_n)$  jest formułą.<sup>3</sup>

(b) Jeżeli  $A_i$  jest wyróżnionym symbolem predykatywnym, a  $x$  zmienną, to  $A_i(x)$  jest formułą.

R2. Jeżeli  $x_1$  i  $x_2$  są zmiennymi, to  $(x_1 = x_2)$  jest formułą.

R3. Jeżeli  $\varphi$  jest formułą, a  $x$  zmienną, to  $\exists x \varphi, \forall x \varphi$  oraz  $Mx \varphi$  są formułami.

R4. Jeżeli  $\varphi, \psi$  są formułami, to  $\neg \varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi)$  też są formułami.

Jedynie wyrażenia zbudowane za pomocą kroków R1.–R4. są formułami  $L^*(M)$ . □

Formuły zbudowane za pomocą kroków R1. lub R2. nazywamy *formułami atomowymi*. Zewnętrzne nawiasy pomijamy tam, gdzie nie ma obawy wieloznaczności. Poprzez  $\text{FOR}_{L^*(M)}$  będą oznaczała zbiór formuł  $L^*(M)$ .

DEFINICJA 2.3. (implikacja w  $L^*(M)$ )

Jeżeli  $\varphi, \psi$  są formułami, to

$$(\varphi \rightarrow \psi) \stackrel{\text{df}}{=} (\neg \varphi \vee \psi). \quad \square$$

DEFINICJA 2.4. (zmienna wolna w  $L^*(M)$ )

Zbiór zmiennych wolnych formuły  $\varphi \in \text{FOR}_{L^*(M)}$ ,  $ZW(\varphi)$ , definiujemy w następujący sposób:

<sup>2</sup>Ze względu na przejrzystość nie przyjmuję specjalnego oznaczenia dla argumentowości symboli relacyjnych, gdyż albo nie będzie ona odgrywała roli, albo będzie określona przez kontekst.

<sup>3</sup>Definicja ta odnosi się do symboli języka  $L^*(M)$ , jest więc sformułowana w metajęzyku i powinnam używać metasymboli dla oznaczenia dowolnego symbolu relacyjnego czy dowolnej zmiennej. Aby nie przeładowywać symboliki, gdyż i tak wprowadzę dużo nowych symboli, pozwalam sobie na tę nieścisłość, że w przypadku symboli relacyjnych i zmiennych te same litery używane będą w języku i metajęzyku. Mam nadzieję, że w każdym wypadku kontekst pozwoli uniknąć nieporozumień.

1. jeżeli  $\varphi$  jest formułą atomową, to  $ZW(\varphi)$  jest zbiorem zmiennych występujących w  $\varphi$ ;
2.  $ZW(\neg\varphi) = ZW(\varphi)$ ;
3.  $ZW(\varphi \wedge \psi) = ZW(\varphi \vee \psi) = ZW(\varphi) \cup ZW(\psi)$ ;
4.  $ZW(\exists x\varphi) = ZW(\forall x\varphi) = ZW(Mx\varphi) = ZW(\varphi) \setminus \{x\}$ . □

Za pomocą symbolu  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  będę oznaczać formuły, których  $x_1, \dots, x_n$  są jedynymi zmiennymi wolnymi.

DEFINICJA 2.5. (zdanie  $L^*(M)$ )

Zdaniem języka  $L^*(M)$  nazywamy formułę  $L^*(M)$  bez zmiennych wolnych. □

Poprzez  $ZD_{L^*(M)}$  będę oznaczała zbiór zdań  $L^*(M)$ .

## 2.2. FUNKCJA T TŁUMACZĄCA ZDANIA O UZNAWANIU Z JĘZYKA NATURALNEGO NA JĘZYK FORMALNY

Wiemy już, jak tłumaczyć zdania o uznawaniu zdań atomowych z języka naturalnego na zdania języka  $L^*(M)$ , pozostaje pokazać, jak tłumaczyć zdania o uznawaniu zdań złożonych. Będziemy wtedy mogli sformułować warunek kryterium prawdy przez zgodę większości w języku  $L^*(M)$ . Zdaniu „większość  $x$ -ów uznaje zdanie  $\alpha$ ”, gdzie  $\alpha$  to dowolne zdanie (symbolicznie: **Większość  $x$ -ów  $U(\alpha, x)$** ) będzie odpowiadało w języku  $L^*(M)$  zdanie  $Mx\varphi$ , gdzie  $\varphi = T(U(\alpha, x))$ , a  $T$  jest funkcją tłumaczącą zdania o uznawaniu z języka naturalnego na język  $L^*(M)$ . Zgodnie z rozważanym kryterium prawdziwość zdania  $\alpha$  jest zrelatywizowana do rozważanej populacji  $m$ , czemu będzie odpowiadało zrelatywizowanie do modelu, nazwijmy go modelem  $\mathfrak{M}$ . Zdanie  $\alpha$  będzie wobec tego prawdziwe, gdy zdanie  $Mx\varphi$  będzie spełnione w modelu  $\mathfrak{M}$ . Przedstawię poniżej definicję funkcji  $T$  w ogólnej postaci, ale w przykładach za  $\mathcal{L}$  podstawimy  $L^*(M)$ .

Dla oznaczenia zdań atomowych z języka naturalnego używać będę symboli  $p_1, p_2, \dots$  (lub mniej formalnie  $p, q, r, \dots$ );  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  odpowiadały będą dowolnym zdaniom z języka naturalnego;  $x, y, z, x_1, x_2, \dots$  symbolizowały będą dowolne osoby spośród tych, których uznawanie badamy, a dwuargumentowy symbol relacyjny  $U(\alpha, x)$  posłuży jako skrót dla: „Osoba  $x$  uznaje zdanie  $\alpha$ ”.

DEFINICJA 2.6. (funkcja tłumacząca zdania o uznawaniu na język  $\mathcal{L}$ )

$$T(U(p_i, x)) = A_i(x)$$

$$T(U(\text{nie } \alpha, x)) = \neg T(U(\alpha, x))$$

$$T(U(\alpha \text{ lub } \beta, x)) = T(U(\alpha, x)) \vee T(U(\beta, x))$$

$$T(U(\alpha \text{ i } \beta, x)) = T(U(\alpha, x)) \wedge T(U(\beta, x))$$

$$T(U(\text{jeżeli } \alpha, \text{ to } \beta, x)) = \neg T(U(\alpha, x)) \vee T(U(\beta, x))$$

□

Przyjrzyjmy się tej funkcji dla  $\mathcal{L} = L^*(M)$ . W zamierzonych modelach języka  $L^*(M)$  przedmiotami indywidualnymi będą ludzie, członkowie różnych populacji. Każdemu zdaniu atomowemu  $p_i$  odpowiadał będzie predykat  $A_i$ , pod który podpadać będą wszystkie te i tylko te osoby, które uznają zdanie  $p_i$ .

Jak taka definicja działa? Chcemy spytać o to, czy większość ludzi uzna zdanie:

$\alpha =$  „Jeżeli jutro będzie świeciło słońce lub chociaż nie będzie padało, to wielu mieszkańców wyjedzie z Krakowa”.

Przypisując zdaniom atomowym zmienne  $p, q$  i  $r$  stwierdzamy, że zdanie

$\alpha =$  jeżeli  $p$  lub nie  $q$ , to  $r$

jest prawdziwe wtedy, gdy zdanie  $Mx\phi$ , gdzie  $\phi = T(U(\text{jeżeli } p \text{ lub nie } q, \text{ to } r, x))$  jest spełnione w modelu  $\mathfrak{M}$ . W tym wypadku

$$\begin{aligned} T(U(\text{jeżeli } p \text{ lub nie } q, \text{ to } r, x)) &= \neg T(U(p \text{ lub nie } q, x)) \vee T(U(r, x)) = \\ &= \neg(T(U(p, x)) \vee T(U(\text{nie } q, x))) \vee A_3(x) = \neg(A_1(x) \vee \neg A_2(x)) \vee A_3(x),^4 \end{aligned}$$

czyli zdanie  $\alpha$  będzie prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie  $Mx(\neg(A_1(x) \vee \neg A_2(x)) \vee A_3(x))$  będzie spełnione w modelu  $\mathfrak{M}$ . Chcemy ponadto, aby taka funkcja była bijekcją, to znaczy, abyśmy mogli zdania z języka  $L^*(M)$  traktować jako jednoznacznie odpowiadające zdaniom z języka naturalnego, przy założeniu, że interpretujemy język  $L^*(M)$  w modelu, którego uniwersum stanowią ludzie. I jest tak, ale tylko wtedy, gdy ograniczymy symbole języka  $L^*(M)$  do symboli wyróżnionych  $A_1, A_2, \dots$  i spójników zdaniowych. Ale o to nam właśnie chodzi w powyższym tłumaczeniu.

### 2.3. UZNAWANIE A ODRZUCANIE

Następną kwestią, wartą poruszenia już na wstępie, jest rozróżnienie dwu postaw epistemicznych *uznawania* i *odrzućcia*. W modelu standardowym (rozdział 4.1.) przyjmujemy, podobnie jak robi to na przykład Patryas (1987), że jedynie uznawanie jest właściwą postawą epistemiczną, a odrzucanie jest tylko brakiem uznawania. Takie rozwiązania poniekąd wymusza na nas model standardowy (choć nie do końca, patrz rozdział 5.5.). Prowadzi ono jednak do nieintuicyjnych wniosków. Gdy osoba  $x$  nie pomyślała o zdaniu  $p$ , a więc go nie uznała, to zalicza się do „nie uznających” zdania  $p$ . Gdy teraz rozważymy kwestię prawdziwości zdania  $q$ , którego nikt nie uznaje, tylko dlatego, że nikt się nad nim nie zastanawiał, to według kryterium prawdy przez zgodę większości okaże się ono fałszywe. Jeżeli chcemy, aby kryterium to spełniało wymóg równoważności fałszu i negacji prawdy – zdanie  $\alpha$  jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy jego negacja jest prawdziwa – to okazuje się, że prawdziwym zgodnie z kryterium jest zdanie *nie*  $q$ , nawet gdy nikt go nie rozważał, więc trudno na tej podstawie mówić o uznaniu przez większość. Piszę o tym w rozdziale 4.1. W rozdziale 4.2. odróżnimy uznawanie i odrzucanie jako dwie różne postawy epistemiczne, a oprócz wątpliwości, o których pisałam powyżej, motywowane będzie to chęcią zdania sprawy z sytuacji, w której osoba  $x$  ani nie uznaje, ani nie odrzuca zdania  $p$ , czyli jest wobec tego zdania niezdecydowana. Przy tym odróżnieniu pozostaniemy też w dalszych rozdziałach.

<sup>4</sup>Chociaż formalnie rzecz biorąc to zmiennym  $p_1, p_2, \dots$  przyporządkowane są odpowiednio predykaty  $A_1, A_2, \dots$ , to często w przykładach, dla przejrzystości wywodu, używać będę symboli  $p, q, r, \dots$ . Przyjmujemy wobec tego, że kolejność alfabetyczna odpowiada liczbowej i  $A_1$  odpowiada  $p$ ,  $A_2 - q$  itd. Inaczej mówiąc,  $p$  jest tylko skrótem dla  $p_1$ ,  $q$  dla  $p_2$  itd.

Na konieczność odróżnienia tych dwu postaw epistemicznych, na gruncie polskim zwracali uwagę na przykład przedstawiciele Szkoły Lwowsko-Warszawskiej. Ajdukiewicz w odniesieniu do sądów w sensie psychologicznym pisze:

„X odrzuca zdanie Z” to nie to samo, co: „X uznaje negację zdania Z”. Odrzucanie jest inną postawą asertywną niż uznawanie. Różnica pomiędzy odrzucaniem zdania Z a uznawaniem zdania Z nie polega na tym, że względem czegoś innego (tj. raz względem zdania Z, a raz względem jego negacji) zajmujemy tę samą (mianowicie pozytywną) postawę asertywną. Różnica między uznawaniem zdania Z a odrzucaniem zdania Z polega na tym, że względem tego samego zdania Z zajmujemy raz postawę pozytywną, a raz negatywną. [...] momenty asercji zawarte są tylko w psychologicznym procesie sądzenia, nie zaś w jego treści. (Ajdukiewicz 1985, s. 148–149)

Podobnie Jan Łukasiewicz w pracy „O sylogistyce Arystotelesa” wprowadził obok tradycyjnych reguł i aksjomatów, aksjomaty i reguły odrzucania (1961, s. 225–226), a ogólną definicję zdania odrzuconego podał Jerzy Słupecki w (1959). Prace Łukasiewicza i Słupeckiego stały się podstawą badań konsekwencji odrzuceniowych (Bryll 1996, Słupecki *et al.* 1971, 1972, Spasowski 1983, Wójcicki 1973, Wybraniec-Skardowska 1969) i wykorzystania tych konsekwencji w analizie filozoficznej (Woleński 1992, 1993, 1994).

Zanim przejdę w rozdziale 4. do pokazania, od czego zależy prawdziwość zdań, takich jak  $Mx(\neg(A_1(x) \vee \neg A_2(x)) \vee A_3(x))$ , w modelu  $\mathfrak{M}$ , zbudowanym w aparaturze kwantyfikatorów uogólnionych, w następnym rozdziale wprowadzę potrzebne pojęcia i twierdzenia.





## KWANTYFIKATORY UOGÓLNIONE – PODSTAWOWE POJĘCIA I TWIERDZENIA

Pojęcie kwantyfikatorów uogólnionych pojawiło się po raz pierwszy w pracy Andrzeja Mostowskiego „On a generalization of quantifiers” z 1957 roku, gdzie zauważył on, że nie wszystkie matematycznie interesujące kwantyfikatory dają się zdefiniować za pomocą standardowych kwantyfikatorów  $\forall$  i  $\exists$ . Praca ta zapoczątkowała badania nad kwantyfikatorami uogólnionymi najpierw w zastosowaniu do kwantyfikatorów interesujących z punktu widzenia matematyki (Barwise 1978, Gurevich 1990), a potem w badaniach nad semantyką języka naturalnego (Barwise i Cooper 1981, van Benthem 1984a, van Benthem i ter Meulen 1985, van Benthem 1986a, Cooper 1983, van der Does i van Eijck 1996, Keenan i Stavi 1986, Westerståhl 1984). Zgodnie z propozycją Mostowskiego kwantyfikatory interpretowane są przez rodziny podzbiorów uniwersum modelu. Są one uogólnione w tym sensie, że ich przypadkami szczególnymi są kwantyfikator ogólny, który interpretujemy jako jednoelementową rodzinę składającą się z całego uniwersum, i kwantyfikator szczegółowy, który interpretujemy jako rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów uniwersum modelu. Kwantyfikatorami w tym znaczeniu mogą być dowolne rodziny podzbiorów uniwersum modelu (jak na przykład rodzina skończonych podzbiorów, będąca interpretacją kwantyfikatora **istnieje skończenie wiele**) spełniające warunek niezmienniczości względem bijekcji: jeżeli  $f : E \rightarrow E'$  jest bijekcją z uniwersum  $E$  do  $E'$ , a  $A \subseteq E$ , to  $A$  należy do interpretacji kwantyfikatora  $Q$  w modelu o uniwersum  $E$  (symbolicznie  $Q_E A$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy  $Q_{E'} f(A)$  (patrz definicja 3.1.).

W „First order predicate logic with generalized quantifiers” z 1966 roku Per Lindström uogólnił definicję Mostowskiego tak, aby ujmowała ona kwantyfikatory takie, jak na przykład **więcej ... niż ...**. Definicja Lindströma jako przypadek szczególny definiuje kwantyfikatory Mostowskiego. Jest ona równoważna następującej:<sup>1</sup>

DEFINICJA 3.1. (kwantyfikatory uogólnione)

Dla dowolnych liczb naturalnych  $n_1, \dots, n_k$   $Q$  nazywamy *globalnym kwantyfikatorem uogólnionym* typu  $\langle n_1, \dots, n_k \rangle$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$Q$  jest funktorem przyporządkowującym dowolnemu niepustemu zbiorowi  $X$ ,  $k$ -argumentową relację  $Q_X$  zachodzącą pomiędzy relacjami na  $X$ , nazywaną *lokalnym kwantyfikatorem uogólnionym* typu  $\langle n_1, \dots, n_k \rangle$ , taką, że

jeśli  $\langle R_1, \dots, R_k \rangle \in Q_X$ , to  $R_i$  jest  $n_i$ -argumentową relacją na  $X$ , dla  $i = 1, \dots, k$ .

<sup>1</sup>Por. Mostowski M. (1994), Krynicki i Mostowski (1995).

Ponadto  $Q$  musi być zachowany przez bijekcje w następującym sensie:

jeśli  $f: X \rightarrow Y$  jest bijekcją, to:  $\langle R_1, \dots, R_k \rangle \in \mathcal{Q}_X$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle fR_1, \dots, fR_k \rangle \in \mathcal{Q}_Y$ , dla dowolnych relacji  $R_1, \dots, R_k$  na  $X$ ,

gdzie  $fR_i = \{ \langle f(x_1), \dots, f(x_{n_i}) \rangle : \langle x_1, \dots, x_{n_i} \rangle \in R_i \}$ , dla  $R_i \subseteq X^{n_i}$  i  $i = 1, \dots, k$ .  $\square$

Syntaktycznie, kwantyfikator  $Q$  typu  $\langle n_1, \dots, n_k \rangle$  wiąże  $m = n_1 + \dots + n_k$  zmiennych pierwszego rzędu i  $k$  formuł. Definicja spełniania zostaje rozszerzona o następujący krok indukcyjny: jeżeli  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$  są ciągami różnych zmiennych o długości odpowiednio  $n_1, \dots, n_k$ , a  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  są formułami, to

$$\mathfrak{M} \models Q\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k (\varphi_1, \dots, \varphi_k) [v] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \langle G_1, \dots, G_k \rangle \in \mathcal{Q}_{U(\mathfrak{M})},$$

gdzie  $G_i$  jest relacją zdefiniowaną przez formułę  $\varphi_i$  w  $\mathfrak{M}$ , przy wartościowaniu  $v$  względem zmiennych zawartych w ciągu  $\bar{x}_i$ , a  $U(\mathfrak{M})$  jest uniwersum modelu  $\mathfrak{M}$ .

Odtąd mówiąc o kwantyfikatorach uogólnionych będą miała na myśli kwantyfikatory Lindströma w sensie zdefiniowanym przez ostatnią definicję. Ta właśnie definicja jest współcześnie używana dla zdefiniowania terminu „kwantyfikator uogólniony” (por. Mostowski 1994, s. 230).<sup>2</sup> Przykładami kwantyfikatorów uogólnionych są następujące kwantyfikatory:

- (i) **istnieje:**  $\exists_X = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset\}$ ,
- (ii) **dla każdego:**  $\forall_X = \{X\}$ ,
- (iii) **wszystkie ... są ...:**  $\forall_X^2 = \{ \langle A, B \rangle \in \wp(X) \times \wp(X) : A \subseteq B \}$ , gdzie  $\wp(X)$  oznacza zbiór potęgowy zbioru  $X$ ,
- (iv) **większość:**  $M_X = \{A \subseteq X : |A| > |X \setminus A|\}$ , gdzie  $|A|$  oznacza moc zbioru  $A$ ,
- (v) **większość ... jest ...:**  $M_X^2 = \{ \langle A, B \rangle \in \wp(X) \times \wp(X) : |A \cap B| > |A \setminus B|\}$ .

Tylko kwantyfikatory (i), (ii) i (iv) są kwantyfikatorami w sensie Mostowskiego.

Kwantyfikatory, dla których  $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$  nazywamy *kwantyfikatorami monadycznymi*. Ich interpretacjami są relacje pomiędzy podzbiarami uniwersum. Spośród kwantyfikatorów monadycznych w dalszej części pracy interesować nas będą kwantyfikatory typu  $\langle 1 \rangle$ , które nazywać będziemy *kwantyfikatorami unarnymi*, oraz kwantyfikatory typu  $\langle 1, 1 \rangle$ , które nazywać będziemy *kwantyfikatorami binarnymi*. Kwantyfikatory duży i mały są według tej konwencji kwantyfikatorami unarnymi. Podobnie też, jak to jest w tradycyjnej semantyce,  $\forall x \varphi$  jest spełnione w modelu wtedy i tylko wtedy, gdy  $\neg \exists x \neg \varphi$  jest spełnione. Ogólnie rzecz biorąc kwantyfikatory monadyczne, które stoją do siebie w takiej relacji, nazywać będziemy *kwantyfikatorami dualnymi*:

<sup>2</sup>Jak pokazały dalsze badania, także definicja Lindströma nie jest wystarczająco ogólna w tym sensie, że nie obejmuje wielu kwantyfikatorów interesujących z punktu widzenia matematyki i języka naturalnego. Ciekawą próbą jej uogólnienia jest praca Mostowskiego i Krynckiego pt.: „Ambiguous quantifiers” (1999). Do propozycji tej wróć w rozdziale 6.1. Z punktu widzenia analizy kryterium prawdy przez zgodę większości definicja Lindströma jest jednak wystarczająco ogólna i dlatego przy niej pozostanę.

## DEFINICJA 3.2. (kwantyfikatory dualne)

Kwentyfikator  $\check{Q}$  nazywamy *kwantyfikatorem dualnym* monadycznego kwantyfikatora  $n$ -arnego  $Q$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych formuł  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \psi$ , każdego modelu  $\mathfrak{M}$  i wartościowania  $v$ :<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models \check{Q}x_1 \dots x_n (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \psi) [v] \\ \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \\ \mathfrak{M} \models \neg Qx_1 \dots x_n (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \neg\psi) [v]. \quad \square \end{aligned}$$

Termin *kwantyfikator* używany jest w literaturze przedmiotu w co najmniej dwu znaczeniach: po pierwsze – jako symbol kwantyfikatora w języku i wtedy o jego odpowiedniku semantycznym mówi się jako o interpretacji kwantyfikatora (van Eijck 1996), po drugie – kwantyfikatorem nazywa się relację zachodzącą pomiędzy relacjami na danym zbiorze (powyżej zdefiniowany lokalny kwantyfikator uogólniony), czyli interpretację semantyczną, gdy zbiór ten jest uniwersum modelu, a językowe byty nazywa się symbolami kwantyfikatorowymi (Doets 1991, Westerståhl 1995). Najczęściej jednak, o ile z kontekstu wynika o co chodzi, używa się terminu *kwantyfikator* w obu znaczeniach i tak też będzie tutaj. Podobnie symbole kwantyfikatorowe, takie jak  $\forall, \exists$  czy  $M$ , występować będą w obu rolach, o ile nie zajdzie obawa nieporozumienia.

## 3.1. KWANTYFIKATORY UOGÓLNIONE W ANALIZIE JĘZYKA NATURALNEGO

Aparatura kwantyfikatorów uogólnionych zrobiła dużą karierę w filozoficznej analizie języka naturalnego, gdy okazało się, dzięki pracom takim jak Barwise i Cooper (1981) czy Keenan i Stavi (1986), iż można w niej zapisać symbolicznie zdania z języka naturalnego w taki sposób, że struktura zdań języka formalnego odpowiada strukturze zdań wyjściowych, czego, jak wiadomo, nie udało się uzyskać w standardowej logice pierwszego rzędu. Na przykład zdanie

(1) Wszyscy chłopcy lubią grać w piłkę,

które w klasycznym rachunku predykatów zapisywane jest za pomocą zdania

(2)  $\forall x (C(x) \rightarrow P(x))$ ,

otrzymuje interpretację za pomocą kwantyfikatora  $\forall^2$

(3)  $\forall^2 x x (C(x), P(x))$ .

Zdanie (3) jest bliższe strukturze zdania (1), gdyż w przeciwieństwie do (2) nie zawiera spójników, które nie pojawiają się w (1), czyli tutaj  $\rightarrow$ .

Dodatkowo aparatura kwantyfikatorów uogólnionych pozwala na formalną interpretację wyrażeń takich jak **wielu** czy **większość**, które opierają się analizie poprzez kwantyfikatory  $\forall$  i  $\exists$ . Tego typu wyrażenia, a w niektórych ujęciach (Barwise i Cooper 1981) nawet zaimki

<sup>3</sup>Zazwyczaj dualność kwantyfikatorów definiuje się bez odwoływania się do modeli (por. Flum 1985, czy Westerståhl 1989), choć Barwise (1978) jest tu wyjątkiem. W przypadku modeli standardowych sformułowanie tutaj podane jest z tymi definicjami równoważne, ale w przeciwieństwie do nich stosuje się także do modeli częściowych, które rozważamy w rozdziałach 4.–7.

wskazujące i imiona własne, zostały zinterpretowane jako kwantyfikatory.<sup>4</sup> Ta linia analizy języka naturalnego jest w znacznym stopniu rozwinięciem idei zawartych w semantycznych pracach R. Montague (por. Barwise i Cooper 1981, s. 160).

Ponieważ skupiam się na kwantyfikatorze większości, który może być interpretowany jako kwantyfikator typu  $\langle 1 \rangle$  bądź  $\langle 1, 1 \rangle$  (por. rozdział 3.2.), oraz standardowych kwantyfikatorach, które również w tych kategoriach się mieszczą, więc dla przejrzystości wyводу wszystkie pojęcia definiowane w dalszej części pracy nie będą definiowane w całej ogólności, ale w ograniczeniu do tych szczególnych przypadków. Powyższa definicja kwantyfikatorów uogólnionych przybierze prostszą postać:

#### DEFINICJA 3.3. (kwantyfikatory uogólnione typu $\langle 1 \rangle$ )

Kwantyfikator  $Q$  nazywamy *globalnym kwantyfikatorem uogólnionym typu  $\langle 1 \rangle$*

wtedy i tylko wtedy, gdy

$Q$  jest funktorem przyporządkowującym dowolnemu niepustemu zbiorowi  $X$ , rodzinę  $Q_X$  podzbiorów zbioru  $X$ , nazywaną *lokalnym kwantyfikatorem uogólnionym typu  $\langle 1 \rangle$* . Ponadto  $Q$  musi być zachowany przez bijekcje w następującym sensie:

jeśli  $f : X \rightarrow Y$  jest bijekcją, to:  $B \in Q_X$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $fB \in Q_Y$ , dla dowolnego  $B \subseteq X$ , gdzie  $fB = \{f(x) : x \in B\}$ .  $\square$

Syntaktycznie, kwantyfikator  $Q$  typu  $\langle 1 \rangle$  wiąże jedną zmienną pierwszego rzędu i jedną formułę.

#### DEFINICJA 3.4. (kwantyfikatory uogólnione typu $\langle 1, 1 \rangle$ )

Kwantyfikator  $Q$  nazywamy *globalnym kwantyfikatorem uogólnionym typu  $\langle 1, 1 \rangle$*

wtedy i tylko wtedy, gdy

$Q$  jest funktorem przyporządkowującym dowolnemu niepustemu zbiorowi  $X$ , 2-argumentową relację  $Q_X$ , zachodzącą pomiędzy podzbiórami zbioru  $X$ , nazywaną *lokalnym kwantyfikatorem uogólnionym typu  $\langle 1, 1 \rangle$* . Ponadto  $Q$  musi być zachowany przez bijekcje w następującym sensie:

jeśli  $f : X \rightarrow Y$  jest bijekcją, to:  $\langle A, B \rangle \in Q_X$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle fA, fB \rangle \in Q_Y$ , dla dowolnych  $A, B$ , podzbiorów zbioru  $X$ , gdzie  $fA = \{f(x) : x \in A\}$ ,  $fB = \{f(x) : x \in B\}$ .  $\square$

Syntaktycznie, kwantyfikator  $Q$  typu  $\langle 1, 1 \rangle$  wiąże dwie zmienne pierwszego rzędu i dwie formuły.

Rozwój badań nad kwantyfikatorami uogólnionymi przebiegał, z grubsza rzecz biorąc, w dwu nurtach. Badacze pierwszego z nich przyjęli perspektywę lokalną i ograniczając uwagę do jednego modelu, a więc jednego zbioru, który jest uniwersum tego modelu, skupili

<sup>4</sup>Dokładnie rzecz biorąc, Barwise i Cooper (1981) odróżniają kwantyfikatory takie jak dla każdego od określników (*determiners*), do których zaliczają na przykład kwantyfikator większości użyty jak w zdaniu „Większość chłopców lubi samochody”. Przy tym ujęciu dopiero określnik wraz z rzeczownikiem, w tym wypadku *większość chłopców*, traktowany jest jako kwantyfikator. Jak piszę w rozdziale 3.4., konsekwencją tego stanowiska jest uznanie wielu kwantyfikatorów, w tym kwantyfikatora większości, za kwantyfikatory pozalogiczne. Przyjęcie definicji kwantyfikatorów uogólnionych pochodzącej od Lindströma pozwoli uniknąć tej konsekwencji. Z drugiej strony, jak pokazał Dag Westerståhl w (1985, s. 397), mamy wzajemnie jednoznaczność pomiędzy określnikami spełniającymi warunki ISOM i pewną wersję KONS, o których piszę poniżej (s. 40), a kwantyfikatorami uogólnionymi typu  $\langle 1, 1 \rangle$  (por. także Westerståhl 1989, s. 35, 37). Z tego względu w dalszej części pracy zaniedbam różnicę pomiędzy kwantyfikatorami a określnikami, o ile nie będzie to miało znaczenia dla poruszanego tematu.

się na szczegółowej analizie poszczególnych kwantyfikatorów, występujących w języku naturalnym. Sztandarowym przykładem jest tutaj praca Edwarda Keenana i Jonathana Staviego „A semantic characterization of natural language determiners” z 1986 roku. W drugim nurcie położono nacisk na perspektywę globalną: podanie ogólnej charakterystyki kwantyfikatorów realizowanych w języku naturalnym i cech, które pozwalają spośród wszystkich możliwych w sensie matematycznym kwantyfikatorów je wyodrębnić. Rezultatem badań należących do tego drugiego nurtu jest podanie pewnych regularności, które spełniają kwantyfikatory realizowane w języku naturalnym (van Benthem 1983, 1984a, Doets 1991, Westerståhl 1989). W dalszej części pracy skupię się jedynie na tych wynikach, które charakteryzują kwantyfikator większości. Założeniem mojego ujęcia jest to, że termin „większość” występujący w zdaniu „większość członków populacji  $m$  uznaje zdanie  $p$ ” jest kwantyfikatorem języka naturalnego. Ma to o tyle znaczenie, że po pierwsze, pozwala nam skorzystać z badań nurtu, o którym właśnie piszę, a po drugie pozwala uniknąć problemów związanych z interpretacją kwantyfikatora większości w zbiorach nieskończonych. Do sprawy tej powrócę w rozdziale 6.

Znaczna część kwantyfikatorów języka naturalnego posiada trzy cechy: *konserwatywność* KONS, *ekstensję* EKST i *niezmienniczość ze względu na bijekcje pomiędzy zbiorami* ISOM.<sup>5</sup> Ta ostatnia cecha zawiera się już w definicji kwantyfikatora uogólnionego, i to zarówno w wersji podanej przez Mostowskiego (1957), jak i przez Lindströma (1966a), oraz definicji 3.1. przyjętej tutaj. Ponieważ za podstawowy typ kwantyfikatorów realizowanych w języku naturalnym uważa się kwantyfikatory typu  $\langle 1, 1 \rangle$  (patrz rozdział 3.2.), więc KONS, EKST i ISOM dla nich przede wszystkim są zdefiniowane. Poniżej przedstawię definicje tych terminów właśnie dla przypadku  $\langle 1, 1 \rangle$  i za pomocą diagramów Venna zobrazuję ich znaczenie.

EKST (nazywana także neutralnością kontekstową, por. van Benthem 1986) mówi o nieważności kwantyfikatora na zwiększenie uniwersum – dodawanie do uniwersum indywiduów, które nie są ani  $A$ , ani  $B$  nie zmieni nic:

#### DEFINICJA 3.5. (EKST)

Dla dowolnych zbiorów  $E, E'$  i  $A, B$ , takich że  $A, B \subseteq E \subseteq E'$ :

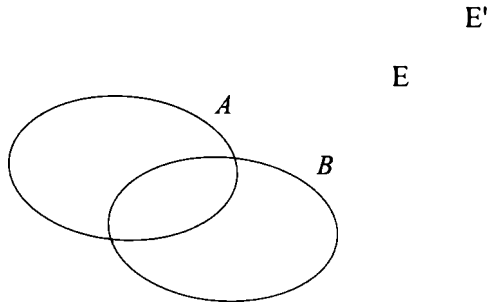
$$Q_{EAB} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } Q_{E'AB}.^6 \quad \square$$

Dla  $Q$ , takich że  $EKST(Q)$  możemy wobec tego pisać  $Q_{AB}$  mając na myśli to, iż dla pewnego  $E \subseteq Q_{EAB}$ , gdzie  $A, B \subseteq E$ . EKST gwarantuje, że jest to równoważne z „dla każdego  $E \subseteq Q_{EAB}$ , gdzie  $A, B \subseteq E$ ” (Keenan i Westerståhl 1997, s. 856). Gdyby rozciągnąć EKST na kwantyfikatory typu  $\langle 1 \rangle$  to  $\forall$  zdefiniowane jako  $\forall_{EA}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A = E$  nie byłoby EKST. Ponieważ często tę cechę przyjmuje się za jedną z cech definiujących kwantyfikatory logiczne realizowane w języku naturalnym lub w ogóle kwantyfikatory uogólnione (van Eijck 1991, s. 466), wydaje się, że EKST ma sens tylko jako ograniczenie nałożone na kwantyfikato-

<sup>5</sup>Van Benthem (1984, 1986) ISOM nazywa QUANT, a van Deemter (1985) zamiast ISOM przyjmuje PERM – niezmienniczość ze względu na permutacje. Westerståhl (1989, s. 67) pokazuje jednak, że dla kwantyfikatorów binarnych, które spełniają EKST, a takim jest binarny kwantyfikator większości  $M^2$ , PERM i ISOM są równoważne. Niektórzy, jak na przykład Westerståhl (1996), uznają KONS, EKST i ISOM za cechy wyróżniające kwantyfikatory logiczne. Do tej sprawy powrócę w rozdziale 3.4.

<sup>6</sup>Por. Westerståhl (1989, s. 63).

tory typu  $\langle 1, 1 \rangle$  i wyższych (por. Keenan i Westerståhl 1997, s. 856). Podobnie kwantyfikator większości typu  $\langle 1 \rangle$  nie byłby EKST.



Rys. 3.1.: EKST

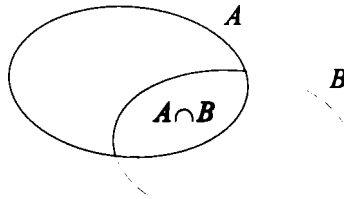
**DEFINICJA 3.6. (KONS)**

Dla wszystkich zbiorów  $E$  i wszystkich  $A, B \subseteq E$ :

$$Q_E AB \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } Q_E A(A \cap B).^7$$

□

KONS i EKST razem sprowadzają się do tego, że pierwszy argument tej relacji (kwantyfikatora  $Q$ ) odgrywa decydującą rolę – wszystko, co jest poza zbiorem  $A$ , nie ma znaczenia.



Rys. 3.2.: EKST + KONS

ISOM mówi nam, że  $Q_E AB$  zależy jedynie od ilości indywiduów w  $E, A, B$  i  $A \cap B$ :

**DEFINICJA 3.7. (ISOM)**

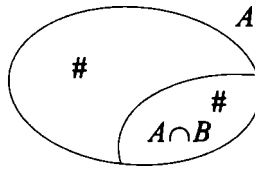
Dla wszystkich zbiorów  $E$ , wszystkich  $A, B \subseteq E$  i wszystkich bijekcji  $\pi$  z  $E$ :

$$Q_E AB \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } Q_{\pi(E)} \pi(A) \pi(B).^8$$

□

<sup>7</sup>Por. Westerståhl (1989, s. 37).

<sup>8</sup>Por. Westerståhl (1989, s. 66).



Rys. 3.3.: EKST + KONS + ISOM

W wyniku połączonego efektu EKST, KONS i ISOM  $Q_{EAB}$  zależy jedynie od ilości indywidualów (zaznaczonej na rysunku 3.3. poprzez #) w  $A$  i  $A \cap B$ . Przykładem kwantyfikatora, który nie jest KONS, jest kwantyfikator Reschera  $R AB$ . Jest to kwantyfikator typu  $\langle 1, 1 \rangle$ , zdefiniowany w ten sposób, że zbiory  $A, B$  należą do  $R$  wtedy i tylko wtedy, gdy ilość elementów w  $A$  jest większa od ilości elementów w  $B$ , a to w istotny sposób zależy od ilości elementów w samym  $B$ , nie tylko w  $A \cap B$ .<sup>9</sup> Kwantyfikator ten nie ma odpowiednika w języku naturalnym. Zbliżonym do niego jest kwantyfikator *więcej ... niż ...*, jak jednak pokazali Keenan i Westerståhl (1997) jest to kwantyfikator typu  $\langle 2, 1 \rangle$ : wiąże on parę formuł z pojedynczą formułą, jak w zdaniu „więcej kotów niż psów można spotkać w tym parku”.

Będę się starała pokazać w dalszej części pracy, że to kwantyfikator większości typu  $\langle 1, 1 \rangle$  jest kwantyfikatorem używanym w języku naturalnym i on też najlepiej nadaje się do zdefiniowania kryterium prawdy przez zgodę większości. Spełnia on zarówno EKST, jak i KONS i oczywiście ISOM. Oprócz tego jest *prawostronnie monotoniczny*, co ma wpływ na logiczną charakterystykę tego kryterium. Poniżej podaję odpowiednie definicje.

DEFINICJA 3.8. (prawostronna monotoniczność kwantyfikatorów typu  $\langle 1, 1 \rangle$ )

Kwantyfikator  $Q$  typu  $\langle 1, 1 \rangle$  nazywamy *prawostronnie monotonicznym*, gdy dla  $B \subseteq B' \subseteq E$ ,  $A \subseteq E$ :

$$\text{jeżeli } Q_{EAB} \text{ to } Q_{EB'A'}^{10} \quad \square$$

DEFINICJA 3.9. (lewostronna monotoniczność kwantyfikatorów typu  $\langle 1, 1 \rangle$ )

Kwantyfikator  $Q$  typu  $\langle 1, 1 \rangle$  nazywamy *lewostronnie monotonicznym*, gdy dla  $A \subseteq A' \subseteq E$ ,  $B \subseteq E$ :

$$\text{jeżeli } Q_{EAB}, \text{ to } Q_{EA'B'}^{11} \quad \square$$

W przypadku kwantyfikatorów typu  $\langle 1 \rangle$  nie bardzo możemy mówić o prawostronnej czy lewostronnej monotoniczności, więc zdefiniujemy po prostu *monotoniczność kwantyfikatorów typu  $\langle 1 \rangle$* :

<sup>9</sup> Czasami to kwantyfikator większości typu  $\langle 1 \rangle$  nazywany jest kwantyfikatorem Reschera (van der Does i van Eijck 1996a, s. 29).

<sup>10</sup> Definicję tę podaję za Westerståhlem (1989, s. 76). Inni autorzy, jak na przykład Barwise i Cooper (1981) czy Cooper (1983), nazywają tę monotoniczność monotonicznością wzrastającą, prawostronną monotonicznością wzrastającą lub (van Benthem 1984a, Westerståhl 1996) monotonicznością skierowaną w górę (*upward monotonicity*).

<sup>11</sup> Definicja ta została wprowadzona przez Barwise'a i Coopera w (1981), gdzie cecha ta nosi nazwę *persistent*.

DEFINICJA 3.10. (monotoniczność kwantyfikatorów typu  $\langle 1 \rangle$ )

Kwantyfikator  $Q$  typu  $\langle 1 \rangle$  nazywamy *monotonicznym*, gdy dla  $A \subseteq B \subseteq E$ :

jeżeli  $Q_E A$ , to  $Q_E B$ .<sup>12</sup>

□

Intuicja podpowiada nam, że kwantyfikator większości typu  $\langle 1 \rangle$  jest monotoniczny, natomiast kwantyfikator większości typu  $\langle 1, 1 \rangle$  jest prawostronnie monotoniczny: jeżeli większość członków parlamentu popiera ustawę wyrażoną zdaniem  $p$ , to zwiększenie poparcia może przejściu tej ustawy co najwyżej pomóc. W rozdziałach następnych musimy zadbać o to, aby kwantyfikatory większości tam zdefiniowane były monotoniczne (prawostronnie monotoniczne). Kwantyfikator większości typu  $\langle 1, 1 \rangle$  nie jest lewostronnie monotoniczny, gdyż zwiększenie liczby osób, których głosy bierzemy pod uwagę, może łatwo sprawić, że poparcie stanowiące większość w poprzedniej grupie nie jest już wystarczające dla zatwierdzenia ustawy. Jest natomiast lewostronnie monotoniczny binarny kwantyfikator egzystencjalny  $\exists^2$ : jeżeli przecięcie zbioru  $A$  ze zbiorem  $B$  jest niepuste, czyli para  $\langle A, B \rangle$  należy do interpretacji kwantyfikatora  $\exists^2$ , to niepuste jest też przecięcie zbioru  $B$  z każdym nadzbiorem zbioru  $A$ .

Mimo wyrażonych powyżej intuicji, można mieć jednak wątpliwości, czy binarny kwantyfikator większości,  $M^2$ , jako kwantyfikator języka naturalnego jest prawostronnie monotoniczny. Zwraca na to uwagę Cooper w (1983), odwołując się do przykładu podanego przez Barwise'a i Coopera w (1981). Rozważmy następujące zdania:

- a) Większość ludzi głosowała na Cartera.
- b) Większość ludzi głosowała.

Według Coopera, jest intuicyjnie wątpliwe, czy b) wynika z a). Nietrudno jednak o wytłumaczenie, które podaje też Cooper: skoro chcemy badać prawostronną monotoniczność, to musimy przyjąć, że a) i b) są właściwie skrótami dla

- a') Większość ludzi, spośród tych, którzy głosowali, głosowała na Cartera.
- b') Większość ludzi, spośród tych, którzy głosowali, głosowała.

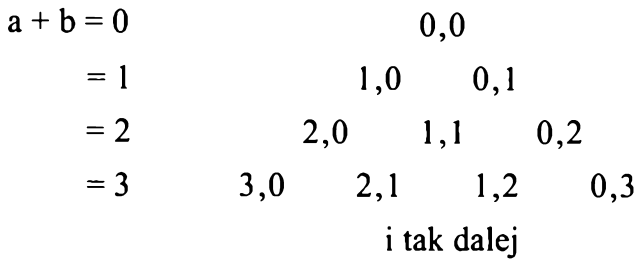
Gdy to przyjmujemy, to wynikanie tautologii, którą jest b'), z a') nie budzi wątpliwości, a jedynie brak wynikania b') z a') byłby kontrprzykładem na prawostronną monotoniczność  $M^2$ .

Johan van Benthem w (1984a) zaproponował geometryczną reprezentację kwantyfikatorów za pomocą drzewka liczb. Jeżeli ograniczymy się do modeli o skończonym uniwersum, to dla kwantyfikatorów  $Q$  spełniających EKST, KONS i ISOM  $Q_E AB$  w przypadku kwantyfikatora typu  $\langle 1, 1 \rangle$  i  $Q_E A$  w przypadku kwantyfikatora typu  $\langle 1 \rangle$  zależy wyłącznie od liczb  $a, b$  reprezentujących moce odpowiednich zbiorów: dla typu  $\langle 1, 1 \rangle$   $a = |A \setminus B|$ ,  $b = |A \cap B|$ , dla typu  $\langle 1 \rangle$   $a = |E \setminus A|$ ,  $b = |A|$ . Wszystkie skończone przypadki mogą być zgrupowane w następującym drzewku liczb:<sup>13</sup>

<sup>12</sup>Definicja ta pochodzi od Barwise'a z (1978); notacja została zmieniona.

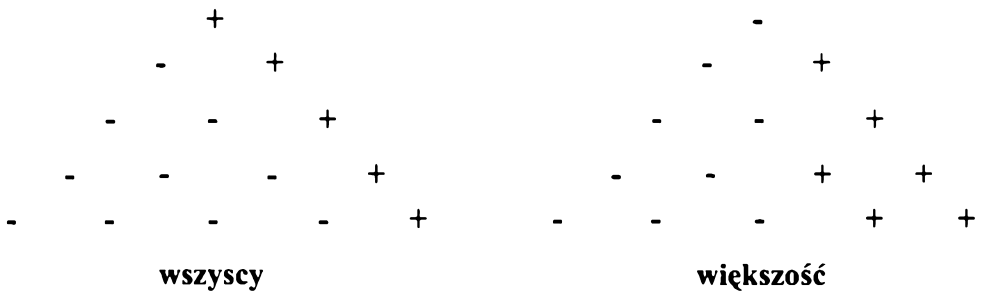
<sup>13</sup>van Deemter w (1985) rozszerzył tę geometryczną reprezentację na przypadki nieskończone.





Rys. 3.4.: Drzewko liczb

Kwantyfikator mogą być teraz reprezentowane przez podzbiory tego drzewka. Poniżej widzimy reprezentację kwantyfikatora większości<sup>14</sup> i kwantyfikatora  $\forall$ . „+” oznacza, że dany punkt należy do interpretacji kwantyfikatora, a „-”, że nie należy:

Rys. 3.5.: Reprezentacja kwantyfikatorów **wszyscy** i **większość** na drzewku liczb

Ta geometryczna reprezentacja służy nie tylko celom obrazującym, ale jest także używana w dowodzeniu twierdzeń dotyczących charakterystyki kwantyfikatorów (por. Westerstahl 1989). Na przykład kwantyfikatory prawostronnie monotoniczne będą się charakteryzowały tym, że jeżeli jakiś punkt drzewka należy do danego kwantyfikatora, to należą do niego wszystkie punkty od niego na prawo na tej samej linii. Zarówno kwantyfikator większości, jak i kwantyfikator  $\forall$  należą do tej grupy.

### 3.2. WIĘKSZOŚĆ TYPU $\langle 1 \rangle$ , A WIĘKSZOŚĆ TYPU $\langle 1, 1 \rangle$

Przykładem kwantyfikatora typu  $\langle 1 \rangle$  jest standardowy kwantyfikator ogólny  $\forall$  lub unarny kwantyfikator większości  $M$ , rozumiany jak w zdaniu „większość  $x$ -ów uznaje zdanie  $p$ ”. W modelu  $\mathfrak{M}$  o skończonym uniwersum  $E$  kwantyfikator ten interpretowany będzie przez rodzinę podzbiorów  $E$ , których moc jest większa od mocy ich dopełnienia. Przykładem kwantyfikatora typu  $\langle 1, 1 \rangle$  jest kwantyfikator **co najmniej dwu, ale nie więcej niż czterech**, ro-

<sup>14</sup>Kwantyfikator większości typu  $\langle 1 \rangle$  i  $\langle 1, 1 \rangle$  otrzymują taką samą reprezentację geometryczną, ale innym zbiorem odpowiadają poszczególne punkty drzewka.

zumiany jak w zdaniu „Co najmniej dwu, ale nie więcej niż czterech studentów było na dzisiejszym wykładzie”, oraz binarny kwantyfikator większości, rozumiany jak w zdaniu „Większość polityków prawicowych głosowało za przyjęciem ustawy X”. W rozdziale 5. przedstawię analizę kryterium prawdy przez zgodę większości za pomocą tego właśnie kwantyfikatora. W języku naturalnym bardzo rzadko, jeżeli nie nigdy, używamy kwantyfikatora większości typu  $\langle 1 \rangle$ . Nawet powyższy przykład z trudem może być uznany za przykład wzięty z języka naturalnego, bo co to niby jest „większość  $x$ -ów”? Może się to wydawać dziwne, gdyż właśnie kwantyfikator ogólny  $\forall$ , a trudno przecież o bardziej typowy kwantyfikator, jest typu  $\langle 1 \rangle$ . Typu  $\langle 1 \rangle$  jest jednak logiczny kwantyfikator ogólny, taki jakiego używamy w standardowej logice pierwszego rzędu. W języku naturalnym mówimy raczej o tym, że wszyscy mieszkańcy Londynu chorują na gardło niż, że wszyscy chorują na gardło, a jeżeli nawet używamy tego ostatniego zdania, to nigdy, bądź bardzo rzadko, nie chcemy kwantyfikować po dziedzinie wszystkich przedmiotów, jakie możemy wziąć pod uwagę. Zdanie „Wszyscy chorują na gardło” jest zdaniem eliptycznym i w praktyce kontekst dostarcza nam odpowiedzi na to, o jakich wszystkich chodzi. W przypadku kwantyfikatora ogólnego nie mają te rozważania aż takiego znaczenia, gdyż kwantyfikator  $\forall$  typu  $\langle 1 \rangle$  i kwantyfikator  $\forall^2$  typu  $\langle 1, 1 \rangle$ , są wzajemnie definiowalne w następujący sposób:  $\forall^2 xy(\varphi, \psi) = \forall x(\varphi \rightarrow (\psi(x/y)))$  i  $\forall x\varphi = \forall^2 xx((x = x), \varphi)$ , gdzie  $\psi(x/y)$  jest równoczesnym podstawieniem zmiennej  $x$  za zmienną  $y$  we wszystkich wystąpieniach zmiennej  $y$  w formule  $\psi$ . Podobnie rzecz się ma z małym kwantyfikatorem:  $\exists^2 xy(\varphi, \psi) = \exists x(\varphi \wedge (\psi(x/y)))$  i  $\exists x\varphi = \exists^2 xx((x = x), \varphi)$ . Nie jest tak ze wszystkimi kwantyfikatorami, w szczególności nie jest tak w przypadku **większości**, jak zauważył już Nicholas Rescher w (1962). Kwantyfikator  $M$  może być zdefiniowany poprzez kwantyfikator  $M^2$ , ale odwrotna zależność nie zachodzi (patrz twierdzenie 3.14. na stronie 46). Jest to więc dodatkowy argument przemawiający za oparciem się na kwantyfikatorze  $M^2$  w definicji kryterium prawdy przez zgodę większości. W rozdziale 4. przeprowadzę analizę tego kryterium w oparciu o kwantyfikator  $M$ , a w rozdziałach 5., 6. i 7. – w oparciu o kwantyfikator  $M^2$ .

W modelu  $\mathfrak{M}$  o uniwersum  $E$ ,  $M^2$  interpretowany będzie przez rodzinę par podzbiorów uniwersum tego modelu,  $\langle A, B \rangle$ , takich, że moc  $(A \cap B)$  jest większa od mocy  $(A \setminus B)$ , symbolicznie  $\{\langle A, B \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : |A \cap B| > |A \setminus B|\}$ . W modelach skończonych możemy ten warunek sformułować w równoważny sposób jako  $\{\langle A, B \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : |A \cap B| > 1/2 |A|\}$ . Przyjęcie takiej interpretacji kwantyfikatorów większości nie jest jedynym możliwym rozwiązaniem. Philip Peterson (1979, s. 155) nazywa sens **większości** zakodowany w powyższej interpretacji sensem podstawowym (*generic*) i odróżnia go od sensu, przy którym większość jest rozumiana jako „prawie wszystkie”. Z punktu widzenia logicznego oba te sensy kwantyfikatora większości są podobne i, jak zauważył Rescher, niewiele się zmieni, gdy zamiast „ $> 1/2$ ” wstawimy „ $> 90$  procent”.

Kwantyfikatory typu  $\langle 1 \rangle$ , za pomocą których możemy zdefiniować ich  $\langle 1, 1 \rangle$  odpowiedniki, nazywane są *kwantyfikatorami relatywizowalnymi*. Zanim wprowadzimy to pojęcie, musimy dowiedzieć się, co to jest relatywizacja kwantyfikatorów:

DEFINICJA 3.11. (relatywizacja kwantyfikatorów)

Jeżeli  $Q$  jest kwantyfikatorem typu  $\langle 1 \rangle$ , to *relatywizacją*  $Q$  nazywamy kwantyfikator  $Q^r$  typu  $\langle 1, 1 \rangle$  taki, że dla dowolnych  $E$  i dowolnych  $A, B \subseteq E$ :

$$Q^r_{E} AB \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } Q_A(B \cap A).^{15}$$

□

<sup>15</sup>Por. Westerståhl (1995), def. 1.3.1.

Na przykład

$$\forall^2 = \forall^r$$

$$\exists^2 = \exists^r$$

$$M^2 = M^r$$

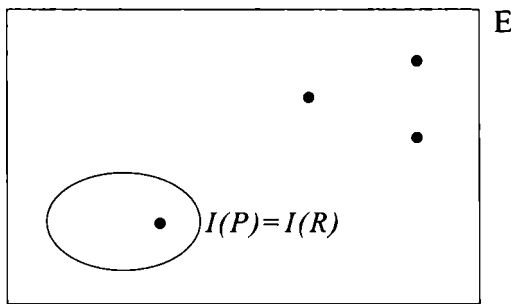
DEFINICJA 3.12. (kwantyfikatory relatywizowalne)

Kwantyfikator  $Q$  typu  $\langle 1 \rangle$  nazywamy *kwantyfikatorem relatywizowalnym*, gdy  $Q^r$  jest definiowalny w logice  $L(Q)$ , czyli w języku standardowej logiki pierwszego rzędu z dodanym kwantyfikatorem  $Q$ .<sup>16</sup> □

Jak pokazaliśmy powyżej, standardowe kwantyfikatory logiki pierwszego rzędu są kwantyfikatorami relatywizowalnymi. Aby odpowiedzieć na pytanie, czy  $M$  jest kwantyfikatorem relatywizowalnym, należy zbadać, czy  $M^2$  jest definiowalny w  $L(M)$ . Zauważmy po pierwsze, że sposoby definiowania, jakie narzucają się w analogii do definiowania kwantyfikatorów binarnych  $\forall^2$  i  $\exists^2$  za pomocą ich unarnych odpowiedników  $\forall$  i  $\exists$ , zawodzą: chociaż oczywiście jest tak, że jeżeli  $Mx(\varphi \wedge \psi)$ , to  $M^2xy(\varphi, \psi)$ , gdyż modelowa interpretacja  $\varphi$  zawiera się w  $E$ , to jednak nie ma odwrotnej zależności, jak pokazuje poniższy przykład.

PRZYKŁAD 3.13.

Niech  $\mathfrak{M} = \langle E, I \rangle$ , gdzie  $E$  jest uniwersum modelu, a  $I$  jest funkcją interpretującą wyrażenia języka  $L(M, M^2)$  w taki sposób, jak to przedstawia rysunek 3.6.:



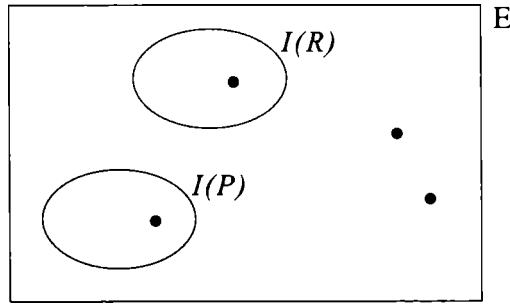
Rys. 3.6.:  $\mathfrak{M} \models M^2xx(P(x), R(x))$ , ale nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models Mx(P(x) \wedge R(x))$

Tutaj  $|I(P) \cap I(R)| = |I(P)| = 1$ , więc  $M^2xx(P(x), R(x))$  jest spełnione, ale  $|E| = 4$ , czyli  $Mx(P(x) \wedge R(x))$  nie jest spełnione.

Podobnie, jeżeli  $M^2xy(\varphi, \psi)$ , to w oczywisty sposób  $Mx(\neg\varphi \vee \psi)$ , ale odwrotnej zależności też nie ma. Kontrprzykład przedstawiony jest na rysunku 3.7. -  $|(E \setminus I(P)) \cup I(R)| = 3$ , więc  $Mx(\neg P(x) \vee R(x))$  jest spełnione, ale  $|I(P) \cap I(R)| = 0$ , czyli  $M^2xx(P(x), R(x))$  nie jest spełnione.<sup>17</sup>

<sup>16</sup>Por. *ibid.* s. 385. Gdy piszę o logice pierwszego rzędu, to mam na myśli logikę predykatów pierwszego rzędu z identycznością.

<sup>17</sup>Precyzyjne sformułowania definicji spełniania dla języków  $L(M)$  i  $L(M^2)$  znajdują się w rozdziałach 4. i 5.



Rys. 3.7.:  $\mathfrak{M} \models Mx(\neg P(x) \vee R(x))$ , ale nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models M^2xx(P(x), R(x))$   $\square$

Jedną z pierwszych wzmianek o tym, że  $M^2$  nie jest definiowalne za pomocą  $M$ , znajdujemy u Reschera (1962, s. 374). Poniższe twierdzenie, które podaję bez dowodu, pochodzi od Westerståhla (1996, s. 382):<sup>18</sup>

**TWIERDZENIE 3.14.** (Westerståhl (1996))

Monotoniczny kwantyfikator  $Q$  typu (1) jest kwantyfikatorem relatywizowalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest definiowalny w logice pierwszego rzędu.  $\square$

Ponieważ unarny kwantyfikator większości  $M$  jest kwantyfikatorem monotonicznym i, jak pokażę poniżej, nie jest definiowalny w logice pierwszego rzędu, więc nie jest on kwantyfikatorem relatywizowalnym, co oznacza, że  $M^2$  nie jest definiowalne w  $L(M)$ .<sup>19</sup>

**DEFINICJA 3.15.** (definiowalność kwantyfikatora w logice  $L$ )

Kwantyfikator  $Q$  typu  $\langle k_1, \dots, k_n \rangle$  jest *definiowalny w logice  $L$* , gdy istnieje  $L$ -zдание  $\varphi$ , zawierające symbole pozalogiczne  $P_1, \dots, P_n$  (i tylko takie), gdzie  $P_i$  jest  $k_i$ -argumentowy, takie, że dla każdego  $E$  i  $R_1, \dots, R_n$  takich, że  $R_i \subseteq E^{k_i}$ :  $Q_E R_1 \dots R_n$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla modelu  $\mathfrak{M} = \langle E, R_1, \dots, R_n \rangle$ ,  $\mathfrak{M} \models \varphi$ .<sup>20</sup>  $\square$

Gdy  $L$  jest logiką elementarną, to  $Q$  jest *definiowalny w elementarnej logice pierwszego rzędu*.

**TWIERDZENIE 3.16.**

Kwantyfikator  $M$  nie jest definiowalny w logice pierwszego rzędu.

<sup>18</sup>Dowód korzysta z założenia o skończoności mocy uniwersum modeli. Dla mocy nieskończonych twierdzenie to udowodnił Flum (1985, rozdz. III. 4).

<sup>19</sup>Dowód tego, że  $M^2$  nie jest definiowalne w  $L(M)$  przy założeniu skończoności uniwersum modeli, podają Barwise i Cooper w (1981). Wspominają tam też, że David Kaplan udowodnił to twierdzenie dla modeli o nieskończonym uniwersum w nieopublikowanej pracy z 1965 roku. Kaplan (1966) zawiera streszczenie podobnych wyników. Rescher (1962) zauważa, choć nie podaje dowodu, że  $Mx(A(x) \rightarrow B(x))$  nie daje tego samego co „większość  $A$  są  $B$ ”, i to ostatnie w ogóle nie da się zdefiniować w logice standardowej, a nawet w takiej poszerzonej o kwantyfikator  $M$ . Jak zauważył Rescher, oznacza to, że logika standardowa nie potrafi zdać relacji z bardzo prostych i oczywistych wnioskowań (1962, s. 374).

<sup>20</sup>Por. Westerståhl (1995, s. 382).

DOWÓD: Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że zdanie  $MxP(x)$  jest definiowalne w logice pierwszego rzędu, powiedzmy przez zdanie  $\varphi_P$ , w którym predykat  $P$  jest jedynym symbolem pozalogicznym. Rozważmy teraz następującą teorię:

$$\Gamma := \nabla_{CUD} \cup \{P(c_i) : i < \omega\} \cup \{\neg P(d_j) : j < \omega\} \cup \{\varphi_P\},$$

gdzie  $C$  i  $D$  są rozłącznymi przeliczalnymi zbiorami stałych, a  $\nabla_X := \{c \neq d : c, d \text{ różne elementy z } X\}$ , czyli jest zbiorem zdań stwierdzających niezachodzenie relacji identyczności pomiędzy elementami. Niech  $\Gamma^* \subseteq \Gamma$  będzie skończona, powiedzmy:

$$\Gamma^* = \{P(c_1), \dots, P(c_n)\} \cup \{\neg P(d_1), \dots, \neg P(d_m)\} \cup \nabla_{\{c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_m\}} \cup \{\varphi_P\}.$$

Założmy, że  $m > n$  (pozostałe przypadki podobnie). Weźmy  $E$  takie, że  $|E| = 2m + 1$  i zbiór  $A \subseteq E$  taki, że  $|A| = m + 1$ ; rozważmy model o uniwersum  $E$ , w którym predykat  $P$  zinterpretowany jest przez zbiór  $A$ ; zinterpretujmy stałe w odpowiedni sposób, to znaczy tak, aby  $c_1, \dots, c_n \in A$ , a  $d_1, \dots, d_m \notin A$ . Wtedy dla modelu  $\mathfrak{M} = \langle E, A \rangle$ ,  $\mathfrak{M} \models \Gamma^*$ . Oznacza to, że każda skończona część  $\Gamma$  posiada model, a wobec tego, poprzez zwartość,  $\Gamma$  posiada model. Dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema daje model przeliczalny  $\mathfrak{N}$  taki, że  $\mathfrak{N} \models \Gamma$ . W  $\mathfrak{N}$   $|A| = |E \setminus A| = \aleph_0$ , ale także  $\mathfrak{N} \models \varphi_P$ , co jest sprzeczne z założeniem, że  $\varphi_P$  definiuje  $M$ .<sup>21</sup>  $\square$

TWIERDZENIE 3.17.

Kwantyfikator  $M^2$  nie jest definiowalny w logice pierwszego rzędu.<sup>22</sup>

DOWÓD: Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że kwantyfikator  $M^2$  jest definiowalny w logice pierwszego rzędu. Ponieważ kwantyfikator  $M$  można zdefiniować za pomocą kwantyfikatora  $M^2$  w następujący sposób:  $Mx\varphi := M^2xx((x = x), \varphi)$ ,  $M$  byłby definiowalny w logice pierwszego rzędu, co jest sprzeczne z twierdzeniem 3.16.  $\square$

### 3.3. CHARAKTERYSTYKA KWANTYFIKATORA WIĘKSZOŚCI

Prawdopodobnie Rescher w (1962) jako pierwszy podał pewne prawa i częściową charakterystykę kwantyfikatora większości i uznał, że jest to kwantyfikator w sensie Mostowskiego. Poniższe prawa, dotyczące kwantyfikatora unarnego, pochodzą z tego właśnie tekstu.

1.  $\forall x\varphi(x) \rightarrow Mx\varphi(x)$ ,
2.  $Mx\varphi(x) \rightarrow \exists x\varphi(x)$ ,
3.  $(Mx\varphi(x) \wedge Mx\psi(x)) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$ ,
4.  $Mx\varphi(x) \rightarrow \neg Mx\neg\varphi(x)$ ,
5.  $(Mx(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \wedge \forall x\varphi(x)) \rightarrow Mx\psi(x)$ ,
6.  $(\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \wedge Mx\varphi(x)) \rightarrow Mx\psi(x)$ .

<sup>21</sup>Dowód tego twierdzenia podają za van der Doesem i van Eijkiem (1996, s. 29–30), choć jego ideę można znaleźć już na przykład u van Benthema i Doetsa (1983, s. 277). Notacja została trochę zmieniona, aby uniknąć kolizji oznaczeń.

<sup>22</sup>Twierdzenie to wynika z poprzedniego, którego dowód w istotny sposób bazuje na modelach o nieskończonych uniwersach. Dla modeli o skończonych uniwersach twierdzenie to udowodnili Barwise i Cooper (1981).

Rescher zauważył, że odwrotność (4.) nie zachodzi, na przykład w dziedzinach o parzystej liczbie elementów. Tak rzeczywiście będzie w modelu standardowym przedstawionym w rozdziale następnym, ale dla kwantyfikatora większości zinterpretowanego w modelach częściowych otrzymamy w (4.) równoważność (patrz fakt 4.14. na stronie 63).

W pracy „Generalized quantifiers and natural language” Barwise i Cooper przyjęli następujące postulaty znaczeniowe dla binarnego kwantyfikatora większości  $M^2$ :

(P1) Kwantyfikator większości jest pozytywnie silny (*positive strong*).

(P2) Kwantyfikator większości jest prawostronnie monotoniczny.

(P3) Jeżeli  $A \neq \emptyset$ , to dla dowolnych  $X, Y$  takich, że  $\langle A, X \rangle$  i  $\langle A, Y \rangle$  należą do interpretacji  $M^2$  (symbolicznie  $\langle A, X \rangle, \langle A, Y \rangle \in I(M^2)$ ),  $X \cap Y \neq \emptyset$ .

(P4) Jeżeli  $A \neq \emptyset$ , to  $I(M^2) \neq \emptyset$  i  $\{X \subseteq E : \langle A, X \rangle \in I(M^2)\} \neq \emptyset(E)$ .<sup>23</sup>

Jak twierdzi Westerståhl (1985, s. 409), gdy założymy ISOM i KONS, to (P3) będzie równoważne następującemu, bardziej zdroworoządkowemu postulatowi:

(P3') Jeżeli  $A \neq \emptyset$ , to dla każdego  $X$  takiego, że  $\langle A, X \rangle \in I(M^2)$   $|A \cap X| > |A \setminus X|$ .

W postulacie pierwszym pojawia się pojęcie *pozytywnie silnego* kwantyfikatora (PS), którego nie zdefiniowaliśmy do tej pory:

DEFINICJA 3.18. ((PS) pozytywnie silny kwantyfikator typu  $\langle 1, 1 \rangle$ )

Kwantyfikator  $Q$  typu  $\langle 1, 1 \rangle$  nazywamy *pozytywnie silnym* (PS), gdy dla każdego zbioru  $A$ ,  $\langle A, A \rangle \in Q$ .<sup>24</sup> □

Kwantyfikator  $M^2$ , tak jak o nim myśleliśmy do tej pory, nie jest pozytywnie silny, gdyż dla  $A = \emptyset$  nie spełnia on powyższych warunków: gdy  $|A| = 0$ , to także  $|A \cap X| = 0$  dla dowolnego  $X$ , a 0 nigdy nie jest większe od żadnej liczby, która wyraża moc zbioru. Ponieważ Barwise i Cooper wielokrotnie podkreślali, że binarny kwantyfikator większości jest pozytywnie silny, musieli mieć na myśli inną jego interpretację, prawdopodobnie zbliżoną do podanej przez Petersona (patrz s. 44). Kwantyfikator większości rozumiany jako „więcej niż połowa”, czyli tak jak to przyjęliśmy, posiada zbliżoną własność:

DEFINICJA 3.19. ((PPS) prawie pozytywnie silny kwantyfikator typu  $\langle 1, 1 \rangle$ )

Kwantyfikator  $Q$  typu  $\langle 1, 1 \rangle$  nazywamy *prawie pozytywnie silnym* (PPS), gdy dla każdego zbioru  $A \neq \emptyset$ ,  $\langle A, A \rangle \in Q$ .<sup>25</sup> □

Westerståhl (1985, s. 409) pokazuje, że postulat (P4) wynika z (PPS) i (P3).

Kwestia, czy zdanie „Większość jednorozców jest jednorozcami” jest prawdziwe czy fałszywe, była na różne sposoby rozstrzygana. Barwise i Cooper uznaliby je za zdanie prawdziwe, ale zazwyczaj przyjmuje się inaczej. Jan van Eijck pisze, że „»Większość szarmanckich jest szarmancka« nie jest prawdziwe, gdy w ogóle nie ma szarmanckich” (van Eijck 1991, s. 471). Tak też przyjmujemy tutaj.

<sup>23</sup>Barwise i Cooper (1981) SPI–SP3, s. 208. Notacja została zmieniona.

<sup>24</sup>Definicja ta pochodzi od Barwise’a i Coopera (1981, s. 182), choć była tam mowa o określnikach, a nie o kwantyfikatorach. Cechę tę nazywa się także *zwrotnością kwantyfikatorów* (Westerståhl 1989, s. 39, 84).

<sup>25</sup>Por. Westerståhl (1985, s. 406).

### 3.4. LOGICZNOŚĆ KWANTYFIKATORÓW, A W SZCZEGÓLNOŚCI KWANTYFIKATORA WIĘKSZOŚCI

Barwise i Cooper w (1981) nie dokonują rozróżnienia pomiędzy kwantyfikatorami typu  $\langle 1 \rangle$  i  $\langle 1, 1 \rangle$  i w zdaniach o strukturze takiej, jak na przykład „Większość ryb jest niejadalna” nie samą „większość”, ale „większość ryb” traktują jako kwantyfikator, a „większość” nazywają określnikiem. Fakt, że nie przyjęli oni kwantyfikatorów Lindströma tylko kwantyfikatory Mostowskiego jako definicję kwantyfikatora, zmusza ich do uznania „bycia rybą” za integralną część kwantyfikatora, a nie jego argument, jak to jest u Lindströma, co z kolei prowadzi do uznania, że kwantyfikator większości w języku naturalnym nie jest kwantyfikatorem logicznym, gdyż jego interpretacja w modelu zależy od interpretacji pozallogicznego predykatu „bycia rybą”. Gdy przyjmiemy, że to kwantyfikatory Lindströma są kwantyfikatorami uogólnionymi, a kwantyfikatory Mostowskiego ich specjalnymi przypadkami, to unikniemy tej konsekwencji. Czy oznacza to jednak, że binarny kwantyfikator większości należy uznać za kwantyfikator logiczny? To zależy, co przez logiczność rozumiemy. Według zwolenników tak zwanej „tezy pierwszego rzędu”,<sup>26</sup> do których należą na przykład Willard van Orman Quine (1976, 1977) czy Leslie Tharp (1975), a na gruncie polskim Jan Woleński (1994a, 1995), logiką jest tylko standardowa logika predykatów pierwszego rzędu i, co za tym idzie, jedynymi logicznymi kwantyfikatorami są  $\exists$  i  $\forall$ . Nie wdając się tu w dyskusję z tym poglądem, jak czynią to na przykład Gila Sher, George Boolos czy Jon Barwise, łatwo zauważyć, że z naszego punktu widzenia taka definicja logiczności kwantyfikatorów jest za wąska, gdyż nie czyni rozróżnienia pomiędzy takimi symbolami jak  $M^2$ , a symbolami predykatywnymi, które mogą być interpretowane przez zupełnie dowolny zbiór. Niech ta jedna pragmatyczna motywacja wystarczy, aby odrzucić definicję logiczności, która jest konsekwencją przyjęcia „tezy pierwszego rzędu”.

Odróżniając kwantyfikatory logiczne od pozallogicznych, kierować się wobec tego będziemy inną ideą: logicznymi nazywać będziemy kwantyfikatory, które interpretowane są w taki sam sposób we wszystkich modelach. Problem jednak w tym, że nie ma to jasnego sensu, bo nawet stary znany kwantyfikator ogólny mógłby okazać się nielogiczny, gdyż jego interpretacja w modelu, którego uniwersum są liczby naturalne, jest inna niż w modelu, którego uniwersum są liczby rzeczywiste. Nie o to więc chodzi. Interpretacja ma być taka sama w modelach o tym samym uniwersum, czyli niezależna od funkcji interpretującej, czy też dokładnie tak samo przez każdą taką funkcję interpretowana. Gila Sher pisze w tym kontekście o *bazie* i *nadbudowie* logiki. Od kwantyfikatorów logicznych wymagać będziemy, aby należały do nadbudowy logiki, czyli tej jej części, która poza i przed modelem jest interpretowana (Sher 1997, s. 163–164). To, co Barwise i Cooper w (1981) uznają za kwantyfikator (na przykład „większość ryb”, a nie „większość”) nie spełnia tego kryterium, więc słusznie nie jest przez nich uznawane za kwantyfikator logiczny. Uznanie „większości” za określnik, a dopiero „większość ryb” za kwantyfikator nie jest jednak jedynym możliwym sposobem analizy zdań języka naturalnego. Uznanie definicji pochodzącej od Lindströma za definicję kwantyfikatorów uogólnionych pozwala potraktować „większość” jak kwantyfikator, a „ryb” jak pierwszy argument tego kwantyfikatora typu  $\langle 1, 1 \rangle$ . Nie ma wtedy przeszkód, aby podać jednolitą interpretację kwantyfikatora większości dla wszystkich modeli o tym samym uniwersum i uznać ten kwantyfikator za kwantyfikator logiczny. Tak też zrobimy w następnych rozdziałach.

<sup>26</sup>Por. Barwise 1985, s. 5–6.

Argumentem innego typu, podawanym przez Barwise'a i Coopera przeciwko uznaniu symbolu większości za symbol logiczny, jest niejasność co do tego, jak należy interpretować ten kwantyfikator w dziedzinach nieskończonych. Więcej na ten temat piszę w rozdziale 6. na stronie 99, tam argumentuję też, że interesujące dla nas zastosowania tego kwantyfikatora unikają tego typu trudności. Choć czasem w literaturze omawiającej ten temat kwantyfikatory uogólnione traktowane są jako stałe pozalogiczne (Barwise i Cooper 1981), to przeważa opcja uznająca je za stałe logiczne (van Benthem 1986, van Eijck 1996, Keenan i Stavi 1986, Keenan i Westerståhl 1997, Westerståhl 1985).



## Część II



## MODELE SKOŃCZONE DLA M

W rozdziale tym przedstawię model zgody większości, w którym zrelatywizowaniu prawdziwości zdania  $p$ , o którego prawdziwość pytamy, do konkretnej populacji, będzie odpowiadało zrelatywizowanie do dziedziny modelu, gdyż zmiana tej populacji będzie równoznaczna ze zmianą dziedziny modelu. Kwantyfikatorem większości będzie kwantyfikator M typu (1). Ponieważ przyjmuję bez dalszej argumentacji, że populacje czy grupy, które rozważamy, będą zawsze skończone, choć liczba członków takiej populacji może być dowolna, prowadzi to do ograniczenia naszych rozważań do modeli, których uniwersum ma moc skończoną. Modele takie nazywać będziemy po prostu modelami skończonymi, a ograniczenie to oznaczymy przez FIN. Przyjęcie FIN jest też zgodne z głównym nurtem badań czyniących użytek z aparatury kwantyfikatorów uogólnionych w analizie języka naturalnego, o których pisałam w poprzednim rozdziale (por. van Benthem 1983a, 1984a, s. 447, 1986, s. 208, 1986a, s. 7; Westerståhl 1984). Ograniczenie rozważań do modeli skończonych nie jest, wbrew pozorom, ułatwieniem z punktu widzenia logicznego. Wiele twierdzeń teoriomodelowych obowiązujących dla modeli o dowolnym uniwersum nie ma swoich odpowiedników dla modeli skończonych. W rozdziale 5.6. zacytuję te wyniki logiczne, które obrazują ograniczenia teorii modeli skończonych. O ile udałoby się więc uniknąć FIN przy zachowaniu intuicji, które nas do przyjęcia FIN skłaniały, to byłoby to z punktu widzenia logicznego wskazane. W rozdziale 6. zaproponuję analizę, która tych ograniczeń w taki właśnie sposób unika. Modele zaproponowane w tym rozdziale są więc pierwszym przybliżeniem, które ze względu na swoją prostotę pozwoli mi pokazać, jak one działają, a także wskazać wady i w konsekwencji zaproponować inne rozwiązanie. Ujęcie tu zaproponowane wzorowane jest na ujęciu Barwise'a i Coopera z tekstu zatytułowanego „Generalized quantifiers and natural language”, choć w szczegółach dość znacznie odbiega od ich modelu.

### 4.1. MODEL STANDARDOWY DLA $L^*(M)$

#### DEFINICJA 4.1. (model standardowy dla $L^*(M)$ )

Modelem standardowym  $\mathfrak{M}$  dla języka  $L^*(M)$  nazywamy parę uporządkowaną  $\langle E, I \rangle$ , gdzie  $E$  jest dowolnym niepustym zbiorem o mocy skończonej, a  $I$  jest funkcją interpretującą wyrażenia tego języka w następujący sposób:

I1. Jeżeli  $R$  jest  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, to  $I(R) \subseteq E^n$ .

I2.  $I(=) = \text{Id}$ , czyli relacja identyczności na  $E$ ,  $\text{Id} = \{ \langle a, b \rangle \in E^2 : a = b \}$ .

I3.  $I(\forall) = \{E\}$ ,  $I(\exists) = \{X \subseteq E : X \neq \emptyset\}$ ,  $I(M) = \{X \subseteq E : |X| > |E \setminus X|\}$ .<sup>1</sup> □

<sup>1</sup>Funkcja  $I$  przyporządkowuje więc symbolom kwantyfikatorowym języka  $L^*(M)$  lokalne kwantyfikatory uogólnione w sensie zdefiniowanym w definicji 3.1. na stronie 35.

## DEFINICJA 4.2. (wartościowanie)

*Wartościowaniem* w modelu  $\mathfrak{M}$  dla  $\mathcal{L}$  nazywamy funkcję  $v$ , która każdej zmiennej indywidualowej z  $\mathcal{L}$  przyporządkowuje elementy uniwersum tego modelu.  $\square$

Poprzez  $v(\overset{a_1}{x_1} \dots \overset{a_n}{x_n})$  oznaczać będą wartościowanie, które jest dokładnie takie jak  $v$ , z wyjątkiem tego, że zmiennym  $x_1, \dots, x_n$  przyporządkowuje odpowiednio  $a_1, \dots, a_n \in E$ .

DEFINICJA 4.3. (spełnianie w modelu standardowym dla  $L^*(M)$ )

Mówimy, że wartościowanie  $v$  spełnia formułę  $\varphi \in \text{FOR}_{L^*(M)}$  w modelu standardowym  $\mathfrak{M}$  dla  $L^*(M)$ ,  $\mathfrak{M} \models \varphi[v]$ , gdy:

S1. Jeżeli  $\varphi = R(x_1, \dots, x_n)$  jest  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, to

$$\mathfrak{M} \models R(x_1, \dots, x_n)[v] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in I(R)$$

S2.  $\mathfrak{M} \models x_1 = x_2[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $v(x_1) = v(x_2)$ .

S3. Jeżeli  $\varphi$  jest formułą,  $x$  jest zmienną, a  $Q \in \{\forall, \exists, M\}$ , to

$$\mathfrak{M} \models Qx\varphi[v] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \{a \in E : \mathfrak{M} \models \varphi[v(\overset{a}{x})]\} \in I(Q);$$

w szczególności:

$$\mathfrak{M} \models \forall x\varphi[v] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \{a \in E : \mathfrak{M} \models \varphi[v(\overset{a}{x})]\} = E;$$

$$\mathfrak{M} \models \exists x\varphi[v] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \{a \in E : \mathfrak{M} \models \varphi[v(\overset{a}{x})]\} \neq \emptyset;$$

$$\mathfrak{M} \models Mx\varphi[v] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } |\{a \in E : \mathfrak{M} \models \varphi[v(\overset{a}{x})]\}| > |E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M} \models \varphi[v(\overset{a}{x})]\}|.$$

S4. Jeżeli  $\varphi, \psi$  są formułami, to

$$\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \psi[v] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models \varphi[v] \text{ i } \mathfrak{M} \models \psi[v]$$

$$\mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi[v] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{M} \models \varphi[v] \text{ lub } \mathfrak{M} \models \psi[v]$$

$$\mathfrak{M} \models \neg\varphi[v] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest tak, że } \mathfrak{M} \models \varphi[v].^2 \quad \square$$

Funkcja interpretująca  $I$ , zdefiniowana tak jak w modelu powyżej, posiada określoną wartość dla symboli relacyjnych, symboli kwantyfikatorowych i identyczności. Także niektórym formułom złożonym, nie będącym zdaniami, odpowiadają zbiory będące boolowskimi kombinacjami podzbiorów uniwersum, których złożoność odpowiada złożoności tych formuł. Jest tak na przykład dla formuł  $\varphi$  z jedną zmienną wolną, nie zawierających kwantyfikatorów. Przyjmijmy, że w takich przypadkach  $I(\varphi)$  jest tą właśnie kombinacją mnogościową podzbiorów uniwersum modelu. Poniższa definicja podaje odpowiednie zależności.

DEFINICJA 4.4. (funkcja  $I$  dla wybranych formuł złożonych języka  $L^*(M)$ )

1. Jeżeli  $\varphi$  jest formułą z jedną zmienną wolną, nie zawierającą kwantyfikatorów, to  $I(\varphi)$  przyjmuje następujące wartości:

(a) jeżeli  $\varphi = S(x)$ , gdzie  $S$  jest dowolnym predykatem, to  $I(\varphi) = I(S)$ ,

(b) jeżeli  $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ , gdzie  $\psi_1, \psi_2$  są formułami z jedną, tą samą zmienną wolną, nie zawierającymi kwantyfikatorów, to  $I(\varphi) = I(\psi_1) \cap I(\psi_2)$ ,

<sup>2</sup>Zdefiniowane tutaj pojęcie *spełniania* jest często utożsamiane z pojęciem *prawdy w modelu* (por. Hodges (1983, s. 53)). Nie będę stosowała tej terminologii, gdyż zadaniem moim jest zdefiniowanie i logiczna analiza jednego z kryteriów prawdy i właśnie *spełnianie* w tej definicji będzie użyte. Używanie pojęcia *prawdy w modelu* mogłoby w pewnych kontekstach wywołać mętlik terminologiczny.

- (c) jeżeli  $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ , gdzie  $\psi_1, \psi_2$  są formułami z jedną, tą samą zmienną wolną, nie zawierającymi kwantyfikatorów, to  $I(\varphi) = I(\psi_1) \cup I(\psi_2)$ ,
- (d) jeżeli  $\varphi = \neg\psi_1$ , gdzie  $\psi_1$  jest formułą z jedną zmienną wolną, nie zawierającą kwantyfikatorów, to  $I(\varphi) = E \setminus I(\psi_1)$ .
2. Jeżeli  $\varphi(x_2, \dots, x_n) = \forall x_1 R(x_1, \dots, x_n)$ , gdzie  $R(x_1, \dots, x_n)$  jest dowolnym  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, to  
 $I(\varphi) = \{ \langle a_2, \dots, a_n \rangle \in E^{n-1} : E \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_n\} \subseteq I(R) \}$ .
3. Jeżeli  $\varphi(x_2, \dots, x_n) = \exists x_1 R(x_1, \dots, x_n)$ , gdzie  $R(x_1, \dots, x_n)$  jest dowolnym  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, to  
 $I(\varphi) = \{ \langle a_2, \dots, a_n \rangle \in E^{n-1} : X \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_n\} \subseteq I(R) \text{ i } X \neq \emptyset \}$ .
4. Jeżeli  $\varphi(x_2, \dots, x_n) = Mx_1 R(x_1, \dots, x_n)$ , gdzie  $R(x_1, \dots, x_n)$  jest dowolnym  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, to  
 $I(\varphi) = \{ \langle a_2, \dots, a_n \rangle \in E^{n-1} : X \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_n\} \subseteq I(R) \text{ i } |X| > |E \setminus X| \}$ .  $\square$

W przypadku formuł atomowych nie zawierających kwantyfikatorów funkcja ta jest dobrze zdefiniowana, nie dałoby się jej jednak w automatyczny sposób rozszerzyć na formuły zawierające więcej zmiennych wolnych, gdyż na przykład  $\varphi(x, y)$  może mieć postać  $P(x) \vee R(y)$  i wtedy  $I(\varphi)$  nie dałoby się w prosty sposób zrekonstruować z  $I(P)$  i  $I(R)$ , a w szczególności nie w sposób przydatny nam w dalszej części pracy. W przeciwieństwie do tego definicja powyższa wraz z przyjętą definicją spełniania pozwala nam zauważyć, że:

#### TWIERDZENIE 4.5.

1. Gdy  $\varphi(x)$  jest formułą z jedną zmienną wolną nie zawierającą kwantyfikatorów, to dla dowolnego modelu  $\mathfrak{M}$  dla  $L^*(M)$  i dowolnego wartościowania  $v$ :

$$\mathfrak{M} \models \varphi(x)[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad v(x) \in I(\varphi(x)).$$

2. Gdy  $\varphi(x_2, \dots, x_n)$  jest formułą z  $n - 1$  zmiennymi wolnymi, składającą się z jednego kwantyfikatora, zmiennej i formuły atomowej, to

$$\mathfrak{M} \models \varphi(x_2, \dots, x_n)[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \langle v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in I(\varphi(x_2, \dots, x_n)).$$

#### DOWÓD:

1. Dowód pierwszej części przebiega przez indukcję ze względu na złożoność formuł:
- (a) przypadki dla formuł atomowych wynikają bezpośrednio z definicji spełniania;
- (b)  $\psi_1(x), \psi_2(x)$  są formułami z jedną, tą samą zmienną wolną  $x$ ,  
a  $\varphi(x) = \psi_1(x) \wedge \psi_2(x)$ :  
 $\mathfrak{M} \models \varphi(x)[v]$  wtw  $\mathfrak{M} \models \psi_1(x)[v]$  i  $\mathfrak{M} \models \psi_2(x)[v]$   
wtw  $v(x) \in I(\psi_1(x))$  i  $v(x) \in I(\psi_2(x))$  wtw  $v(x) \in I(\varphi(x))$ ;<sup>3</sup>
- (c) dowód dla alternatywy i negacji przebiega analogicznie do koniunkcji.

<sup>3</sup>Dla zwiększenia przejrzystości używać będę w dowodach skrótu „wtw” dla słów „wtedy i tylko wtedy, gdy”.

## 2. Dowód przez przypadki:

- (a)  $R(x_1, \dots, x_n)$  jest  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym,  
 a  $\varphi(x_2, \dots, x_n) = \forall x_1 R(x_1, \dots, x_n)$ :  
 $\mathfrak{M} \models \forall x_1 R(x_1, \dots, x_n)[v]$  wtw  $\{a \in E : \mathfrak{M} \models R(x_1, \dots, x_n)[v(x_1^a)]\} = E$   
 wtw  $\{a \in E : \langle a, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in I(R)\} = E$  wtw  $E \times \{v(x_2)\} \times \dots \times \{v(x_n)\} \subseteq I(R)$   
 wtw  $\langle v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in I(\varphi(x_2, \dots, x_n))$ .
- (b) dowód dla  $\exists$  przebiega analogicznie do  $\forall$ ;
- (c)  $R(x_1, \dots, x_n)$  jest  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym,  
 a  $\varphi(x_2, \dots, x_n) = \text{Mx}_1 R(x_1, \dots, x_n)$ :  
 $\mathfrak{M} \models \text{Mx}_1 R(x_1, \dots, x_n)[v]$   
 wtw  $|\{a \in E : \mathfrak{M} \models R(x_1, \dots, x_n)[v(x_1^a)]\}| > |E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M} \models R(x_1, \dots, x_n)[v(x_1^a)]\}|$   
 wtw  $|\{a \in E : \langle a, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in I(R)\}| > |E \setminus \{a \in E : \langle a, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in I(R)\}|$   
 wtw  $\langle v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in I(\varphi(x_2, \dots, x_n))$ .  $\square$

Ponieważ spełnianie formuł zależy tylko i wyłącznie od wartościowania zmiennych występujących w nich jako zmienne wolne, spełnianie zdań jest więc niezależne od wartościowań, to znaczy jest spełnione przez każde wartościowanie wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełnione przez dowolne z nich. Korzystając z tego będziemy czasem mówili, że model spełnia zdanie, mając na myśli to, że dowolne wartościowanie spełnia to zdanie w modelu.

## DEFINICJA 4.6. (spełnianie zdań przez model)

Jeżeli  $\varphi$  jest dowolnym zdaniem języka  $\mathcal{L}$ , to dla dowolnego modelu  $\mathfrak{M}$  dla  $\mathcal{L}$  mówimy, że *model  $\mathfrak{M}$  spełnia zdanie  $\varphi$* ,  $\mathfrak{M} \models \varphi$ , wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wartościowania  $v$ ,  $\mathfrak{M} \models \varphi[v]$ .  $\square$

Wyróżnione symbole predykatywne  $A_1, A_2, \dots$  służą, zgodnie z przyjętą na stronie 31 definicją funkcji tłumaczącej  $T$ , do interpretacji formuł typu  $A_i(x)$  w modelach zamierzonych, czyli takich, których uniwersum jest zbiorem ludzi, poprzez: „osoba  $x$  uznaje zdanie  $p_i$ ”.  $\text{Mx} A_1(x)$  odpowiada wobec tego zdaniu „większość członków populacji  $m$  uznaje zdanie  $p_1$ ”, gdzie populacja  $m$  stanowi uniwersum modelu  $\mathfrak{M}$ . Przyjmując powyższe, możemy zdefiniować konsensualne kryterium prawdy w następujący sposób:

## DEFINICJA 4.7. (kryterium prawdy przez zgodę większości w modelu standardowym)

Niech  $\mathfrak{M}$  będzie modelem, którego uniwersum stanowi wyróżniona populacja, a  $\varphi(x) = T(U(\alpha, x))$ :

Zdanie  $\alpha$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M} \models \text{Mx} \varphi(x). \quad \square$$

W szczególności w przypadku zdań atomowych definicja ta przybierze następującą postać:

Zdanie  $p_1$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M} \models \text{Mx} A_1(x).$$

Do zdefiniowania kryterium prawdy w modelu standardowym dysponujemy jedynie relacją spełniania. Musimy wobec tego przyjąć, że zdanie jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest prawdziwe.

Aby to formalne ujęcie mogło zostać uznane za adekwatne, musi ono być zgodne przynajmniej z podstawowymi intuicjami, jakie wiążemy z uznawaniem zdań. Jedną z takich silnych intuicji wydaje się przekonanie o tym, że nie co do każdego możliwego, a nawet wypowiedzianego zdania potrafimy określić swój stosunek, to znaczy zdecydować się, czy uznajemy je czy nie; w wielu wypadkach pozostajemy niezdecydowani. Wystarczy rozważyć następujący prosty przykład, aby się przekonać, że ta intuicja została pogwałcona, gdybyśmy przyjęli model uznawania przez większość bazujący na modelu standardowym.

#### PRZYKŁAD 4.8.

Weźmy pod uwagę zdanie  $p_1$ , na temat którego nikt z wyróżnionej populacji nie ma zdecydowanego poglądu. W takim wypadku zbiór osób uznających zdanie  $p_1$ ,  $I(A_1)$ , będzie zbiorem pustym, a co za tym idzie zdanie  $p_1$  będzie – zgodnie z powyższą definicją kryterium prawdy przez zgodę większości – fałszywe, gdyż nie jest tak, że  $|I(A_1)| > |E \setminus I(A_1)|$ , czyli nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models Mx A_1(x) [v]$ .  $\square$

Skoro jednak nikt z wyróżnionej populacji nie potrafił wypowiedzieć się „za” lub „przeciw” zdaniu  $p_1$ , to spodziewalibyśmy się, że podobne niezdecydowanie dotyczyło będzie i jego negacji – nie  $p_1$ . Tymczasem z prawa tożsamości fałszu i negacji prawdy wynika, że zdanie nie  $p_1$  jest prawdziwe, skoro  $p_1$  jest fałszywe. Prawdziwym okazuje się więc zdanie, co do którego wszyscy są niezdecydowani. Co więcej, sytuacja ta jest nie do odróżnienia na gruncie modelu standardowego od sytuacji, w której wszyscy odrzucają zdanie  $p_1$ . Pod groźbą konfliktu z prawem równoważności fałszu i negacji prawdy, model standardowy wymusza więc na nas przyjęcie, że każdy potrafi zdecydować, czy uznaje czy odrzuca dowolne zdanie. Taka konsekwencja wydaje się dyskwalifikować ten model jako adekwatną idealizację uznawania i skłania ku szukaniu innych rozwiązań. Próbę takiej modyfikacji modelu standardowego, która pozwoli zdać relację z powyższych intuicji, przedstawię w następnym podrozdziale. Propozycja ta polega na potraktowaniu predykatów  $A_1, A_2, \dots$  jako predykatów częściowych (nie w pełni zdefiniowanych) i zinterpretowaniu ich poprzez modele częściowe.

## 4.2. MODEL CZĘŚCIOWY DLA $L^*(M)$

Zanim przedstawię formalną definicję modelu częściowego, postaram się pokazać, jakie intuicje mam nadzieję w nim odzwierciedlić. Ma to być model takiej demokracji, w której większość jest rozumiana jako większość uprawnionych do głosowania, a nie po prostu większość głosujących. Uprawnieni do głosowania tworzą populację i głosują zarówno „za” jak i „przeciw”. Jeżeli zbyt wiele osób wstrzymało się od głosu i ani zwolennicy, ani przeciwnicy nie stanowią większości, to zdanie nie będzie uznane ani za prawdziwe, ani za fałszywe. No dobrze, ale skoro głosowanie się odbyło i zdanie nie otrzymało większości głosów, to dlaczego nie uznać go po prostu za fałszywe. Przyjęcie takiego rozwiązania byłoby równoznaczne z ignorowaniem tych, którzy nie są zdecydowani i mogą się jeszcze zdecydować na poparcie tego zdania. Poza tym, skoro to zdanie byłoby fałszywe, to chcielibyśmy, aby jego negacja była prawdziwa. Do uznania jego negacji zobowiązani są jednak tylko ci, którzy odrzucili to zdanie, a więc mniejszość. Przyjęlibyśmy więc za prawdziwe

zdanie, które nie jest uznawane przez większość. Aby uniknąć tej sprzeczności, musielibyśmy zrezygnować z równoważności negacji prawdy i fałszu, a to cena, której nie chcemy zapłacić. Model, który przedstawię poniżej, jest właśnie modelem, w którym ci niezdecydowani często odgrywają kluczową rolę. Wyraża się to przede wszystkim w interpretacji kwantyfikatorów, dużego i małego: zdanie „Wszyscy uznają zdanie  $p$ ” będzie spełnione w modelu wtedy, gdy uznający zdanie  $p$  będą stanowili całe uniwersum modelu. Oprócz spełniania zdefiniujemy jednak jeszcze inną relację pomiędzy modelem a formułami języka – *odrzućcie*. Zdanie powyższe będzie odrzucone przez model nie wtedy, gdy nie będzie spełnione, ale gdy ktokolwiek odrzuci zdanie  $p$ . W sytuacji więc, gdy część, ale nie wszyscy, uznają zdanie  $p$  oraz nikt go nie odrzuci, zdanie „Wszyscy uznają zdanie  $p$ ” nie będzie odrzucone, mimo iż nie jest tak, że wszyscy uznają zdanie  $p$ . Zostawiamy tu miejsce na to, że wszyscy niezdecydowani mogą się zdecydować je poprzeć i wtedy zdanie to byłoby spełnione. Gdy jednak choćby jedna osoba spośród niezdecydowanych odrzuci zdanie  $p$ , to zdanie „Wszyscy uznają zdanie  $p$ ” jest przez model odrzucone, gdyż nie ma już szansy na to, aby otrzymać zgodę powszechną. Formalnie tej zmianie z niezdecydowania na zdecydowanie będzie odpowiadało rozszerzanie funkcji interpretującej  $I$ , o czym piszę w rozdziale 4.3.2.

Mówimy tu o tej samej populacji, nawet gdy część jej członków zmieni zdanie z niezdecydowanego na zdecydowane. Dzięki prawostronnej monotoniczności kwantyfikatora większości żadna taka zmiana nie wpłynie na zmianę prawdziwości zdania – dodawanie elementów do zbioru, który już i tak stanowi większość, nie zaburzy jego większościowego charakteru. Możemy wobec tego mówić o jednej populacji, gdy rozważamy to, jak jej członkowie z niezdecydowanych nabierają przekonania co do zdania  $p$  lub je odrzucają.

Pozostaje jednak sytuacja, gdy wszyscy już się zdecydowali i nie ma rozstrzygnięcia, gdyż dokładnie połowa jest „za” i połowa „przeciw”. Zdanie  $p$  nie będzie wtedy ani prawdziwe, ani fałszywe. W praktyce, gdy mamy do czynienia z dużą grupą, jak na przykład jest w przypadku wyborów powszechnych, taka sytuacja jest tak mało prawdopodobna, że można nie zwracać sobie głowy ryzykiem jej wystąpienia i rzadko kto to robi. W przypadku małej grupy, na przykład kilkusobowej, jest to już bardzo realna ewentualność i stąd zazwyczaj dba się o to, aby grupy podejmujące kolektywne decyzje składały się z nieparzystej liczby członków, co pozwala uniknąć opisanej sytuacji. My rozpatrujemy sytuację ogólną i dlatego musimy odpowiedzieć na powyżej postawione pytanie – zgodnie z interpretacją kwantyfikatora większości w modelu częściowym zdanie, na które nie ma zgody większości, ani też większość go nie odrzuca, nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe. Ze względu jednak na to, że badamy kryterium pragmatyczne, powyższe argumenty praktyczne czynią godnym zbadania sytuację, w której ograniczamy rozważania do modeli o uniwersum nieparzystym. Jak łatwo przypuścić, własności logiczne kryterium prawdy przez zgodę większości zmieniają się diametralnie. Założenie mające podobny skutek przyjmujemy w rozdziale 7 (patrz też twierdzenie 4.33. na stronie 78). Na razie jednak rozważamy modele o dowolnym skończonym uniwersum.

DEFINICJA 4.9. (model częściowy dla  $L^*(M)$ )

Modelem częściowym  $\mathfrak{M}_c$  dla języka  $L^*(M)$  nazywamy  $\langle E, I_c, p_1, p_2 \rangle$ , uporządkowaną czwórkę, gdzie  $E$  jest dowolnym niepustym zbiorem o mocy skończonej, a  $I_c, p_1, p_2$  są funkcjami interpretującymi wyrażenia tego języka w następujący sposób:

II. Jeżeli  $R$  jest  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, to

$$I_c(R) = \langle \bar{R}^+, \bar{R}^- \rangle, \text{ gdzie } \bar{R}^+ \subseteq E^n, \bar{R}^- \subseteq E^n \setminus \bar{R}^+, \quad p_1(R) = \bar{R}^+, \quad p_2(R) = \bar{R}^-.$$



12.  $I_c(=) = (\{\langle a, b \rangle \in E^2 : a = b\}, E^2 \setminus \{\langle a, b \rangle \in E^2 : a = b\})$ ,  
 $p_1(=) = \{\langle a, b \rangle \in E^2 : a = b\}$ ,  $p_2(=) = E^2 \setminus \{\langle a, b \rangle \in E^2 : a = b\}$ .  
 Jest to relacja totalna.<sup>4</sup>
13.  $I_c(\forall) = (\{E\}, \wp(E) \setminus \{\emptyset\})$ ,  $p_1(\forall) = \{E\}$ ,  $p_2(\forall) = \wp(E) \setminus \{\emptyset\}$ ;  
 $I_c(\exists) = (\wp(E) \setminus \{\emptyset\}, \{E\})$ ,  $p_1(\exists) = \wp(E) \setminus \{\emptyset\}$ ,  $p_2(\exists) = \{E\}$ ;  
 $I_c(M) = (\{X \subseteq E : |X| > |E \setminus X|\}, \{X \subseteq E : |X| > |E \setminus X|\})$ ,  
 $p_1(M) = p_2(M) = \{X \subseteq E : |X| > |E \setminus X|\}$ . □

Definicja wartościowania pozostaje taka sama jak w poprzednim rozdziale (strona 54), zmienia się natomiast definicja spełniania. Do scharakteryzowania modelu nie wystarczy podać, kiedy wartościowanie spełnia formułę, i przyjąć, że nie spełnia w przeciwnym wypadku. Taka charakterystyka pokrywałaby się z charakterystyką modelu standardowego. Modele częściowe pozwalają na wyróżnienie sytuacji, w których wartościowanie *odrzuca* formułę w modelu. Gdyby podobny termin zdefiniować w modelu standardowym, to pokrywałby się on z sytuacją, w której wartościowanie nie spełnia formuły w modelu. Tu jest inaczej.

#### DEFINICJA 4.10. (spełnianie w modelu częściowym dla $L^*(M)$ )

Mówimy, że wartościowanie  $v$  spełnia (odrzuca) formułę  $\varphi \in \text{FOR}_{L^*(M)}$  w modelu częściowym  $\mathfrak{M}_c$  dla  $L^*(M)$ ,  $\mathfrak{M}_c \models \varphi[v]$  ( $\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v]$ ), gdy:

- S1. Jeżeli  $\varphi = R(x_1, \dots, x_n)$  jest  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, to  
 $\mathfrak{M}_c \models R(x_1, \dots, x_n)[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(R)$   
 $\mathfrak{M}_c \not\models R(x_1, \dots, x_n)[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in p_2(R)$ .
- S2.  $\mathfrak{M}_c \models x_1 = x_2[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $v(x_1) = v(x_2)$ ,  
 $\mathfrak{M}_c \not\models x_1 = x_2[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $v(x_1) \neq v(x_2)$ .
- S3. Jeżeli  $\varphi$  jest formułą,  $x$  zmienną, a  $Q$  kwantyfikatorem, to  
 $\mathfrak{M}_c \models Qx \varphi[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \varphi[v(\frac{a}{x})]\} \in p_1(Q)$ ,  
 $\mathfrak{M}_c \not\models Qx \varphi[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v(\frac{a}{x})]\} \in p_2(Q)$ ;  
 w szczególności:  
 $\mathfrak{M}_c \models \forall x \varphi[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \varphi[v(\frac{a}{x})]\} = E$ ,  
 $\mathfrak{M}_c \not\models \forall x \varphi[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v(\frac{a}{x})]\} \neq \emptyset$ ;  
 $\mathfrak{M}_c \models \exists x \varphi[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \varphi[v(\frac{a}{x})]\} \neq \emptyset$ ,  
 $\mathfrak{M}_c \not\models \exists x \varphi[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v(\frac{a}{x})]\} = E$ ;  
 $\mathfrak{M}_c \models Mx \varphi[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  
 $|\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \varphi[v(\frac{a}{x})]\}| > |E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \varphi[v(\frac{a}{x})]\}|$ ,  
 $\mathfrak{M}_c \not\models Mx \varphi[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  
 $|\{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v(\frac{a}{x})]\}| > |E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v(\frac{a}{x})]\}|$ .

<sup>4</sup>Totalną nazywamy relację, która jest interpretacją  $n$ -argumentowego symbolu relacyjnego, taką że  $p_2(R) = E^n \setminus p_1(R)$ .

S4. Jeżeli  $\varphi, \psi$  są formułami, to

$\mathfrak{M}_c \models \varphi \wedge \psi [v]$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$\mathfrak{M}_c \models \varphi [v]$ i $\mathfrak{M}_c \models \psi [v]$ ,
$\mathfrak{M}_c \not\models \varphi \wedge \psi [v]$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$\mathfrak{M}_c \not\models \varphi [v]$ lub $\mathfrak{M}_c \not\models \psi [v]$ ;
$\mathfrak{M}_c \models \varphi \vee \psi [v]$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$\mathfrak{M}_c \models \varphi [v]$ lub $\mathfrak{M}_c \models \psi [v]$ ,
$\mathfrak{M}_c \not\models \varphi \vee \psi [v]$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$\mathfrak{M}_c \not\models \varphi [v]$ i $\mathfrak{M}_c \not\models \psi [v]$ ;
$\mathfrak{M}_c \models \neg\varphi [v]$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$\mathfrak{M}_c \not\models \varphi [v]$ ,
$\mathfrak{M}_c \not\models \neg\varphi [v]$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$\mathfrak{M}_c \models \varphi [v]$ .

□

W przypadku zdań mówić będziemy, że model częściowy spełnia zdanie, mając na myśli to, że dowolne wartościowanie spełnia to zdanie w modelu częściowym (por. definicja 4.6. na stronie 56). Podobnie jak w przypadku modelu standardowego, możemy rozszerzyć definicję funkcji  $I_c$  na pewne formuły, poprzez zdefiniowanie jej składowych funkcji  $p_1$  i  $p_2$  w następujący sposób:

DEFINICJA 4.11. (funkcja  $I_c$  dla wybranych formuł złożonych języka  $L^*(M)$ )

1. Jeżeli  $\varphi$  jest formułą z jedną zmienną wolną, nie zawierającą kwantyfikatorów, to  $p_1(\varphi)$  i  $p_2(\varphi)$  przyjmują następujące wartości:
  - (a) jeżeli  $\varphi = S(x)$ , gdzie  $S$  jest dowolnym predykatem, to  
 $p_1(\varphi) = p_1(S)$ ,  $p_2(\varphi) = p_2(S)$ ;
  - (b) jeżeli  $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ , gdzie  $\psi_1, \psi_2$  są formułami z jedną, tą samą zmienną wolną, nie zawierającymi kwantyfikatorów, to  
 $p_1(\varphi) = p_1(\psi_1) \cap p_1(\psi_2)$ ,  $p_2(\varphi) = p_2(\psi_1) \cup p_2(\psi_2)$ ;
  - (c) jeżeli  $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ , gdzie  $\psi_1, \psi_2$  są formułami z jedną, tą samą zmienną wolną, nie zawierającymi kwantyfikatorów, to  
 $p_1(\varphi) = p_1(\psi_1) \cup p_1(\psi_2)$ ,  $p_2(\varphi) = p_2(\psi_1) \cap p_2(\psi_2)$ ;
  - (d) jeżeli  $\varphi = \neg\psi_1$ , gdzie  $\psi_1$  jest formułą z jedną zmienną wolną, nie zawierającą kwantyfikatorów, to  
 $p_1(\varphi) = p_2(\psi_1)$ ,  $p_2(\varphi) = p_1(\psi_1)$ .
2. Jeżeli  $\varphi(x_2, \dots, x_n) = \forall x_1 R(x_1, \dots, x_n)$ , gdzie  $R(x_1, \dots, x_n)$  jest dowolnym  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, to  
 $p_1(\varphi) = \{(a_2, \dots, a_n) \in E^{n-1} : E \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_n\} \subseteq p_1(R)\}$ ,  
 $p_2(\varphi) = \{(a_2, \dots, a_n) \in E^{n-1} : X \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_n\} \subseteq p_2(R) \text{ i } X \neq \emptyset\}$ .
3. Jeżeli  $\varphi(x_2, \dots, x_n) = \exists x_1 R(x_1, \dots, x_n)$ , gdzie  $R(x_1, \dots, x_n)$  jest dowolnym  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, to  
 $p_1(\varphi) = \{(a_2, \dots, a_n) \in E^{n-1} : X \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_n\} \subseteq p_1(R) \text{ i } X \neq \emptyset\}$ ,  
 $p_2(\varphi) = \{(a_2, \dots, a_n) \in E^{n-1} : E \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_n\} \subseteq p_2(R)\}$ .
4. Jeżeli  $\varphi(x_2, \dots, x_n) = Mx_1 R(x_1, \dots, x_n)$ , gdzie  $R(x_1, \dots, x_n)$  jest dowolnym  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, to  
 $p_1(\varphi) = \{(a_2, \dots, a_n) \in E^{n-1} : X \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_n\} \subseteq p_1(R) \text{ i } |X| > |E \setminus X|\}$ ,  
 $p_2(\varphi) = \{(a_2, \dots, a_n) \in E^{n-1} : X \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_n\} \subseteq p_2(R) \text{ i } |X| > |E \setminus X|\}$ .

We wszystkich tych przypadkach  $I_c(\varphi) = \langle p_1(\varphi), p_2(\varphi) \rangle$ .

□

I podobnie jak w przypadku modelu standardowego, połączymy powyższą definicję z definicją spełniania następującym twierdzeniem, z którego to raczej niż z definicji spełniania będziemy w praktyce korzystać:

TWIERDZENIE 4.12.

1. Gdy  $\varphi(x)$  jest formułą z jedną zmienną wolną, nie zawierającą kwantyfikatorów, to dla dowolnego modelu  $\mathfrak{M}_c$  dla  $L^*(M)$  i dowolnego wartościowania  $v$ :

$$\mathfrak{M}_c \models \varphi(x) [v] \quad \text{wtw} \quad v(x) \in p_1(\varphi(x))$$

oraz

$$\mathfrak{M}_c \not\models \varphi(x) [v] \quad \text{wtw} \quad v(x) \in p_2(\varphi(x)).$$

2. Gdy  $\varphi(x_2, \dots, x_n)$  jest formułą z  $n - 1$  zmiennymi wolnymi, składającą się z jednego kwantyfikatora, zmiennej i formuły atomowej, to

$$\mathfrak{M}_c \models \varphi(x_2, \dots, x_n) [v] \quad \text{wtw} \quad \langle v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(\varphi(x_2, \dots, x_n))$$

oraz

$$\mathfrak{M}_c \not\models \varphi(x_2, \dots, x_n) [v] \quad \text{wtw} \quad \langle v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_2(\varphi(x_2, \dots, x_n)).$$

DOWÓD:

1. Dowód przebiega przez indukcję ze względu na złożoność formuł:

(a) krok dla formuł atomowych wynika bezpośrednio z definicji spełniania;

- (b)  $\psi_1(x), \psi_2(x)$  są formułami z jedną, tą samą, zmienną wolną  $x$ , a  $\varphi(x) = \psi_1(x) \wedge \psi_2(x)$ :
- $$\mathfrak{M}_c \models \varphi(x) [v] \quad \text{wtw} \quad \mathfrak{M}_c \models \psi_1(x) [v] \quad \text{i} \quad \mathfrak{M}_c \models \psi_2(x) [v]$$
- $$\text{wtw} \quad v(x) \in p_1(\psi_1(x)) \quad \text{i} \quad v(x) \in p_1(\psi_2(x)) \quad \text{wtw} \quad v(x) \in p_1(\psi_1(x)) \cap p_1(\psi_2(x))$$
- $$\text{wtw} \quad v(x) \in p_1(\varphi(x)),$$
- $$\mathfrak{M}_c \not\models \varphi(x) [v] \quad \text{wtw} \quad \mathfrak{M}_c \not\models \psi_1(x) [v] \quad \text{lub} \quad \mathfrak{M}_c \not\models \psi_2(x) [v]$$
- $$\text{wtw} \quad v(x) \in p_2(\psi_1(x)) \quad \text{lub} \quad v(x) \in p_2(\psi_2(x)) \quad \text{wtw} \quad v(x) \in p_2(\psi_1(x)) \cup p_2(\psi_2(x))$$
- $$\text{wtw} \quad v(x) \in p_2(\varphi(x));$$

(c) dowód dla alternatywy i negacji przebiega analogicznie do koniunkcji.

2. Dowód przez przypadki:

- (a)  $R(x_1, \dots, x_n)$  jest dowolnym  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, a  $\varphi(x_2, \dots, x_n) = \forall x_1 R(x_1, \dots, x_n)$ :
- $$\mathfrak{M}_c \models \forall x_1 R(x_1, \dots, x_n) [v] \quad \text{wtw} \quad \{a \in E : \mathfrak{M}_c \models R(x_1, \dots, x_n) [v(x_1^a)]\} = E$$
- $$\text{wtw} \quad \{a \in E : \langle a, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(R)\} = E$$
- $$\text{wtw} \quad E \times \{v(x_2)\} \times \dots \times \{v(x_n)\} \subseteq p_1(R)$$
- $$\text{wtw} \quad \langle v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(\varphi(x_2, \dots, x_n)),$$
- $$\mathfrak{M}_c \not\models \forall x_1 R(x_1, \dots, x_n) [v] \quad \text{wtw} \quad \{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models R(x_1, \dots, x_n) [v(x_1^a)]\} \neq \emptyset$$
- $$\text{wtw} \quad \{a \in E : \langle a, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_2(R)\} \neq \emptyset$$
- $$\text{wtw} \quad X \times \{v(x_2)\} \times \dots \times \{v(x_n)\} \subseteq p_2(R) \quad \text{i} \quad X \neq \emptyset$$
- $$\text{wtw} \quad \langle v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_2(\varphi(x_2, \dots, x_n));$$

(b) dowód dla  $\exists$  przebiega analogicznie do  $\forall$ ;

(c)  $R(x_1, \dots, x_n)$  jest dowolnym  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym,

a  $\varphi(x_2, \dots, x_n) = Mx_1 R(x_1, \dots, x_n)$ :

$\mathfrak{M}_c \models Mx_1 R(x_1, \dots, x_n)[v]$

wtw  $|\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models R(x_1, \dots, x_n)[v(\frac{a}{x_1})]\}| > |E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M}_c \models R(x_1, \dots, x_n)[v(\frac{a}{x_1})]\}|$

wtw  $|\{a \in E : \langle a, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(R)\}| > |E \setminus \{a \in E : \langle a, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(R)\}|$

wtw  $\langle v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(\varphi(x_2, \dots, x_n))$ ,

$\mathfrak{M}_c \not\models Mx_1 R(x_1, \dots, x_n)[v]$

wtw  $|\{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models R(x_1, \dots, x_n)[v(\frac{a}{x_1})]\}| > |E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models R(x_1, \dots, x_n)[v(\frac{a}{x_1})]\}|$

wtw  $|\{a \in E : \langle a, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_2(R)\}| > |E \setminus \{a \in E : \langle a, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_2(R)\}|$

wtw  $\langle v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_2(\varphi(x_2, \dots, x_n))$ .  $\square$

Nie tylko symbole relacyjne, ale i kwantyfikatory otrzymują częściową interpretację. Gdybyśmy przyjęli częściową interpretację jedynie symboli relacyjnych i standardową interpretację kwantyfikatorów, to dopuścilibyśmy sytuację, w której zdanie  $\forall x R(x)$  jest odrzucone tylko dlatego, że  $p_1(R)$  jest podzbiorem właściwym  $E$ , nawet gdy  $p_2(R) = \emptyset$ . Jednym z możliwych rozszerzeń interpretacji  $I_c$  do interpretacji totalnej, czyli takiej, przy której  $p_2(R) = E \setminus p_1(R)$ ,<sup>5</sup> jest taka interpretacja  $I'_c$ , przy której  $p'_1(R) = E$ , a więc zdanie  $\forall x R(x)$  jest spełnione – przy rozszerzeniu interpretacji zdanie z odrzuconego zmieniłoby się na spełnione. Logiki częściowe, które przy rozszerzeniu interpretacji do interpretacji totalnej nie zachowują wartościowań zdań, nazywam niemonotonicznymi (patrz definicja 4.27. na stronie 72). W rozdziale 4.3. udowodnię (twierdzenie 4.26.), że logika częściowa zdefiniowana tak jak powyżej rzeczywiście jest monotoniczna. Tu pokażę to tylko na przykładzie  $\forall x R(x)$ . Zdanie to nie będzie odrzucone przez taki model częściowy jak opisany powyżej, gdyż, aby tak się stało,  $p_2(R)$  musiałoby być niepuste. Odpowiada to tej intuicji, że  $p_2(R) \neq \emptyset$  niejako już przesądza wynik głosowania nad  $\forall x R(x)$ . Częściowa interpretacja zarówno symboli relacyjnych, jak i kwantyfikatorów jest więc adekwatnym modelem dla zobrazowania głosowania, które jest rozciągnięte w czasie i choć ci, którzy już zagłosowali, nie mogą swojego głosu zmienić, to głos pozostałych ma często decydujące znaczenie. Czasem jednak nawet z niewielkiej liczby głosów można przekonać się o wyniku całego głosowania.

Mimo częściowej interpretacji, łatwo pokazać na podstawie powyższej definicji spełniania, że kwantyfikatory mały i duży pozostają dualne wobec siebie:

FAKT 4.13.

Dla dowolnego modelu częściowego  $\mathfrak{M}_c$  dla  $L^*(M)$  i dowolnego wartościowania  $v$ :

$$\mathfrak{M}_c \models \neg \forall x \neg \varphi[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \mathfrak{M}_c \models \exists x \varphi[v]$$

oraz

$$\mathfrak{M}_c \not\models \neg \forall x \neg \varphi[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \mathfrak{M}_c \not\models \exists x \varphi[v]. \quad \square$$

Kwantyfikator większości jest natomiast samodualny:

<sup>5</sup>Dokładne definicje tych terminów znajdują się na stronie 70.

FAKT 4.14.

Dla dowolnego modelu częściowego  $\mathfrak{M}_c$  dla  $L^*(M)$  i dowolnego wartościowania  $v$ :

$$\mathfrak{M}_c \models \neg Mx \neg \varphi [v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \mathfrak{M}_c \models Mx \varphi [v]$$

oraz

$$\mathfrak{M}_c \not\models \neg Mx \neg \varphi [v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \mathfrak{M}_c \not\models Mx \varphi [v]. \quad \square$$

Poniższy przykład pokaże, jak taki model częściowy działa:

PRZYKŁAD 4.15.

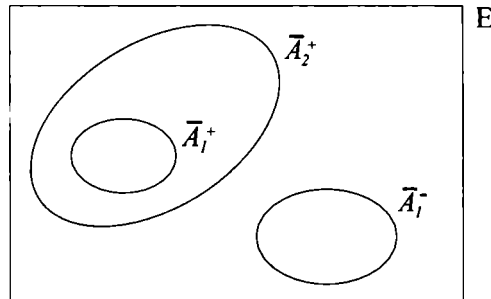
Dla dowolnego modelu częściowego  $\mathfrak{M}_c$  dla  $L^*(M)$ :

$$\mathfrak{M}_c \models \forall x(A_1(x) \rightarrow A_2(x)) \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \bar{A}_1^- \cup \bar{A}_2^+ = E.$$

Wynika to z następujących obliczeń:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_c \models \forall x(A_1(x) \rightarrow A_2(x)) [v] \\ \text{wtw } p_1(A_1(x) \rightarrow A_2(x)) = E & \quad [\text{tw. 4.12.}] \\ \text{wtw } p_2(A_1(x) \cup p_1(A_2(x)) = E & \quad [\text{def. 4.11., def. } \rightarrow] \\ \text{wtw } \bar{A}_1^- \cup \bar{A}_2^+ = E & \quad [\text{I1.}] \end{aligned}$$

Rozważmy teraz przykład, zobrazowany na rysunku 4.1., w którym  $E$  jest zbiorem ludzi, a  $\bar{A}_1^+ \subseteq \bar{A}_2^+$ , natomiast  $\bar{A}_1^-$  jest podzbiorem właściwym  $E \setminus \bar{A}_2^+$ .



Rys. 4.1.: Nie jest tak, że  $\mathfrak{M}_c \models \forall x(A_1(x) \rightarrow A_2(x))$  ani tak, że  $\mathfrak{M}_c \not\models \forall x(A_1(x) \rightarrow A_2(x))$

W takim modelu zdanie  $\forall x(A_1(x) \rightarrow A_2(x))$ , które interpretujemy jako „wszyscy, którzy uznają zdanie  $p$ , uznają zdanie  $q$ ”, nie jest spełnione, mimo iż wydawałoby się, że wszystkie pozytywne przypadki  $A_1$ , czyli  $\bar{A}_1^+$ , są w  $\bar{A}_2^+$ . Intuicja, która się za tym kryje, polega na tym, że choć pozytywna część  $A_1$  jest w pozytywnej części  $A_2$ ,<sup>6</sup> to jednak ze względu na to, że  $A_1$  i  $A_2$  są predykatami częściowymi, „może się tak zdarzyć”, iż luka pomiędzy pozytywną

<sup>6</sup>Kripke (1975), używając podobnej konstrukcji dla zdefiniowania swojej definicji prawdy, nazywa  $\bar{A}_i^+$  ekstensją, a  $\bar{A}_i^-$  antyektensją predykatu  $A_i$ .

i negatywną częścią  $A_1$  wypełni się w taki sposób, że  $\bar{A}_1^+$  nie będzie się zawierało w  $\bar{A}_2^+$ . Definicja spełniania w modelu częściowym jest więc tak skonstruowana, że bierze pod uwagę możliwe rozszerzenia funkcji interpretacyjnej i nie daje rozstrzygającej odpowiedzi tam, gdzie takie rozszerzenia mogłyby doprowadzić do zmiany statusu zdania. Bardziej bezpośredni użytek z tego typu informacji zrobimy w rozdziale następnym.

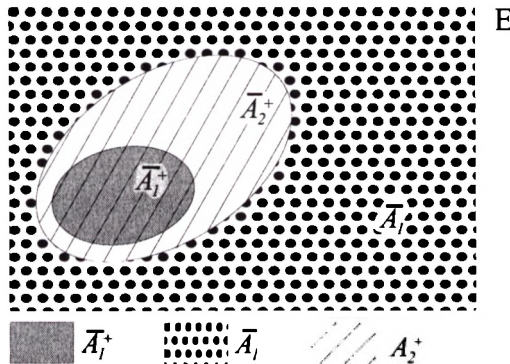
Powyższy model nie odrzuca także zdania  $\forall x(A_1(x) \rightarrow A_2(x))$ , gdyż

$$\mathfrak{M}_c \models \forall x(A_1(x) \rightarrow A_2(x)) \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \bar{A}_1^+ \cap \bar{A}_2^- \neq \emptyset.$$

Wynika to z następujących obliczeń:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_c \models \forall x(A_1(x) \rightarrow A_2(x)) [v] \\ \text{wtw } p_2(A_1(x) \rightarrow A_2(x)) \neq \emptyset & \quad [\text{tw. 4.12.}] \\ \text{wtw } p_1(A_1(x)) \cap p_2(A_2(x)) \neq \emptyset & \quad [\text{def. 4.11., def. } \rightarrow] \\ \text{wtw } \bar{A}_1^+ \cap \bar{A}_2^- \neq \emptyset & \quad [11.] \end{aligned}$$

W naszym przypadku  $\bar{A}_1^+ \subseteq \bar{A}_2^+$ , więc zbiory  $\bar{A}_1^+$  i  $\bar{A}_2^-$  są rozłączne. Czy nie jest wobec tego tak, że dopiero w modelu, w którym wszystkie symbole relacyjne interpretowane są poprzez relacje totalne, jakiegokolwiek zdania będą spełnione? Oczywiście nie. Wystarczy nieco zmodyfikować powyższy model, na przykład przyjęc, że  $\bar{A}_1^- = E \setminus \bar{A}_2^+$ , aby zdanie  $\forall x(A_1(x) \rightarrow A_2(x))$  było w nim spełnione (por. poniżej rysunek 4.2.).



Rys. 4.2.:  $\mathfrak{M}_c \models \forall x(A_1(x) \rightarrow A_2(x))$  □

Konstrukcję podobną do przedstawionej w tym rozdziale wprowadza Robin Cooper w pracy z 1983 roku. Z każdym symbolem predykatywnym łączy on parę ekstensji: część pozytywną i negatywną. Stosuje tę aparaturę, obok innych pojęć, takich jak „sparowane intensywne” (*paired intensions*), do wyjaśnienia presupozycji. Mimo podobieństw, ujęcie Coopera znacznie różni się od mojego poprzez to, że o ile spełnianie skwantyfikowanego zdania, powiedzmy  $Qx\phi$ , uzależnione jest od tego, czy  $I(\phi) \in I(Q)$ , to wystarczy, że  $I(\phi) \notin I(Q)$ , aby zdanie to było odrzucone przez model.<sup>7</sup> W wyniku tego jego definicja określników poprzez

<sup>7</sup> Abstrahuję tu od różnic wynikających z tego, że Cooper bada zjawisko presupozycji. Także terminologia i symbolika zostały dostosowane do przyjętej w mojej pracy.

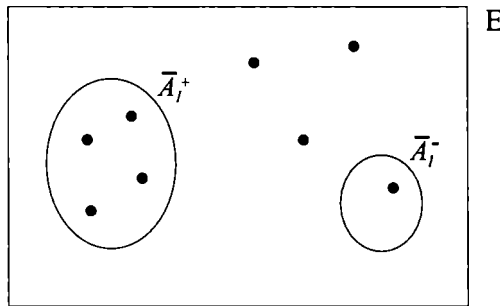
pozytywną i negatywną część jest w duchu naszego modelu standardowego, więc potencjalnie dziedziczy jego nieadekwatności w zastosowaniu do analizy kryterium prawdy przez zgodę większości.

#### 4.2.1. Wynikanie w modelach częściowych

W modelu częściowym nie wystarczy zdefiniować wynikania logicznego poprzez przyjęcie, że  $\varphi \models \psi$  wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym modelu, w którym  $\varphi$  jest spełnione,  $\psi$  też jest spełnione. Musimy dodać, że w każdym modelu, w którym  $\psi$  jest odrzucone,  $\varphi$  też jest odrzucone (por. Blamey 1986). Podobnie jak w przypadku definicji spełniania, obie te definicje są równoważne w modelu standardowym, ale nie tutaj. Model, w którym  $\varphi$  nie jest ani spełnione, ani odrzucone, a  $\psi$  jest odrzucone, jak choćby poniżej opisany, obrazuje tę różnicę.

#### PRZYKŁAD 4.16.

Rozważmy model  $\mathfrak{M}_c = \langle E, I_c, p_1, p_2 \rangle$ , którego uniwersum składa się z ośmiu osób. Cztery z tych osób uznają zdanie  $p$ , jedna je odrzuca, a reszta nie jest zdecydowana.



Rys. 4.3.: Nie jest tak, że  $\mathfrak{M}_c \models Mx A_1(x)$ , ale też nie jest tak, że  $\mathfrak{M}_c \not\models Mx A_1(x)$

W modelu tym zdanie  $Mx A_1(x)$  nie jest ani spełnione, ani odrzucone, natomiast zdanie  $\forall x A_1(x)$  jest odrzucone. Zastanówmy się, kontrfaktycznie, nad wynikaniem zdania  $\forall x A_1(x)$  z  $Mx A_1(x)$ . Warunek, który zazwyczaj przyjmuje się jako definicję wynikania logicznego:

(\*) jeżeli  $\mathfrak{M}_c \models \varphi[v]$ , to  $\mathfrak{M}_c \models \psi[v]$ , dla każdego modelu  $\mathfrak{M}_c$  dla  $L^*(M)$  i każdego wartościowania  $v$ ,

byłby w wypadku rozważanego tu modelu pusto spełniony, podczas gdy warunek mu równoważny w przypadku modeli standardowych:

(\*\*) jeżeli  $\mathfrak{M}_c \not\models \psi[v]$ , to  $\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v]$ ,

nie jest tu spełniony. Gdybyśmy się wobec tego ograniczyli do zdefiniowania wynikania za pomocą (\*), to model powyższy nie byłby kontrprzykładem na wynikanie zdania  $\forall x A_1(x)$  z  $Mx A_1(x)$ , a po dodaniu (\*\*) jest kontrprzykładem, co pokazuje, że prawa te mają inną treść w modelach częściowych.  $\square$

W związku z powyższym definicja wynikania logicznego (lub po prostu wynikania), w modelu częściowym wyglądała będzie następująco:

DEFINICJA 4.17. (wynikanie w przypadku modeli częściowych dla  $L^*(M)$ )

Mówimy, że formuła  $\psi \in \text{FOR}_{L^*(M)}$  wynika ze zbioru formuł  $\Gamma \subseteq \text{FOR}_{L^*(M)}$ ,  $\Gamma \models_c \psi$ ,<sup>8</sup> wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego modelu częściowego  $\mathfrak{M}_c$  dla  $L^*(M)$  i każdego wartościowania  $v$ :

(i) jeżeli  $\mathfrak{M}_c \models \varphi[v]$  dla każdej formuły  $\varphi \in \Gamma$ , to  $\mathfrak{M}_c \models \psi[v]$ ,

oraz

(ii) jeżeli  $\mathfrak{M}_c \not\models \psi[v]$ , to istnieje taka formuła  $\varphi \in \Gamma$ , że  $\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v]$ .<sup>9</sup> □

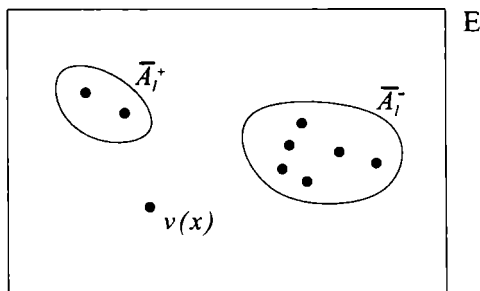
W przypadku, gdy  $\Gamma = \{\varphi\}$ , będziemy pisać  $\varphi \models_c \psi$ , mając na myśli to, że  $\{\varphi\} \models \psi$ .

Pozostaje zbadać, czy powyższy model czyni zadość intuicjom, których pogwałcenie skłoniło nas do porzucenia modelu standardowego. W modelu częściowym możemy zdać sprawę z tego, że ktoś ani nie uznaje, ani nie odrzuca danego zdania. Wróćmy do przykładu 4.8. ze strony 57. Przy przyjęciu modelu standardowego każde zdanie, którego nikt nigdy nie pomyślał, więc i nie uznał, okazuje się fałszywe, dlatego że w modelu, w którym  $I(A_1) = \emptyset$ , nie jest spełnione zdanie  $\text{Mx}A_1(x)$ . W modelu częściowym  $\mathfrak{M}_c$ , gdy rozważamy zdanie atomowe  $p_1$ , którego nikt nigdy nie pomyślał, to  $I_c(A_1) = \langle \emptyset, \emptyset \rangle$  i zarówno  $A_1(x)$ , jak i  $\text{Mx}A_1(x)$  nie jest ani spełnione, ani odrzucone przez ten model, a co za tym idzie, zdanie  $p_1$  nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe.

Powstaje pytanie, czy tautologie klasycznego rachunku predykatów są prawdziwe we wszystkich modelach częściowych, przy wszystkich wartościowaniach. Nie jest tak na przykład w przypadku prawa wyłączzonego środka. Rozważmy następującą sytuację:

PRZYKŁAD 4.18.

Weźmy pod uwagę formułę  $A_1(x) \vee \neg A_1(x)$  – przykład klasycznej tautologii – model  $\mathfrak{M}_c$ , którego uniwersum jest zbiorem ludzi, i wartościowanie  $v$  takie, że  $v(x)$  nie jest ani w  $\bar{A}_1^+$ , ani w  $\bar{A}_1^-$ :



Rys. 4.4.: Nie jest tak, że  $\mathfrak{M}_c \models A_1(x) \vee \neg A_1(x)[v]$

<sup>8</sup>Używam tego samego symbolu  $\models$  zarówno dla oznaczenia wynikania, jak i spełniania. W przypadku spełniania zawsze jednak po lewej stronie mamy model – nigdy tak nie jest w przypadku wynikania, nie ma więc obawy nieporozumienia.

<sup>9</sup>Por. Blamey (1986, s. 6).



Zgodnie z przyjętą definicją funkcji T przykład ten obrazuje sytuację, w której osoba oznaczona przez  $v(x)$  nie uznaje zdania  $p_1$  lub nie  $p_1$ . □

Dopuszczenie takich sytuacji oznacza przyjęcie, że uznawanie nie jest domknięte na klasyczną konsekwencję logiczną, bo choć  $\varphi \rightarrow \varphi$  nie jest spełnione w każdym modelu, jak pokazuje powyższy przykład ( $\varphi \rightarrow \varphi$  jest definicyjnie równoważne  $\neg\varphi \vee \varphi$ ), to oczywiście jest tak, że  $\varphi \models \varphi$ . Wiele osób przyklasnęłoby tej konsekwencji, ja jednak uważam ją za niepożądaną. Po pierwsze, model uznawania przez większość, który proponuję, jest z konieczności idealizacją realnych sytuacji, w których mamy do czynienia z uznawaniem przez większość, czyli nawet jeżeli rzeczywiście nie jest tak, że uznajemy wszystkie konsekwencje zdań przez nas uznawanych, to powinno tak być w sytuacji modelowej. Po drugie, choć niewątpliwie nikt z nas nie zdaje sobie sprawy z wszystkich konsekwencji uznawanych przez siebie zdań, to jednak fakt, że, jak wierzę, większość z nas poczuwa się do odpowiedzialności za ich konsekwencje, przemawia, jak zauważył Patryas (1987), za przyjęciem, iż uznawanie jest domknięte na konsekwencję logiczną. Patryas podaje argument Poppera za uwzględnieniem logicznej konsekwentności uznawania: dla obalenia teorii naukowych gotowi jesteśmy dysponować „wszelkim orężem z naszego logicznego, matematycznego i technicznego arsenału». [...] Podmiot niejako jest intelektualnie odpowiedzialny za zdania logicznie wyprowadzalne z jego sądów”.<sup>10</sup> Model częściowy wraz ze spełnianiem zdefiniowanym tak jak powyżej prowadzi do tego, że nawet zdanie **jeżeli  $p$ , to  $p$**  nie byłoby powszechnie uznanym zdaniem. O ile jednak w abstrakcyjnych logikach tego typu praktyki się zdarzały (por. logika trójwartościowa Kleenego<sup>11</sup>), o tyle wydaje się to zupełnie nie na miejscu w przypadku analizy uznawania przez większość, która rości sobie pretensje do bycia w zgodzie z podstawowymi intuicjami dotyczącymi tego zjawiska. Skłania mnie to do dokonania kolejnej zmiany w modelu, zmiany która polegała będzie na ponownym zdefiniowaniu pojęcia spełniania, wzorowanego na pojęciu superwartościowania przejętym od Basa van Fraassena.

#### 4.3. SUPERWALUACYJNE UJĘCIE LOGIKI PREDYKATÓW

Wracając do opowieści z początku poprzedniego podrozdziału, będziemy chcieli, aby model częściowy, oprócz informacji dostarczanej nam przez głosowanie, przyznawał prawdziwość lub fałszywość także zdaniom, które zostałyby tak lub inaczej zakwalifikowane, gdyby wszyscy uprawnieni do głosowania wzięli w nim udział, wypowiadając się za lub przeciw jakiemuś zdaniu, bez względu na to, jakie byłyby ich decyzje. Gdy zastanawiamy się nad prawdziwością alternatywy zdań  **$p$  lub  $q$** , to po prostu sprawdzamy, czy ci, którzy głosowali za  $p$ , i ci, którzy głosowali za  $q$ , razem wzięci stanowią większość w populacji  $m$ . Jeżeli tak nie jest, to nic o tej alternatywie powiedzieć nie możemy, gdyż ci niezdecydowani mogliby wszyscy wypowiedzieć się przeciwko zarówno  $p$  jak i  $q$ , a wtedy  **$p$  lub  $q$**  okazałoby się fałszywe, ale też mogliby w wystarczającej części poprzeć oba lub jedno z nich, tak aby  **$p$  lub  $q$**  okazało się prawdziwe. Są jednak takie zdania złożone, co do których sam fakt, że wszyscy wypowiedzieliby się za lub przeciw zdaniom, z których one się składają, wystarczyłby, aby w wyniku każdego z tych możliwych głosowań okazały się one prawdziwe. Nie ma wtedy powodu, aby odmawiać im wartości prawdziwościowej. Takimi zdaniami będą oczywiście klasyczne tautologie i tylko tautologie. Przypuśćmy, co oczywiście jest bardzo mało prawdo-

<sup>10</sup>Patryas (1987, s. 96).

<sup>11</sup>Kleene (1967, s. 334).

podobne, że w powyższym przypadku przedmiotem głosowania jest alternatywa  $p$  lub nie  $p$ . Zastanawiając się nad prawdziwością tego zdania, liczymy tych, którzy uznali  $p$  oraz w tym wypadku tych, którzy odrzucili  $p$ . Przypuśćmy dalej, że nie stanowią oni większości rozpatrywanej populacji  $m$ . Jakkolwiek jednak przebiegałoby decydowanie się tych, którzy dotychczas nie byli liczeni, mogą oni jedynie przyjąć lub odrzucić zdanie  $p$ , a więc zawsze zasila jedną z grup, których sumę do większości liczymy. Każdy więc z dalszych możliwych przebiegów głosowania zagwarantowałby prawdziwość zdaniu  $p$  lub nie  $p$ , gdyby tylko wszyscy się wypowiedzieli. Tego typu rozważaniom po stronie modelu odpowiada spełnianie superwaluacyjne. Co zmieni przyjęcie spełniania superwaluacyjnego z punktu widzenia definicji kryterium prawdy przez zgodę większości? Gdybyśmy przyjęli definicję kryterium prawdy przez zgodę większości w oparciu o spełnianie w modelu częściowym, to wyglądałaby ona następująco:

#### DEFINICJA 4.19.

(kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowane w oparciu o spełnianie w modelach częściowych)

Niech  $\mathfrak{M}_c$  będzie modelem, którego uniwersum stanowi wyróżniona populacja, a  $\varphi(x) = T(U(\alpha, x))$ :

Zdanie  $\alpha$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_c \models Mx \varphi(x).$$

Zdanie  $\alpha$  jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_c \not\models Mx \varphi(x). \quad \square$$

W szczególności w przypadku zdań atomowych definicja ta przybrałaby następującą postać:

Zdanie  $p_1$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_c \models Mx A_1(x).$$

Zdanie  $p_1$  jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_c \not\models Mx A_1(x).$$

Piszę o tym w trybie warunkowym, gdyż takiej definicji nie przyjmuję. Pod koniec rozdziału 4. zdefiniujemy kryterium prawdy przez zgodę większości za pomocą spełniania superwaluacyjnego, które do zdań prawdziwych według kryterium zdefiniowanego tu powyżej doda nam tautologie klasyczne, a do zdań fałszywych – kontrtautologie, w innych wypadkach dając wyniki nie zmienione.

#### 4.3.1. Superwaluacje

Ujęcie, które tu zaproponuję, jest wzorowane na pracach van Fraassena (1966), (1966a) i (1968). Choć u van Fraassena luki prawdziwościowe pojawiały się tylko ze względu na nie denotujące stałe indywidualowe (nazwy puste) (1966, s. 485), a języki, które tu rozważamy, nie zawierają stałych indywidualowych i luki prawdziwościowe wynikają z częściowej

interpretacji symboli relacyjnych i kwantyfikatorów, to sama idea *spełniania superwaluacyjnego*, na którym oprzemy superwaluacyjne ujęcie logiki predykatów w tym rozdziale, wzorowana jest na pojawiającym się w tych pracach pojęciu *supervaluations*. Zazwyczaj angielski termin *valuation* tłumaczy się jako *wartościowanie*. O ile jednak w logice zdań tłumaczenie to jest uzasadnione, to nie zawsze działa ono dobrze w logice predykatów. Tutaj bowiem zarówno *valuation* jak i *assignment* bywa używany w kontekście, w którym w polskiej nomenklaturze logicznej mówimy o wartościowaniu, czyli przyporządkowaniu zmiennych indywidualnym przedmiotów należących do uniwersum modelu. Termin *valuation* używany przez van Fraassena (1966) nie jest wartościowaniem w tym sensie, lecz odgrywa w modelu rolę podobną do naszego „spełniania w modelu” dla zdań (na potrzeby tego rozdziału będę go tłumaczył jako *waluacja*), stąd odpowiednik *supervaluation* van Fraassena nazywać będę *spełnianiem superwaluacyjnym*. U van Fraassena (1966, s. 486) *klasyczna waluacja związana z modelem* jest funkcją, która przyporządkowuje zdaniom języka wartości logiczne, zgodnie z klasycznymi regułami dotyczącymi spełniania zdań. Wartość niektórych zdań atomowych, tych zawierających nie detonujące stałe indywidualowe, nie jest jednak wyznaczona przez model. Jeżeli więc język zawiera choć jedną stałą indywidualową  $a$ , która nie ma interpretacji w modelu, to ze względu na każde zdanie atomowe zawierające tę stałą,  $P(a)$ , z modelem związane są co najmniej dwie klasyczne walucje: taka, która przypisuje  $P(a)$  wartość T, i taka, która przypisuje  $P(a)$  wartość F. *Superwaluacja związana z modelem* jest zaś funkcją, która przypisuje T (F) dokładnie tym zdaniom, którym wszystkie klasyczne walucje przypisały T (F). Natychmiastowym wnioskiem z powyższego jest to, że zdania, którym wszystkie superwaluacje przypisują T, to dokładnie klasyczne tautologie.

W ujęciu, które zaproponuję poniżej, luki prawdziwościowe związane będą z częściową interpretacją symboli relacyjnych i kwantyfikatorów, stąd nie chcemy uzależniać *superwaluacyjnej tautologiczności* od możliwych walucji formuł atomowych. O ile w częściowej logice zdań za tę częściowość odpowiedzialna jest częściowość wartościowań jako funkcji, o tyle w zaproponowanym tu ujęciu częściowej logiki predykatów to symbole relacyjne i kwantyfikatory otrzymują częściową interpretację w tym sensie, że nie wszystkie elementy uniwersum zakwalifikowane są jako należące lub nie do danej relacji i nie wszystkie relacje na zbiorze będącym uniwersum zakwalifikowane są jako należące lub nie do danej interpretacji kwantyfikatora. Tak jak w logice zdań superwartościowanie  $v_s$  „bierze pod uwagę” wszystkie możliwe rozszerzenia wartościowania  $v$  do wartościowań klasycznych, tak tutaj będziemy brali pod uwagę wszystkie możliwe rozszerzenia funkcji interpretującej  $I_c$ , czyli inaczej mówiąc wszystkie możliwe rozszerzenia modelu do modelu totalnego. Sytuacji, w której superwartościowanie przyporządkowuje formule  $\phi$  z języka rachunku zdań wartość wyróżnioną, odpowiadało będzie spełnianie w modelu, które nazwiemy *spełnianiem superwaluacyjnym* (definicja 4.25.). Spełnianie to bierze pod uwagę „zwykłe”, częściowe spełniania w totalnych modelach częściowych będących rozszerzeniami danego modelu,<sup>12</sup> tak jak superwartościowanie brało pod uwagę wszystkie wartościowania klasyczne będące rozszerzeniem wartościowania wyjściowego.

Czy taki model totalny będzie modelem standardowym, czyli, inaczej mówiąc, czy podobnie jak van Fraassen otrzymamy poprzez superwaluacyjne spełnianie wszystkie tautologie klasyczne? Ogólnie rzecz biorąc – nie. Byłoby tak, jak pokażę w dalszej części tego rozdziału, gdybyśmy ograniczyli rozważania do standardowych kwantyfikatorów. Tu jednak warunki spełniania (odrzućcia) kwantyfikatora większości zdefiniowaliśmy w taki sposób,

<sup>12</sup>Definicje poszczególnych terminów podaję poniżej.

że nie dostaniemy standardowych warunków spełniania w wyniku uzupełnienia modelu, o ile nie zawężymy naszych rozważań do modeli o nieparzystym uniwersum.

Superwaluacyjne ujęcie częściowej elementarnej logiki predykatów przyjął Tore Langholm w (1988) i wiele pojęć zdefiniowanych poniżej, takich jak pojęcie *modelu totalnego* czy *rozszerzenia funkcji interpretującej*, wzorowanych jest do pewnego stopnia na tej pracy. Pojęcie modelu totalnego wydaje się też odpowiednikiem pojęcia *sytuacji całościowej* van Eijcka (1996), w której to pracy autor rozważa częściowe interpretacje kwantyfikatorów uogólnionych. Formalizm tam zastosowany opiera się na reprezentacji relacji jako ich pozytywnej i lukowej części, podczas gdy w niniejszej pracy reprezentowane są one poprzez część pozytywną i negatywną, co sprawia, że wyniki Eijcka w małym stopniu znajdują adekwatną intuicyjną interpretację w zastosowaniu do analizy kryterium prawdy przez zgodę większości. Poniżej przedstawię definicje poszczególnych terminów.

#### 4.3.2. Spełnianie superwaluacyjne

DEFINICJA 4.20. (rozszerzenie funkcji interpretującej)

Funkcję interpretującą  $I'_c$  nazywamy *rozszerzeniem funkcji interpretującej*  $I_c$  (symbolicznie  $I_c \subseteq I'_c$ ), wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego symbolu relacyjnego  $R(x_1, \dots, x_n)$  języka  $\mathcal{L}$ , jeżeli  $I_c(R) = \langle X_1 \times \dots \times X_n, Y_1 \times \dots \times Y_n \rangle$ , gdzie  $X_i, Y_i \subseteq E$  dla  $i = 1, \dots, n$ , to  $I'_c(R) = \langle X'_1 \times \dots \times X'_n, Y'_1 \times \dots \times Y'_n \rangle$ , gdzie  $X'_i, Y'_i \subseteq E$  i  $X_i \subseteq X'_i$ , a  $Y_i \subseteq Y'_i$ , dla  $i = 1, \dots, n$ . Dla pozostałych symboli  $\zeta$ , dla których funkcja  $I_c$  jest zdefiniowana,  $I'_c(\zeta) = I_c(\zeta)$ .  $\square$

DEFINICJA 4.21. (rozszerzenie modelu częściowego)

Model częściowy  $\mathfrak{M}'_c = \langle E', I'_c, p'_1, p'_2 \rangle$  nazywamy *rozszerzeniem modelu częściowego*  $\mathfrak{M}_c = \langle E, I_c, p_1, p_2 \rangle$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $E' = E$  i  $I_c \subseteq I'_c$ .  $\square$

DEFINICJA 4.22. (interpretacja totalna)

Funkcję interpretującą  $I_c$  nazywamy *interpretacją totalną* wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich  $n$ -argumentowych symboli relacyjnych  $R$  języka  $\mathcal{L}$ ,  $p_2(R) = E^n \setminus p_1(R)$ .  $\square$

DEFINICJA 4.23. (model totalny)

Model częściowy  $\mathfrak{M}_c = \langle E, I_c, p_1, p_2 \rangle$  nazywamy *modelem totalnym*, gdy funkcja  $I_c$  jest interpretacją totalną.  $\square$

DEFINICJA 4.24. (uzupełnienie modelu częściowego)

Model częściowy  $\mathfrak{N}_c$  nazywamy *uzupełnieniem modelu częściowego*  $\mathfrak{M}_c$  (lub jego *totalnym rozszerzeniem*) wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathfrak{N}_c$  jest rozszerzeniem  $\mathfrak{M}_c$  i  $\mathfrak{N}_c$  jest modelem totalnym.  $\square$

Zdefiniujemy teraz za pomocą tych pojęć *superwaluacyjne spełnianie (odrzucaenie)* formuł języka  $\mathcal{L}$ :

DEFINICJA 4.25. (spełnianie superwaluacyjne)

Mówimy, że wartościowanie  $v$  *superwaluacyjnie spełnia (odrzuca)* formułę  $\phi \in \text{FOR}_{\mathcal{L}}$  w mo-

delu częściowym  $\mathfrak{M}_c$  dla  $\mathcal{L}$ ,  $\mathfrak{M}_c \models_s \varphi[v]$  ( $\mathfrak{M}_c \not\models_s \varphi[v]$ ), wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego modelu  $\mathfrak{M}'_c$ , który jest uzupełnieniem modelu  $\mathfrak{M}_c$ ,

$$\mathfrak{M}'_c \models \varphi[v] \quad (\mathfrak{M}'_c \not\models \varphi[v]). \quad \square$$

TWIERDZENIE 4.26.

Dla dowolnego modelu częściowego  $\mathfrak{M}_c$  dla  $L^*(M)$  i dowolnego wartościowania  $v$ :

$$\text{Jeżeli } \mathfrak{M}_c \models \varphi[v], \text{ to } \mathfrak{M}_c \models_s \varphi[v]$$

oraz

$$\text{Jeżeli } \mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v], \text{ to } \mathfrak{M}_c \not\models_s \varphi[v].$$

DOWÓD: indukcja ze względu na złożoność formuł:

1.  $\varphi = R(x_1, \dots, x_n)$

$\mathfrak{M}_c \models R(x_1, \dots, x_n)[v]$  wtw  $\langle v(x_1), \dots, (x_n) \rangle \in \bar{R}^+$ .

Ponieważ  $I_c \subseteq I'_c$ , więc  $\langle v(x_1), \dots, (x_n) \rangle \in \bar{R}^+$  dla każdego  $I'_c$ , totalnego rozszerzenia  $I_c$ . To znaczy, że  $\mathfrak{M}'_c \models R(x_1, \dots, x_n)[v]$  dla każdego  $\mathfrak{M}'_c$ , uzupełnienia  $\mathfrak{M}_c$ , czyli  $\mathfrak{M}_c \models_s R(x_1, \dots, x_n)[v]$ .

Dowód dla  $\not\models$  przebiega analogicznie.

2.  $\varphi = (x_1 = x_2)$

Ponieważ identyczność jest relacją totalną, więc w odniesieniu do identyczności  $I_c$  jest jedynym rozszerzeniem samej siebie, co daje nam nawet więcej:

$\mathfrak{M}_c \models (x_1 = x_2)[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathfrak{M}_c \models_s (x_1 = x_2)[v]$  i

$\mathfrak{M}_c \not\models (x_1 = x_2)[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathfrak{M}_c \not\models_s (x_1 = x_2)[v]$ .

3.  $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ , gdzie  $\psi_1, \psi_2$  są dowolnymi formułami

$\mathfrak{M}_c \models \psi_1 \wedge \psi_2[v]$  wtw  $\mathfrak{M}_c \models \psi_1[v]$  i  $\mathfrak{M}_c \models \psi_2[v]$ , a więc, korzystając z kroku indukcyjnego,  $\mathfrak{M}_c \models_s \psi_1[v]$  i  $\mathfrak{M}_c \models_s \psi_2[v]$ , czyli dla każdego  $\mathfrak{M}'_c$  uzupełnienia  $\mathfrak{M}_c$ ,  $\mathfrak{M}'_c \models \psi_1[v]$  oraz  $\mathfrak{M}'_c \models \psi_2[v]$ , czyli  $\mathfrak{M}_c \models_s \psi_1 \wedge \psi_2[v]$ .

Dowód dla  $\not\models$  oraz oba przypadki dla alternatywy przebiegają podobnie.

4.  $\varphi = \neg\psi$ , gdzie  $\psi$  jest dowolną formułą

$\mathfrak{M}_c \models \neg\psi[v]$  wtw  $\mathfrak{M}_c \not\models \psi[v]$  wtw dla każdego  $\mathfrak{M}'_c$  uzupełnienia  $\mathfrak{M}_c$ ,  $\mathfrak{M}'_c \not\models \psi[v]$ . Ponieważ każdy taki model jest modelem częściowym, więc  $\mathfrak{M}'_c \models \neg\psi[v]$ , co dokładnie oznacza, że  $\mathfrak{M}_c \models_s \neg\psi[v]$ .

Dowód dla  $\not\models$  przebiega analogicznie. W twierdzeniu następnym udowodnimy wynikanie w drugą stronę w przypadku negacji.

5.  $\varphi = \forall x \psi$ , gdzie  $\psi$  jest dowolną formułą

$\mathfrak{M}_c \models \forall x \psi[v]$  wtw  $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v(\frac{a}{x})]\} = E$ . Ponieważ, jak wynika z założenia indukcyjnego,  $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v(\frac{a}{x})]\} \subseteq \{a \in E : \mathfrak{M}_c \models_s \psi[v(\frac{a}{x})]\}$ ,

$\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models_s \psi[v(\frac{a}{x})]\} = E$  i  $\{a \in E : \mathfrak{M}'_c \models \psi[v(\frac{a}{x})]\} = E$  dla każdego  $\mathfrak{M}'_c$  uzupełnienia  $\mathfrak{M}_c$ , czyli  $\mathfrak{M}'_c \models \forall x \psi[v]$ , a tym samym  $\mathfrak{M}_c \models_s \forall x \psi[v]$ .

Dowód dla  $\not\models$  i oba przypadki dla  $\exists$  przebiegają podobnie.

6.  $\varphi = Mx \psi$ , gdzie  $\psi$  jest dowolną formułą

$\mathfrak{M}_c \models Mx \psi[v]$  wtw  $|\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v(\frac{a}{x})]\}| > |E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v(\frac{a}{x})]\}|$ . Ponieważ

$\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v(\frac{a}{r})]\} \subseteq \{a \in E : \mathfrak{M}'_c \models \psi[v(\frac{a}{r})]\}$  dla każdego  $\mathfrak{M}'_c$  uzupełnienia  $\mathfrak{M}_c$ , więc  $i \mid \{a \in E : \mathfrak{M}'_c \models \psi[v(\frac{a}{r})]\} \mid > \mid E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M}'_c \models \psi[v(\frac{a}{r})]\} \mid$ , czyli  $\mathfrak{M}'_c \models Mx\psi[v]$  w każdym takim przypadku, co jest równoznaczne z tym, że  $\mathfrak{M}_c \models_s Mx\psi[v]$ .  
Dowód dla  $\nabla$  przebiega analogicznie.  $\square$

Z twierdzenia tego dowiadujemy się, że superwaluacyjne spełnianie zachowuje spełnianie i odrzucanie w modelu częściowym. To dość banalnie wyglądające twierdzenie nie obowiązuje, gdy kwantyfikator większości M typu  $\langle 1 \rangle$  zastąpimy przez kwantyfikator większości  $M^2$  typu  $\langle 1, 1 \rangle$ , jak okaże się w rozdziale 5. Logiki częściowe, dla których obowiązuje powyższe twierdzenie, nazywać będą *logikami monotonicznymi*.<sup>13</sup>

DEFINICJA 4.27. (logika monotoniczna)

Częściową logikę  $\mathcal{L}$  nazywamy *logiką monotoniczną*, jeżeli każde rozszerzenie funkcji interpretującej wyrażenia języka do interpretacji totalnej zachowuje poprzednie wartościowania formuł (to znaczy formuły spełnione przez dane wartościowanie w modelu pozostają spełnione, a odrzucone – pozostają odrzucone).  $\square$

Wynikanie w drugą stronę obowiązuje w przypadku formuł atomowych i ich negacji.<sup>14</sup>

TWIERDZENIE 4.28.

Dla dowolnego modelu częściowego  $\mathfrak{M}_c$  dla  $L^*(M)$  i dowolnego wartościowania  $v$ :

1. Jeżeli  $R$  jest  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, to
 
$$\mathfrak{M}_c \models_s R(x_1, \dots, x_n)[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(R),$$

$$\mathfrak{M}_c \not\models_s R(x_1, \dots, x_n)[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in p_2(R).$$
2.  $\mathfrak{M}_c \models_s x_1 = x_2[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad v(x_1) = v(x_2),$   
 $\mathfrak{M}_c \not\models_s x_1 = x_2[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad v(x_1) \neq v(x_2).$

DOWÓD: W pierwszym punkcie dowód z prawej strony na lewą wynika z twierdzenia 4.26.; tam też udowodniliśmy punkt 2. Pozostaje do pokazania implikacja z lewej na prawą w punkcie 1.:

Skoro  $\mathfrak{M}_c \models_s R(x_1, \dots, x_n)[v]$ , to  $\langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in p'_1(R)$  dla każdego  $p'_1$  totalnego rozszerzenia  $p_1$ , a tak jest tylko wtedy, gdy samo  $p_1$  jest swoim jedynym totalnym rozszerzeniem. Oznacza to, że  $\langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(R)$ . W przypadku  $\not\models_s$  dowód przebiega analogicznie.  $\square$

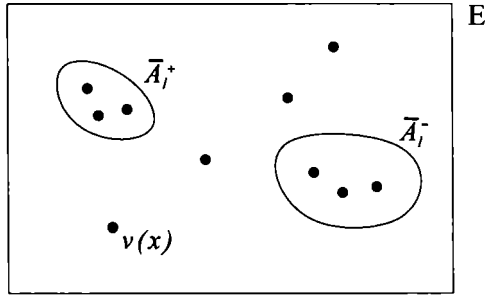
W pozostałych wypadkach spełnianie superwaluacyjne w modelu częściowym nie pociąga za sobą spełniania po prostu. Poniższy przykład pozwoli, mam nadzieję, uchwycić źródło tego faktu:

PRZYKŁAD 4.29.

Zbadajmy model częściowy  $\mathfrak{M}_c$ , którego uniwersum stanowi zbiór ludzi, w którym formuła  $A_1(x) \vee \neg A_1(x)$  nie jest spełniona przy wartościowaniu  $v$ . Formuła ta odpowiada sytuacji, w której  $v(x)$  uznaje zdanie  **$p$  lub nie  $p$** , a więc prawo wyłączzonego środka:

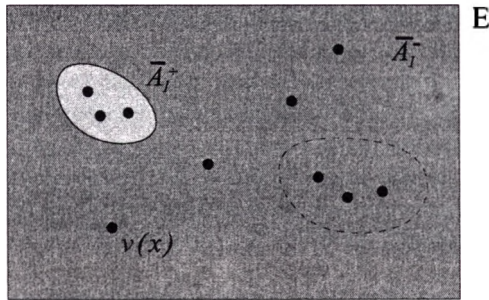
<sup>13</sup>Por. Blamey (1986), a także *Stability Condition Fine*'a (1975, s. 268) i cechę *persistent* Langholma (1988, s. 4).

<sup>14</sup>Odrzucanie formuły jest, zgodnie z przyjętymi definicjami, równoważne ze spełnianiem jej negacji.

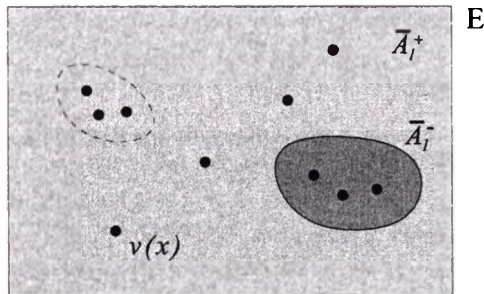


Rys. 4.5.: nie jest tak, że  $\mathfrak{M}_c \models A_1(x) \vee \neg A_1(x) [v]$

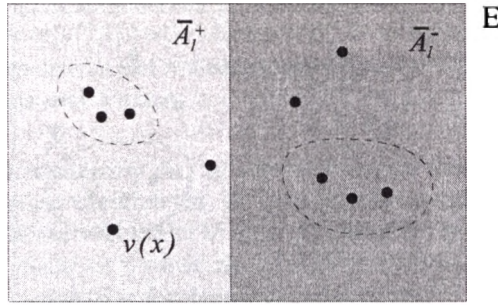
Dla każdego jednak totalnego rozszerzenia  $\mathfrak{M}_c$ , jak choćby te przykładowe trzy przedstawione na rysunkach 4.6.–4.8. poniżej,  $p_2(A_1) = E \setminus p_1(A_1)$ , więc  $v(x)$  zawsze trafi do  $p_1(A_1)$  lub  $p_2(A_1)$ , a co za tym idzie w każdym modelu  $\mathfrak{M}'_c$ , będącym totalnym rozszerzeniem  $\mathfrak{M}_c$ ,  $\mathfrak{M}'_c \models A_1(x) \vee \neg A_1(x) [v]$ , więc  $\mathfrak{M}_c \models_s A_1(x) \vee \neg A_1(x) [v]$ , mimo że nie jest tak, że  $\mathfrak{M}_c \models A_1(x) \vee \neg A_1(x) [v]$ .



Rys. 4.6.:  $\mathfrak{M}'_c \models A_1(x) \vee \neg A_1(x) [v]$



Rys. 4.7.:  $\mathfrak{M}''_c \models A_1(x) \vee \neg A_1(x) [v]$



Rys. 4.8.:  $\mathfrak{M}_c''' \models A_1(x) \vee \neg A_1(x)[v]$  □

Warto zauważyć przy okazji, że choć część klasycznych tautologii nie jest spełniona w pewnych modelach częściowych, to żadna z nich nie jest nigdy odrzucona. Wynika to z tego, że dla dowolnego  $n$ -argumentowego symbolu relacyjnego  $R$ , dla którego  $p_1(R) = X_1 \times \dots \times X_n$ , a  $p_2(R) = Y_1 \times \dots \times Y_n$ , gdzie  $X_i, Y_i \subseteq E$  dla  $i = 1, \dots, n$ , zbiory  $X_i$  i  $Y_i$  są parami rozłączne.

Jak widać ujęcie superwaluacyjne nie ma wpływu na spełnianie i odrzucanie formuł atomowych oraz ich negacji. Powstaje pytanie, czy spełnianie w częściowym modelu totalnym jest równoważne ze spełnianiem w modelu standardowym, to znaczy, czy jest tak, że jeżeli w modelu częściowym  $\mathfrak{M}_c$  dla  $L^*(M)$  wszystkie symbole relacyjne interpretowane są poprzez relacje totalne, to formuła  $\varphi$  jest w nim spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona w odpowiadającym mu modelu standardowym: tym bardziej, że analogiczne twierdzenie obowiązuje dla logiki zdań (patrz Langholm 1988, s. 16–17). Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Sposób, w jaki zdefiniowaliśmy  $M$ , o tym decyduje. Jeżeli byśmy się natomiast ograniczyli do standardowych kwantyfikatorów, to, jak należałoby się spodziewać, odpowiedź będzie pozytywna.<sup>15</sup>

#### TWIERDZENIE 4.30.

Jeżeli  $\mathfrak{M}_c = \langle E, I_c, p_1, p_2 \rangle$  jest totalnym modelem częściowym dla języka  $L^*(M)$ , z którego alfabetu odrzuciliśmy symbol kwantyfikatora większości,<sup>16</sup> a  $\mathfrak{M} = \langle E, I \rangle$  jest modelem standardowym takim, że dla każdego symbolu tego języka  $\zeta$ , dla którego funkcja  $p_1$  jest zdefiniowana,  $I(\zeta) = p_1(\zeta)$ , to dla dowolnej formuły  $\varphi \in \text{FOR}_{L^*(M)}$  i dowolnego wartościowania  $v$ :

$$\mathfrak{M}_c \models \varphi[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \mathfrak{M} \models \varphi[v]$$

oraz

$$\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest tak, że} \quad \mathfrak{M} \models \varphi[v].$$

DOWÓD: Dowód przebiega przez indukcję ze względu na złożoność formuł.

1.  $\varphi = R(x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_c \models R(x_1, \dots, x_n)[v] & \text{ wtw } \langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(R) \text{ wtw } \langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in I(R) \\ & \text{ wtw } \mathfrak{M} \models R(x_1, \dots, x_n)[v]; \end{aligned}$$

<sup>15</sup>Por. także Langholm (1988, s. 45).

<sup>16</sup>Czyli języka logiki elementarnej.



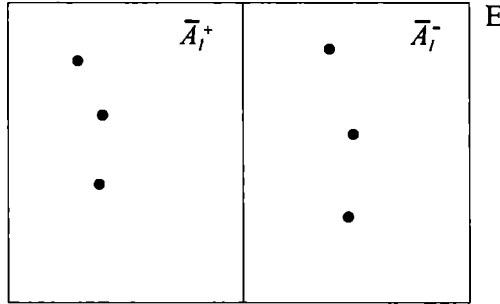
- $\mathfrak{M}_c \models R(x_1, \dots, x_n)[v]$  wtw  $\langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \in p_2(R)$  wtw  $\langle v(x_1), \dots, v(x_n) \rangle \notin I(R)$   
 wtw nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models R(x_1, \dots, x_n)[v]$ .
2.  $\varphi = (x_1 = x_2)$   
 $\mathfrak{M}_c \models x_1 = x_2[v]$  wtw  $v(x_1) = v(x_2)$  wtw  $\mathfrak{M} \models x_1 = x_2[v]$ ;  
 $\mathfrak{M}_c \not\models x_1 = x_2[v]$  wtw  $v(x_1) \neq v(x_2)$  wtw nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models x_1 = x_2[v]$ .
3.  $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$   
 $\mathfrak{M}_c \models \psi_1 \wedge \psi_2[v]$  wtw  $\mathfrak{M}_c \models \psi_1[v]$  i  $\mathfrak{M}_c \models \psi_2[v]$  wtw  $\mathfrak{M} \models \psi_1[v]$  i  $\mathfrak{M} \models \psi_2[v]$   
 wtw  $\mathfrak{M} \models \psi_1 \wedge \psi_2[v]$ ;  
 $\mathfrak{M}_c \not\models \psi_1 \wedge \psi_2[v]$  wtw  $\mathfrak{M}_c \not\models \psi_1[v]$  lub  $\mathfrak{M}_c \not\models \psi_2[v]$   
 wtw nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models \psi_1[v]$  lub nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models \psi_2[v]$   
 wtw nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models \psi_1 \wedge \psi_2[v]$ .
4. Przypadki  $\vee$  i  $\neg$  analogicznie do koniunkcji.
5.  $\varphi = \forall x \psi$   
 $\mathfrak{M}_c \models \forall x \psi[v]$  wtw  $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v(\frac{a}{x})]\} = E$  wtw  $\{a \in E : \mathfrak{M} \models \psi[v(\frac{a}{x})]\} = E$   
 wtw  $\mathfrak{M} \models \forall x \psi[v]$ ;  
 $\mathfrak{M}_c \not\models \forall x \psi[v]$  wtw  $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \psi[v(\frac{a}{x})]\} \neq \emptyset$   
 wtw  $\{a \in E : \text{nie jest tak, że } \mathfrak{M} \models \psi[v(\frac{a}{x})]\} \neq \emptyset$   
 wtw nie jest tak, że  $\{a \in E : \mathfrak{M} \models \psi[v(\frac{a}{x})]\} = E$  wtw nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models \forall x \psi[v]$ .
6.  $\varphi = \exists x \psi$   
 $\mathfrak{M}_c \models \exists x \psi[v]$  wtw  $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v(\frac{a}{x})]\} \neq \emptyset$  wtw  $\{a \in E : \mathfrak{M} \models \psi[v(\frac{a}{x})]\} \neq \emptyset$   
 wtw  $\mathfrak{M} \models \exists x \psi[v]$ ;  
 $\mathfrak{M}_c \not\models \exists x \psi[v]$  wtw  $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \psi[v(\frac{a}{x})]\} = E$   
 wtw  $\{a \in E : \text{nie jest tak, że } \mathfrak{M} \models \psi[v(\frac{a}{x})]\} = E$   
 wtw nie jest tak, że  $\{a \in E : \mathfrak{M} \models \psi[v(\frac{a}{x})]\} \neq \emptyset$  wtw nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models \exists x \psi[v]$ .  $\square$

Gdybyśmy, zamiast tak jak to zostało zrobione, zdefiniowali interpretację  $M$  poprzez  $I_c^*(M) = \langle \{X \subseteq E : |X| > |E \setminus X|\}, \{X \subseteq E : |X| \geq |E \setminus X|\} \rangle$ , to powyższe twierdzenie obowiązywałoby dla całego języka  $L^*(M)$ . Wtedy jednak całe przedsięwzięcie byłoby daremne, gdyż kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowane za pomocą takiego kwantyfikatora nie zachowywałoby równoważności fałszu i negacji prawdy, co często (por. na przykład Turner 1990, s. 29) uważa się za minimalny test dla kryterium bądź definicji prawdy. Chcielibyśmy mianowicie, aby było tak, że jeżeli jakieś zdanie  $p$  zgodnie z kryterium okaże się prawdziwe, to jego negacja będzie fałszywa i odwrotnie. Tu jednak tak nie byłoby. Rozważmy następujący przykład:

#### PRZYKŁAD 4.31.

Populacja  $m$  składa się zaledwie z sześciu osób, z których trzy uznają, a trzy odrzucają zdanie  $p$ . W modelu  $\mathfrak{M}_c^* = \langle E, I_c^*, p_1^*, p_2^* \rangle$  (gwiazdka przypomina o tym, że na chwilę rozważamy zmienioną interpretację kwantyfikatora większości), który obrazuje tę sytuację, zdanie  $Mx A_1(x)$  jest odrzucone, gdyż  $\bar{A}_1 \in p_2^*(M)$ , a więc zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdanie  $p$  jest fałszywe – połowa członków populacji  $m$  to zdanie odrzuca. Czy wobec tego jego negacja, nie  $p$ , będzie prawdziwa? Byłoby tak, gdyby  $\mathfrak{M}_c^* \models Mx \neg A_1(x)$ , czyli

gdyby co najmniej cztery osoby odrzuciły zdanie  $p$ , a tak właśnie nie jest w tym modelu:  $\bar{A}_1^- \notin p_1^*(M)$ . Sytuacja ta przedstawiona jest na rysunku 4.9.



Rys. 4.9.:  $\mathfrak{M}_c^* \not\models Mx A_1(x)$ , ale nie jest tak, że  $\mathfrak{M}_c^* \models Mx \neg A_1(x)$  □

Nie byłoby wobec tego tak, że zdanie  $p$  jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy **nie**  $p$  jest prawdziwe. W modelu standardowym mogliśmy uniknąć tego wniosku, gdyż fałszywość po prostu zdefiniowana była jako niezachodzenie prawdziwości.<sup>17</sup> W modelu częściowym zarówno dla stwierdzenia prawdziwości zdania, jak i fałszywości odwołujemy się do modelu, stąd musimy zdefiniować kwantyfikator większości inaczej – tak, aby w powyższym przykładzie zdanie  $p$  nie było fałszywe, czyli tak, jak zdefiniowaliśmy kwantyfikator  $M$ . Ponieważ zależy nam przede wszystkim na adekwatności, a dopiero w dalszej kolejności na logicznej elegancji, więc być może należy się cieszyć, że jest tak jak w twierdzeniu 4.32.:

#### TWIERDZENIE 4.32.

Jeżeli  $\mathfrak{M}_c = \langle E, I_c, p_1, p_2 \rangle$  jest totalnym modelem częściowym dla języka  $L^*(M)$ , a  $\mathfrak{M} = \langle E, I \rangle$  jest modelem standardowym dla  $L^*(M)$  takim, że dla każdego symbolu tego języka  $\zeta$ , dla którego funkcja  $p_1$  jest zdefiniowana,  $I(\zeta) = p_1(\zeta)$ , to dla dowolnego wartościowania  $v$ :

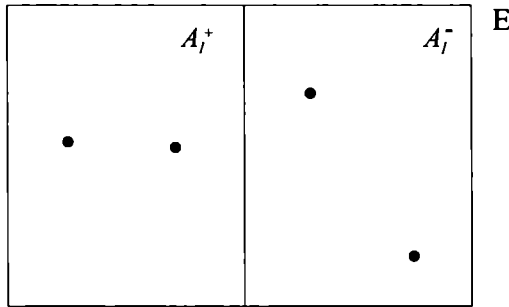
1.  $\mathfrak{M}_c \models \varphi[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathfrak{M} \models \varphi[v]$ ,
2. jeżeli  $\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v]$ , to nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models \varphi[v]$ ,
3. ale z faktu, że nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models \varphi[v]$ , nie wynika, że  $\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v]$ .

#### DOWÓD:

1. Mimo że twierdzenie 4.30. dotyczyło innego języka, to wszystkie kroki dowodowe dotyczące  $\models$  możemy przyjąć bez zmian. Pozostaje w tym wypadku pokazać, że  $\mathfrak{M}_c \models Mx \psi[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathfrak{M} \models Mx \psi[v]$ , gdzie  $\psi$  jest dowolną formułą:  $\mathfrak{M}_c \models Mx \psi[v]$  wtw  $|\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v(\frac{a}{x})]\}| > |E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v(\frac{a}{x})]\}|$ . Z założenia indukcyjnego wiemy, że  $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v(\frac{a}{x})]\} = \{a \in E : \mathfrak{M} \models \psi[v(\frac{a}{x})]\}$ , czyli  $\mathfrak{M} \models Mx \psi[v]$ .

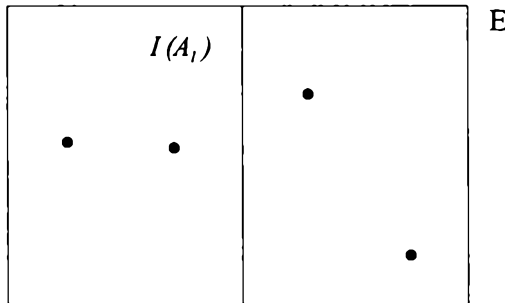
<sup>17</sup>Musimy dodatkowo założyć, że każdy uznaje lub odrzuca każde zdanie.

2. Podobnie w przypadku  $\not\models$  pozostaje pokazać, że jeżeli  $\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v]$ , to nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models \varphi[v]$  w przypadku, gdy  $\varphi = Mx\psi$ , a  $\psi$  jest dowolną formułą:  
 $\mathfrak{M}_c \not\models Mx\psi[v]$  wtw  $|\{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \psi[v(\frac{a}{x})]\}| > |E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \psi[v(\frac{a}{x})]\}|$ .  
 W tym wypadku, aby uzyskać pożądaną konkluzję, potrzebujemy wykazać, że  $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \psi[v(\frac{a}{x})]\} \subseteq \{a \in E : \text{nie jest tak, że } \mathfrak{M} \models \psi[v(\frac{a}{x})]\}$ , ale to wynika z założenia indukcyjnego, więc nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models Mx\psi[v]$ .
3. Dla udowodnienia trzeciego punktu rozważmy następujący kontrprzykład. Weźmy totalny model częściowy  $\mathfrak{M}_c = \langle E, I_c, p_1, p_2 \rangle$ , w którym dwie osoby uznają zdanie  $p$  i dwie je odrzucają w grupie czteroosobowej:



Rys. 4.10.: Nie jest tak, że  $\mathfrak{M}_c \not\models MxA_1(x)$

i odpowiadający mu model standardowy  $\mathfrak{M} = \langle E, I \rangle$ :



Rys. 4.11.: Nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models MxA_1(x)$

choć nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models MxA_1(x)$ , to model  $\mathfrak{M}_c$  zdania  $MxA_1(x)$  nie odrzuca, gdyż moc zbioru  $p_2(A_1)$  nie jest większa od mocy jego dopełnienia.  $\square$

Jak łatwo zauważyć, sytuacja zmieni się, gdy ograniczymy nasze rozważania do modeli o nieparzystym uniwersum:

**TWIERDZENIE 4.33.**

Jeżeli  $\mathfrak{M}_c = \langle E, I_c, p_1, p_2 \rangle$  jest totalnym modelem częściowym dla języka  $L^*(M)$  takim, że moc  $E$  jest nieparzysta, a  $\mathfrak{M} = \langle E, I \rangle$  jest modelem standardowym takim, że dla każdego symbolu tego języka  $\zeta$ , dla którego funkcja  $p_1$  jest zdefiniowana,  $I(\zeta) = p_1(\zeta)$ , to dla dowolnego wartościowania  $v$ :

$$\mathfrak{M}_c \models \varphi[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \mathfrak{M} \models \varphi[v]$$

oraz

$$\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \text{nie jest tak, że} \quad \mathfrak{M} \models \varphi[v].$$

**DOWÓD:**

Składając indukcyjne dowody dwu powyższych twierdzeń, wystarczy pokazać, że jeżeli nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models \varphi[v]$ , to  $\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v]$  dla  $\varphi = Mx\psi$ :

Jeżeli nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models Mx\psi[v]$ , to  $|\{a \in E : \mathfrak{M} \models \psi[v(\frac{a}{x})]\}| < |E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M} \models \psi[v(\frac{a}{x})]\}|$ , czyli  $|\{a \in E : \text{nie jest tak, że} \quad \mathfrak{M} \models \psi[v(\frac{a}{x})]\}| > |E \setminus \{a \in E : \text{nie jest tak, że} \quad \mathfrak{M} \models \psi[v(\frac{a}{x})]\}|$ .

Z założenia indukcyjnego wiemy, że

$\{a \in E : \text{nie jest tak, że} \quad \mathfrak{M} \models \psi[v(\frac{a}{x})]\} \subseteq \{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \psi[v(\frac{a}{x})]\}$ , co nam daje

$|\{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \psi[v(\frac{a}{x})]\}| > |E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \psi[v(\frac{a}{x})]\}|$ , czyli  $\mathfrak{M}_c \not\models Mx\psi[v]$ .  $\square$

Tym, co skłoniło mnie do przyjęcia spełniania superwaluacyjnego w miejsce spełniania po prostu było niezachowywanie konsekwencji logicznej przez modele częściowe. Spełnianie superwaluacyjne pozwala nam na przededefiniowanie wynikania logicznego tak, aby tego uniknąć. Definicje *wynikania superwaluacyjnego* oraz *tautologii superwaluacyjnej* podam w ogólnej postaci, dla dowolnego języka  $\mathcal{L}$ . W naszym przypadku językiem tym jest  $L^*(M)$ .

**DEFINICJA 4.34.** (wynikanie superwaluacyjne)

Mówimy, że formuła  $\psi \in \text{FOR}_{\mathcal{L}}$  *superwaluacyjnie wynika* ze zbioru formuł  $\Gamma \subseteq \text{FOR}_{\mathcal{L}}$ ,  $\Gamma \models_s \psi$ , wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego modelu częściowego  $\mathfrak{M}_c$  dla  $\mathcal{L}$  i każdego wartościowania  $v$ :

(i) jeżeli  $\mathfrak{M}_c \models_s \varphi[v]$  dla każdej formuły  $\varphi \in \Gamma$ , to  $\mathfrak{M}_c \models_s \psi[v]$

oraz

(ii) jeżeli  $\mathfrak{M}_c \not\models_s \psi[v]$ , to istnieje taka formuła  $\varphi \in \Gamma$ , że  $\mathfrak{M}_c \not\models_s \varphi[v]$ .  $\square$

W przypadku, gdy  $\Gamma = \{\varphi\}$ , będziemy pisać  $\varphi \models_s \psi$ , mając na myśli to, że  $\{\varphi\} \models_s \psi$ . Warunki (i) i (ii) będą równoważne, gdy zgodnie z twierdzeniem 4.33., ograniczymy rozważania do modeli o nieparzystym uniwersum, gdyż wtedy spełnianie w modelach totalnych, do którego w spełnianiu superwaluacyjnym się odwołujemy, będzie równoważne spełnianiu w modelach standardowych.

Analogicznie, za tautologie superwaluacyjne uznamy formuły superwaluacyjnie spełnione we wszystkich modelach częściowych:

## DEFINICJA 4.35. (tautologia superwaluacyjna)

Formułę  $\varphi \in \text{FOR}_{\mathcal{L}}$  nazywamy *tautologią superwaluacyjną*,  $\models_s \varphi$ , gdy jest ona superwaluacyjnie spełniona przez wszystkie wartościowania, we wszystkich modelach częściowych.  $\square$

Dzięki obowiązywaniu twierdzeń 4.30., 4.32. i 4.33. tautologią jest formuła spełniona we wszystkich modelach totalnych, a więc w przypadku języka nie zawierającego kwantyfikatora większości lub całego języka  $L^*(M)$  przy założeniu nieparzystości uniwersum, we wszystkich modelach standardowych. Tautologiami w takim wypadku będą wobec tego wszystkie klasyczne tautologie rachunku predykatów, a także wiele innych, wynikających z dodania kwantyfikatora większości.

Zarzuca się często (por. na przykład Blamey 1986, s. 13), że przyjęcie superwaluacji, a co za tym idzie superwaluacyjnego spełniania, prowadzi do naruszenia ekstensjonalności, gdyż może być tak, że zdanie złożone jest spełnione, choć żadne z jego zdań składowych nie będą. Najprostszym przykładem będzie tu prawo wyłączzonego środka. Z naszego jednak punktu widzenia ten niewątpliwie fakt jest raczej zaletą niż wadą, gdyż i logika uznawania nie wydaje się do końca ekstensjonalna. W logice ekstensjonalnej z tego, że ktoś uznaje zdanie *p lub q* moglibyśmy wnioskować, że albo jest tak, że uznaje on *p*, albo jest tak, że uznaje on *q*. Wydaje się jednak, że w rzeczywistości jest tak, iż dana osoba może uznawać alternatywę zdań, widząc na przykład, że opisują one sytuacje, spośród których jedna musi zachodzić, a nie uznaje żadnego z nich, gdyż po prostu nie ma pojęcia, która z tych sytuacji zachodzi. Podobnie będzie w przypadku odrzucania koniunkcji zdań: ktoś może odrzucać koniunkcję dwu zdań widząc sprzeczność w nich zawartą, mimo że nie odrzuca żadnego z tych zdań z osobna, gdyż po prostu nie potrafi się zdecydować, które z nich odrzucić.

W rozdziale 3.3. na stronie 47 zacytowałam prawa podane przez Reschera w (1962), które według niego obowiązują dla większości. W modelach większości zdefiniowanych tak jak w tym rozdziale, prawa te są superwaluacyjnie spełnione, co łatwo pokazać na podstawie definicji.

## FAKT 4.36.

Dla każdego modelu  $\mathfrak{M}_c$  dla  $L^*(M)$  i dla każdego wartościowania  $v$ :

1.  $\mathfrak{M}_c \models_s \forall x \varphi(x) \rightarrow Mx \varphi(x) [v]$ ,
2.  $\mathfrak{M}_c \models_s Mx \varphi(x) \rightarrow \exists x \varphi(x) [v]$ ,
3.  $\mathfrak{M}_c \models_s (Mx \varphi(x) \wedge Mx \psi(x)) \rightarrow \exists x (\varphi(x) \wedge \psi(x)) [v]$ ,
4.  $\mathfrak{M}_c \models_s Mx \varphi(x) \leftrightarrow \neg Mx \neg \varphi(x) [v]$ ,<sup>18</sup>
5.  $\mathfrak{M}_c \models_s (Mx (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \wedge \forall x \varphi(x)) \rightarrow Mx \psi(x) [v]$ ,
6.  $\mathfrak{M}_c \models_s (\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \wedge Mx \varphi(x)) \rightarrow Mx \psi(x) [v]$ .  $\square$

Rescher twierdził też, że w (4.) nie mamy implikacji z prawej na lewą, gdyż nie jest ona spełniona w modelach o parzystym uniwersum. Tak jest rzeczywiście w modelu standardowym, ale w modelu częściowym z superwaluacyjnym spełnianiem mamy równoważność, gdyż kwantyfikator *M* jest samodualny w każdym modelu częściowym (fakt 4.14. na stronie 63).

<sup>18</sup>  $\leftrightarrow$  jest tutaj skrótem dla implikacji w obie strony.

#### 4.4. DEFINICJA KRYTERIUM PRAWDY PRZEZ ZGODĘ WIĘKSZOŚCI W MODELU CZĘŚCIOWYM DLA $L^*(M)$ ZE SPEŁNIANIEM SUPERWALUACYJNYM

W przejściach od modelu standardowego, poprzez model częściowy, do modelu częściowego ze spełnianiem superwaluacyjnym kierowaliśmy się chęcią bycia w zgodzie z intuicjami dotyczącymi uznawania, większości i prawdziwości, takimi jak:

1. przekonanie, że nie każdy z nas potrafi zdecydować o każdym zdaniu, czy uznaje je czy odrzuca;
2. przekonanie o tym, że kryterium prawdy musi zachowywać równoważność fałszu i negacji prawdy, a także
3. przekonanie o tym, że uznawanie zdań nie jest do końca ekstensjonalne i na przykład uznawanie alternatywy nie jest całkowicie wyznaczone poprzez uznawanie jej składników.

Model ostatni, wraz ze spełnianiem superwaluacyjnym, wydaje się czynić zadość tym intuicjom i definicja kryterium prawdy przez zgodę większości w nim sformułowana wyglądała będzie następująco:

DEFINICJA 4.37. (kryterium prawdy przez zgodę większości I)

Niech  $\mathfrak{M}_c$  będzie modelem, którego uniwersum stanowi wyróżniona populacja, a  $\varphi(x) = T(U(\alpha, x))$ :

Zdanie  $\alpha$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_c \models_s Mx\varphi(x).$$

Zdanie  $\alpha$  jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_c \not\models_s Mx\varphi(x). \quad \square$$

W szczególności w przypadku zdań atomowych definicja ta przybierze następującą postać:

Zdanie  $p_1$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_c \models_s MxA_1(x).$$

Zdanie  $p_1$  jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_c \not\models_s MxA_1(x).$$

W rozdziałach następnych przeprowadzę analizę kryterium prawdy przez zgodę większości w oparciu o kwantyfikator  $M^2$ .

## MODELE SKOŃCZONE DLA $M^2$

W modelach dla języka  $L^*(M)$  relatywizacja do populacji, której uznawanie zdań rozważamy, wyrażona była poprzez relatywizację do uniwersum modelu, gdyż kwantyfikator większości „badał” większość w całym uniwersum. Oznaczało to, że jakakolwiek zmiana w składzie grupy pociągała za sobą zmianę modelu. I tak na przykład, gdybyśmy chcieli porównać, jaki procent kobiet w wieku 20–30 lat uznaje zdanie  $p$ , z sytuacją w następnej grupie wiekowej (30–40 lat), to musielibyśmy porównywać dwa różne modele. Gdy natomiast przyjmujemy, że kwantyfikatorem, który odpowiada kwantyfikatorowi większości z języka naturalnego, jest kwantyfikator  $M^2$  typu  $\langle 1, 1 \rangle$ , to takiego porównania możemy dokonać bez zmiany modelu. Jest to spowodowane tym, że relatywizacja do populacji wyraża się tutaj za pomocą pierwszego argumentu kwantyfikatora większości i na przykład zdanie „Większość kobiet pomiędzy dwudziestym a trzydziestym rokiem życia uznaje zdanie  $p$ ” może być wyrażone za pomocą zdania  $M^2_{xx}(D(x), A_1(x))$ , gdzie predykat  $D$  jest interpretowany jako „bycie kobietą pomiędzy dwudziestym a trzydziestym rokiem życia”, podczas gdy zdanie „Większość kobiet pomiędzy trzydziestym a czterdziestym rokiem życia uznaje zdanie  $p$ ” może być wyrażone za pomocą zdania  $M^2_{xx}(T(x), A_1(x))$ , gdzie predykat  $T$  jest interpretowany jako „bycie kobietą pomiędzy trzydziestym a czterdziestym rokiem życia”. Gdy przyjmiemy, że uniwersum modelu składa się na przykład z wszystkich ludzi lub wszystkich kobiet (ważne, aby interpretacje predykatów reprezentujących obie rozważane grupy zawierały się w tym uniwersum), to możemy porównywać spełnianie obu tych skwantyfikowanych zdań, a co za tym idzie prawdziwość zdania  $p$  dla obu grup, w jednym modelu. Model zmieni się tylko wtedy, gdy zmieni się skład ilościowy elementó uniwersum – przybędzie lub ubędzie ludzi, kobiet czy innej grupy, którą za zinterpretowaną przez uniwersum przyjęliśmy. Gdy natomiast zmieni się skład grupy, którą rozważamy, to możemy po prostu wyrazić to przez zmianę predykatu, który będzie interpretowany przez ten nowy zbiór, bez konieczności zmiany modelu. Ze względu na to, że kwantyfikator  $M^2$  spełnia EKST, KONS i ISOM, jego spełnianie w modelu nie jest zależne od uniwersum tego modelu, a jedynie od mocy zbiorów, które interpretują argumenty tego kwantyfikatora (patrz rozdział 3.1.). O tym, że kwantyfikator większości typu  $\langle 1, 1 \rangle$  zdefiniowany tak jak w modelach zaproponowanych poniżej spełnia EKST, KONS i ISOM, przekonamy się za pomocą twierdzenia 5.14. na stronie 87.

W rozdziale 3.2. argumentowałam na rzecz tego, że kwantyfikatorem większości używanym w języku naturalnym jest raczej kwantyfikator  $M^2$  typu  $\langle 1, 1 \rangle$ , niż kwantyfikator  $M$  typu  $\langle 1 \rangle$ . Dodatkowo, dzięki definiowalności kwantyfikatora  $M$  w języku  $L^*(M^2)$  (twierdzenie 5.9. na stronie 84), wszystkie rozważania, które przeprowadzaliśmy w poprzednim rozdziale, możemy odtworzyć w języku  $L^*(M^2)$ . W rozdziale 7 pokażę, jak można dzięki przyjęciu kwantyfikatora  $M^2$  za kwantyfikator podstawowy uniknąć ograniczenia FIN, czyli ograniczenia rozważań do modeli skończonych, jakie przyjmowaliśmy w rozdziale poprzed-

nim i dalej podtrzymujemy w tym rozdziale. Dlatego też w tym rozdziale przeprowadzę logiczną analizę kryterium prawdy przez zgodę większości za pomocą kwantyfikatora  $M^2$ .

### 5.1. JĘZYK $L^*(M^2)$

Język  $L^*(M^2)$  różni się od języka  $L^*(M)$  przede wszystkim w punktach, które dotyczą kwantyfikatorów  $M$  i  $M^2$ . Oto jego definicja:

#### DEFINICJA 5.1. (język $L^*(M^2)$ )

Język  $L^*(M^2)$  składa się z następujących wyrażeń:

##### 1. Symbole logiczne:

- (•) punkty 1.(a) i (b) jak w definicji 2.1. na stronie 29,
- (c) symbole kwantyfikatorowe:  $M^2, \forall, \exists$ ,
- (d) symbol identityczności:  $=$ .

##### 2. Symbole pozalogiczne:

- (a) dla każdego  $n = 1, 2, \dots$  zbiór (niekoniecznie niepusty)  $n$ -argumentowych symboli relacyjnych  $P^n$ ; dowolne elementy tych zbiorów oznaczamy za pomocą symboli  $P, R, S, P_1, P_2, \dots$ ; jednoargumentowe symbole relacyjne nazywamy symbolami predykatywnymi lub po prostu predykatami;
- (b) zbiór wyróżnionych symboli predykatywnych  $A_1, A_2, \dots$

##### 3. Nawiasy: $(, )$ . □

Ze względów, które wyjaśnię w dalszej części tego rozdziału, będziemy chcieli ograniczyć występowanie predykatów wyróżnionych jako argumentów kwantyfikatora większości do miejsca drugiego argumentu. Dokonamy tego na poziomie definicji poprawnie zbudowanej formuły. Z tego też powodu język, który tu zdefiniujemy, będzie się różnił w istotny sposób od języka logiki elementarnej z dodanym kwantyfikatorem większości, w którym zazwyczaj nie nakłada się dodatkowych ograniczeń na formowanie wyrażeń złożonych za pomocą kwantyfikatora większości.

#### DEFINICJA 5.2. (formuła $L^*(M^2)$ )

Zasady tworzenia formuł:

R. Punkty R1.(a), (b) i R2. tak jak w definicji 2.2. na stronie 30.

R3. (a) Jeżeli  $\varphi$  jest formułą, a  $x$  zmienną, to  $\exists x \varphi, \forall x \varphi$  są formułami.

- (b) Jeżeli  $\varphi$  jest formułą nie zawierającą predykatów wyróżnionych,  $\psi$  jest dowolną formułą, a  $x$  i  $y$  są zmiennymi, to  $M^2xy(\varphi, \psi)$  jest formułą.

R4. Jak w definicji 2.2. na stronie 30.

Jedynie wyrażenia zbudowane za pomocą kroków R1.–R4. są formułami  $L^*(M^2)$ . □



Formuły zbudowane zgodnie z krokami R1. lub R2. nazywamy *formułami atomowymi*. Przez  $\text{FOR}_{L^*(M^2)}$  będą oznaczała zbiór formuł  $L^*(M^2)$ .

DEFINICJA 5.3. (implikacja w  $L^*(M^2)$ )

Jeżeli  $\varphi, \psi$  są dowolnymi formułami, to

$$(\varphi \rightarrow \psi) \stackrel{\text{df}}{=} (\neg\varphi \vee \psi). \quad \square$$

DEFINICJA 5.4. (kwantyfikator M w języku  $L^*(M^2)$ )

Jeżeli  $\varphi$  jest formułą, to

$$Mx\varphi \stackrel{\text{df}}{=} M^2xx(x = x, \varphi). \quad \square$$

DEFINICJA 5.5. (zmienna wolna w  $L^*(M^2)$ )

Zbiór zmiennych wolnych formuły  $\varphi \in \text{FOR}_{L^*(M^2)}$ ,  $ZW(\varphi)$ , definiujemy w następujący sposób:

1. jeżeli  $\varphi$  jest formułą atomową, to  $ZW(\varphi)$  jest zbiorem zmiennych występujących w  $\varphi$ ,
2.  $ZW(\neg\varphi) = ZW(\varphi)$ ,
3.  $ZW(\varphi \wedge \psi) = ZW(\varphi \vee \psi) = ZW(\varphi) \cup ZW(\psi)$ ,
4.  $ZW(\exists x\varphi) = ZW(\forall x\varphi) = ZW(\varphi) \setminus \{x\}$ ,
5.  $ZW(M^2xy(\varphi, \psi)) = (ZW(\varphi) \cup ZW(\psi)) \setminus \{x, y\}$ . □

DEFINICJA 5.6. (zdanie  $L^*(M^2)$ )

Zdaniem języka  $L^*(M^2)$  nazywamy formułę  $L^*(M^2)$  bez zmiennych wolnych. □

## 5.2. MODELE CZĘŚCIOWE DLA $L^*(M^2)$

DEFINICJA 5.7. (model częściowy dla  $L^*(M^2)$ )

Modelem częściowym  $\mathfrak{M}_c$  dla języka  $L^*(M^2)$  nazywamy  $\langle E, I_c, p_1, p_2 \rangle$ , uporządkowaną czwórkę, gdzie  $E$  jest dowolnym niepustym zbiorem o mocy skończonej, a  $I_c, p_1, p_2$  są funkcjami interpretującymi wyrażenia tego języka w następujący sposób:

11. Jeżeli  $R$  jest  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, to  
 $I(R) = \langle \bar{R}^+, \bar{R}^- \rangle$ , gdzie  $\bar{R}^+ \subseteq E^n$ ,  $\bar{R}^- \subseteq (E^n \setminus \bar{R}^+)$ ,  $p_1(R) = \bar{R}^+$ ,  $p_2(R) = \bar{R}^-$ .
12.  $I_c(=) = \{ \langle a, b \rangle \in E^2 : a = b \}, \{ \langle a, b \rangle \in E^2 : a \neq b \}$ ,  
 $p_1(=) = \{ \langle a, b \rangle \in E^2 : a = b \}$ ,  $p_2(=) = \{ \langle a, b \rangle \in E^2 : a \neq b \}$ .  
 Jest to relacja totalna.
13.  $I(\forall) = \langle \{E\}, \wp(E) \setminus \{\emptyset\} \rangle$ ,  $p_1(\forall) = \{E\}$ ,  $p_2(\forall) = \wp(E) \setminus \{\emptyset\}$ ;  
 $I(\exists) = \langle \wp(E) \setminus \{\emptyset\}, \{E\} \rangle$ ,  $p_1(\exists) = \wp(E) \setminus \{\emptyset\}$ ,  $p_2(\exists) = \{E\}$ ;

$$\begin{aligned}
I(M^2) &= \langle \{ \langle X, Y \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : |X \cap Y| > |X \setminus Y| \}, \\
&\quad \{ \langle X, Y \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : |X \cap Y| > |X \setminus Y| \} \rangle \\
p_1(M^2) &= p_2(M^2) = \{ \langle X, Y \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : |X \cap Y| > |X \setminus Y| \}. \quad \square
\end{aligned}$$

DEFINICJA 5.8. (spełnianie w modelu częściowym dla  $L^*(M^2)$ )

Mówimy, że wartościowanie  $v$  spełnia (odrzuca) formułę  $\varphi \in \text{FOR}_{L^*(M^2)}$  w modelu częściowym  $\mathfrak{M}_c$  dla  $L^*(M^2)$ ,  $\mathfrak{M}_c \models \varphi[v]$  ( $\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v]$ ), gdy:

S. Punkty S1. i S2. tak jak w definicji 4.10. na stronie 59.

S3. Przypadki  $\forall$  i  $\exists$  jak w definicji 4.10. na stronie 59

$\mathfrak{M}_c \models M^2xy(\varphi, \psi)[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle \{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \varphi[v_x^a]\}, \{b \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v_y^b]\} \rangle \in p_1(M^2)$$

(wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \varphi[v_x^a]\} \cap \{b \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v_y^b]\}|$$

$$> |\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \varphi[v_x^a]\} \setminus \{b \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v_y^b]\}|);$$

$\mathfrak{M}_c \not\models M^2xy(\varphi, \psi)[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle \{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \varphi[v_x^a]\}, \{b \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \psi[v_y^b]\} \rangle \in p_2(M^2)$$

(wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \varphi[v_x^a]\} \cap \{b \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \psi[v_y^b]\}|$$

$$> |\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \varphi[v_x^a]\} \setminus \{b \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \psi[v_y^b]\}|).$$

S4. Jak w definicji 4.10. na stronie 60. □

W przypadku zdań mówić będziemy, że model częściowy spełnia zdanie, mając na myśli to, że dowolne wartościowanie spełnia to zdanie w modelu częściowym (por. definicja 4.6. na stronie 56). Gdy  $P(x), R(y)$  są formułami atomowymi, to

$$\mathfrak{M}_c \models M^2xy(P(x), R(y)) \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad |\bar{P}^+ \cap \bar{R}^+| > |\bar{P}^+ \setminus \bar{R}^+|.$$

$$\mathfrak{M}_c \not\models M^2xy(P(x), R(y)) \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad |\bar{P}^+ \cap \bar{R}^-| > |\bar{P}^+ \setminus \bar{R}^-|.$$

TWIERDZENIE 5.9.

Dla dowolnego modelu częściowego  $\mathfrak{M}_c$  i dowolnego wartościowania  $v$ :

$\mathfrak{M}_c \models Mx\psi[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v_x^a]\}| > |E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v_x^a]\}|.$$

$\mathfrak{M}_c \not\models Mx\psi[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \psi[v_x^a]\}| > |E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \psi[v_x^a]\}|.$$

DOWÓD: oczywisty po zastosowaniu definicji  $M$  w  $L^*(M^2)$ :

$$\mathfrak{M}_c \models Mx\psi[v] \quad \text{wtw} \quad \mathfrak{M}_c \models M^2xx(x = x, \psi)[v]$$

$$\text{wtw} \quad |\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v_x^a]\}| > |E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi[v_x^a]\}|.$$

$$\mathfrak{M}_c \not\models Mx\psi[v] \quad \text{wtw} \quad \mathfrak{M}_c \not\models M^2xx(x = x, \psi)[v]$$

$$\text{wtw} \quad |\{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \psi[v_x^a]\}| > |E \setminus \{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \psi[v_x^a]\}|. \quad \square$$

W szczególności, gdy  $\psi(x) = P(x)$ , to  $\mathfrak{M}_c \models MxP(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $|\bar{P}^+| > |E \setminus \bar{P}^+|$ , a  $\mathfrak{M}_c \not\models MxP(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $|\bar{P}^-| > |E \setminus \bar{P}^-|$ . Okazuje się więc, że kwantyfikator

większości  $M$  typu (1) zdefiniowany w  $L^*(M^2)$  i kwantyfikator większości  $M$  będący symbolem podstawowym języka  $L^*(M)$  otrzymują tę samą interpretację.

Tutaj, podobnie jak w przypadku modelu standardowego oraz częściowego dla  $L^*(M)$ , rozszerzymy definicję funkcji  $I_c$  na pewne wybrane formuły, poprzez zdefiniowanie jej składowych funkcji  $p_1$  i  $p_2$  w następujący sposób:

DEFINICJA 5.10. (funkcja  $I_c$  dla wybranych formuł złożonych języka  $L^*(M^2)$ )

1. Punkty 1(a), (b), (c), (d) oraz (2) i (3) dokładnie tak jak w definicji 4.11. na stronie 60.
2. Jeżeli  $\varphi(x_2, \dots, x_n) = M^2 x_1 x_1 (S(x_1, \dots, x_n), R(x_1, \dots, x_n))$ , gdzie  $S(x_1, \dots, x_n)$  oraz  $R(x_1, \dots, x_n)$  są  $n$ -argumentowymi symbolami relacyjnymi o tych samych zmiennych wolnych, to
 
$$p_1(\varphi) = \{ \langle a_2, \dots, a_n \rangle \in E^{n-1} : X \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_n\} \subseteq p_1(S), Y \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_n\} \subseteq p_1(R) \\ \text{i } |X \cap Y| > |X \setminus Y| \},$$

$$p_2(\varphi) = \{ \langle a_2, \dots, a_n \rangle \in E^{n-1} : X \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_n\} \subseteq p_1(S), Y \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_n\} \subseteq p_2(R) \\ \text{i } |X \cap Y| > |X \setminus Y| \}.$$

We wszystkich tych przypadkach  $I_c(\varphi) = \langle p_1(\varphi), p_2(\varphi) \rangle$ . □

I podobnie jak w przypadku modelu standardowego oraz częściowego dla  $L^*(M)$  połączymy powyższą definicję z definicją spełniania następującym twierdzeniem:

TWIERDZENIE 5.11.

1. Gdy  $\varphi(x)$  jest formułą z jedną zmienną wolną nie zawierającą kwantyfikatorów, to dla dowolnego modelu  $\mathfrak{M}_c$  dla  $L^*(M^2)$  i dowolnego wartościowania  $v$ :

$$\mathfrak{M}_c \models \varphi(x)[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad v(x) \in p_1(\varphi)$$

oraz

$$\mathfrak{M}_c \not\models \varphi(x)[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad v(x) \in p_2(\varphi).$$

2. Gdy  $\varphi(x_2, \dots, x_n)$  jest formułą z  $n-1$  zmiennymi wolnymi, składającą się z jednego kwantyfikatora, zmiennych i jednej (w przypadku kwantyfikatorów  $\forall$  i  $\exists$ ) lub dwu (w przypadku kwantyfikatora  $M^2$ ) formuł atomowych, to:

$$\mathfrak{M}_c \models \varphi(x_2, \dots, x_n)[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \langle v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(\varphi)$$

oraz

$$\mathfrak{M}_c \not\models \varphi(x_2, \dots, x_n)[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \langle v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_2(\varphi).$$

DOWÓD

1. Punkt 1. wynika z twierdzenia 4.12. na stronie 61, gdyż na części bezkwantyfikatorowej  $L^*(M)$  i  $L^*(M^2)$  się nie różnią.
2. Przypadki  $\forall$  i  $\exists$  analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 4.12. na stronie 61. Przeprowadzimy dowód dla  $M^2$ . Niech  $S(x_1, \dots, x_n)$  oraz  $R(x_1, \dots, x_n)$  będą  $n$ -argumentowymi symbolami relacyjnymi o tych samych zmiennych wolnych, a  $\varphi(x_2, \dots, x_n) = M^2 x_1 x_1 (S(x_1, \dots, x_n), R(x_1, \dots, x_n))$ :

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{M}_c \models M^2 x_1 x_1 (S(x_1, \dots, x_n), R(x_1, \dots, x_n)) [v] \\
& \text{wtw } |\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models S(x_1, \dots, x_n) [v_{r_1}^a]\} \cap \{b \in E : \mathfrak{M}_c \models R(x_1, \dots, x_n) [v_{r_1}^b]\} | \\
& \quad > |\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models S(x_1, \dots, x_n) [v_{r_1}^a]\} \setminus \{b \in E : \mathfrak{M}_c \models R(x_1, \dots, x_n) [v_{r_1}^b]\} | \\
& \text{wtw } |\{a \in E : \langle a, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(S)\} \cap \{b \in E : \langle b, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(R)\} | \\
& \quad > |\{a \in E : \langle a, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(S)\} \setminus \{b \in E : \langle b, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(R)\} | \\
& \text{wtw } \langle v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(\varphi). \\
& \mathfrak{M}_c \not\models M^2 x_1 x_1 (S(x_1, \dots, x_n), R(x_1, \dots, x_n)) [v] \\
& \text{wtw } |\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models S(x_1, \dots, x_n) [v_{r_1}^a]\} \cap \{b \in E : \mathfrak{M}_c \not\models R(x_1, \dots, x_n) [v_{r_1}^b]\} | \\
& \quad > |\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models S(x_1, \dots, x_n) [v_{r_1}^a]\} \setminus \{b \in E : \mathfrak{M}_c \not\models R(x_1, \dots, x_n) [v_{r_1}^b]\} | \\
& \text{wtw } |\{a \in E : \langle a, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(S)\} \cap \{b \in E : \langle b, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_2(R)\} | \\
& \quad > |\{a \in E : \langle a, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(S)\} \setminus \{b \in E : \langle b, v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_2(R)\} | \\
& \text{wtw } \langle v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_2(\varphi). \quad \square
\end{aligned}$$

Podstawową rzeczą, jaką należałoby zauważyć, jest niesymetryczność dwu argumentów kwantyfikatora  $M^2$ , o której była już mowa w rozdziale 3. Tutaj wyrazi się to spostrzeżeniem o samodualności kwantyfikatora  $M^2$ :

FAKT 5.12.

Dla dowolnego modelu częściowego  $\mathfrak{M}_c$  i dowolnego wartościowania  $v$ :

$$\mathfrak{M}_c \models \neg M^2 xy(\psi, \neg\varphi) [v] \quad \text{wtw} \quad \mathfrak{M}_c \models M^2 xy(\psi, \varphi) [v]$$

oraz

$$\mathfrak{M}_c \not\models \neg M^2 xy(\psi, \neg\varphi) [v] \quad \text{wtw} \quad \mathfrak{M}_c \not\models M^2 xy(\psi, \varphi) [v].$$

DOWÓD:

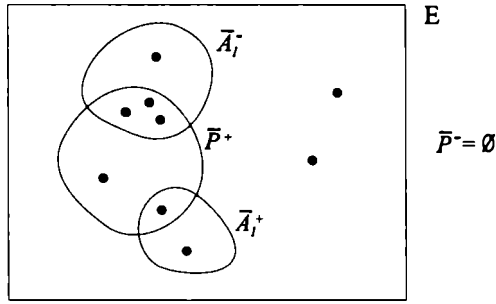
$$\begin{aligned}
1. \quad & \mathfrak{M}_c \models \neg M^2 xy(\psi, \neg\varphi) [v] \quad \text{wtw} \quad \mathfrak{M}_c \not\models M^2 xy(\psi, \neg\varphi) [v] \\
& \text{wtw } |\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi [v_r^a]\} \cap \{b \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \neg\varphi [v_r^b]\} | \\
& \quad > |\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi [v_r^a]\} \setminus \{b \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \neg\varphi [v_r^b]\} | \\
& \text{wtw } |\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi [v_r^a]\} \cap \{b \in E : \mathfrak{M}_c \models \varphi [v_r^b]\} | \\
& \quad > |\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \psi [v_r^a]\} \setminus \{b \in E : \mathfrak{M}_c \models \varphi [v_r^b]\} | \\
& \text{wtw } \mathfrak{M}_c \models M^2 xy(\psi, \varphi) [v].
\end{aligned}$$

2. Dowód dla  $\not\models$  przebiega analogicznie. □

Nie jest natomiast tak, że  $\mathfrak{M}_c \models \neg M^2 xy(\psi, \varphi) [v] \quad \text{wtw} \quad \mathfrak{M}_c \models M^2 xy(\neg\psi, \varphi) [v]$  dla dowolnego modelu  $\mathfrak{M}_c$  i dowolnego wartościowania  $v$ , jak pokaże poniższy przykład:

PRZYKŁAD 5.13.

Badamy zdania  $M^2 xx(\neg P(x), A_1(x))$  i  $\neg M^2 xx(P(x), A_1(x))$  w modelu  $\mathfrak{M}_c$  o uniwersum  $E$ :



Rys. 5.1.:  $\mathfrak{M}_c \models \neg M^2xx(P(x), A_1(x))$ ; nie jest tak, że  $\mathfrak{M}_c \models M^2xx(\neg P(x), A_1(x))$

Zdanie  $M^2xx(\neg P(x), A_1(x))$  nie jest w tym modelu spełnione, gdyż  $I(P) = \langle \bar{P}^+, \emptyset \rangle$ , a co za tym idzie  $|\emptyset \cap \bar{A}_1^+| = 0$  – nie jest więc większa od żadnej liczby wyrażającej moc zbioru. Natomiast  $|\bar{P}^+ \cap \bar{A}_1^-| = 3$ , a  $|\bar{P}^+ \setminus \bar{A}_1^-| = 2$ , czyli zdanie  $\neg M^2xx(P(x), A_1(x))$  jest w tym modelu spełnione.  $\square$

W przykładzie powyższym zaznaczyliśmy na rysunku uniwersum modelu, choć potem z tej informacji nie korzystaliśmy, gdyż definicja spełniania w przypadku kwantyfikatora  $M^2$  nie odwoływała się do niego. Za tę możliwość odpowiedzialne są cechy relacji, jakimi są oba człony interpretacji tego kwantyfikatora:  $p_1(M^2)$  i  $p_2(M^2)$ . W modelach częściowych każdy symbol kwantyfikatorowy interpretowany jest nie przez podzbiór odpowiednio  $\wp(E)$  lub  $\wp(E) \times \wp(E)$ , ale przez parę takich podzbiorów, czyli jak gdyby przez dwa kwantyfikatory uogólnione w sensie definicji 3.1. na stronie 35. To  $p_1(M^2)$  i  $p_2(M^2)$  są kwantyfikatorami w tym sensie i posiadają one cechy, takie jak EKST, KONS i ISOM, znane z rozdziału 3. (definicje 3.5., 3.6., 3.7. na stronie 40). Poniższe twierdzenie, pokazujące, że  $p_1(M^2)$  i  $p_2(M^2)$  są EKST, KONS i ISOM, bezpośrednio wynika z definicji  $p_1(M^2)$  i  $p_2(M^2)$ .

#### TWIERDZENIE 5.14.

$p_1(M^2)$  i  $p_2(M^2)$  są EKST, KONS i ISOM.

DOWÓD:  $p_1(M^2) = \{\langle X, Y \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : |X \cap Y| > |X \setminus Y|\}$ . Nazwijmy tę relację relacją  $R_E$ .  $R_{E'}$  będzie analogiczną relacją na zbiorze  $E'$ . Weźmy dowolne zbiory  $X, Y \subseteq E \subseteq E'$ :

#### 1. EKST

$\langle X, Y \rangle \in R_E$  wtw  $|X \cap Y| > |X \setminus Y|$ . Ponieważ  $X, Y \subseteq E'$ , więc jest to równoważne temu, że  $\langle X, Y \rangle \in R_{E'}$ .

#### 2. KONS

Załóżmy, że  $\langle X, Y \rangle \in R_E$ . Ponieważ  $X \cap (X \cap Y) = X \cap Y$ , a  $X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$ , więc jest to równoważne temu, że  $\langle X, (X \cap Y) \rangle \in R_E$ .

#### 3. ISOM

Niech  $\pi$  będzie bijekcją z  $E$ .  $\langle X, Y \rangle \in R_E$  wtw  $\langle \pi(X), \pi(Y) \rangle \in R_{\pi(E)}$ , gdyż bijekcja zachowuje moce odpowiednich zbiorów.

Ponieważ  $p_2(M^2) = p_1(M^2)$ , więc tym samym pokazaliśmy, że  $p_2(M^2)$  jest EKST, KONS i ISOM.  $\square$

Następne twierdzenie potwierdzi prawostronną monotoniczność  $M^2$ , co będzie oznaczało, że zachowana jest tu prosta intuicja, zgodnie z którą jeżeli przypisaliśmy zdaniu  $p$  prawdziwość na podstawie tego, że większość członków populacji  $b$  je uznaje, to zwiększenie liczby zwolenników tego zdania tej prawdziwości nie zachwieje:

**TWIERDZENIE 5.15.** (prawostronna monotoniczność kwantyfikatora  $M^2$ )  
Kwentyfikator  $M^2$  jest prawostronnie monotoniczny.

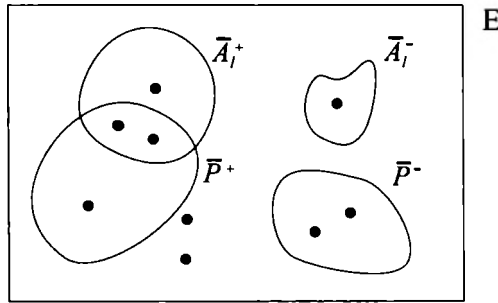
**DOWÓD:** Weźmy  $X \subseteq E$ , oraz  $Y \subseteq Y' \subseteq E$  takie, że  $\langle X, Y \rangle \in R_E$  ( $R_E$  oznacza to samo co w twierdzeniu powyżej). Wiemy wobec tego, że  $|X \cap Y'| \geq |X \cap Y|$ , a  $|X \setminus Y'| \leq |X \setminus Y|$ , z czego wynika, że  $\langle X, Y' \rangle \in R_E$ .  $\square$

Problemem, jaki powstaje w przypadku modeli częściowych dla  $L^*(M^2)$ , jest ich „zbyttnia częściowość”. Oprócz predykatów  $A_1, A_2, \dots$ , do których częściowej interpretacji przyzwyczailiśmy się już w poprzednim rozdziale, w częściowy sposób interpretujemy także inne symbole relacyjne, a więc i pierwszy argument kwantyfikatora  $M^2$ , który w wyróżnionej interpretacji określa populację, o której większość pytamy. Rozważając prawdziwość zdania  $p$ , pytamy o spełnianie zdania  $M^2xx(P(x), A_1(x))$  w modelu  $\mathfrak{M}_c$ . Zbiór będący interpretacją predykatu  $P$  odpowiadał będzie wyróżnionej populacji; powiedzmy – wszystkim politykom w Polsce. Problem jednak w tym, że interpretacją  $P$  nie jest zbiór, ale para zbiorów, z których pierwszy reprezentuje tych, którzy są politykami w Polsce, a drugi tych, którzy nimi nie są. Jeżeli w danym modelu jeden zbiór jest dopełnieniem drugiego, to nie ma kłopotu z interpretacją, ale w większości modeli częściowych tak nie będzie. W przypadku polskich polityków częściowa interpretacja jest być może na miejscu, gdyż tylko część Polaków uważa się za zawodowych polityków i następna część zdecydowanie za polityków się nie uważa. Pozostaje jednak duża grupa tych, których trudno w tej klasyfikacji zmieścić. W przypadku natomiast grupy fizyków, ludzi w określonym wieku czy wszystkich mężczyzn nie jest jasne, jak należałoby interpretować tę część uniwersum, która pozostaje zarówno poza  $p_1(P)$  jak i poza  $p_2(P)$ . Nawet gdybyśmy przyjęli, że także w przypadku predykatów takich jak „bycie geografem” zawsze znajdziemy przypadki sporne, które usprawiedliwią częściowe potraktowanie tego predykatu, to badając większość danej grupy ze względów praktycznych bralibyśmy pod uwagę jedynie te osoby, które do niej niewątpliwie należą. Temu też odpowiada interpretacja kwantyfikatora  $M^2$  w modelu częściowym:  $\mathfrak{M}_c \models M^2xx(P(x), A_1(x))$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $|p_1(P) \cap p_1(A_1)| > |p_1(P) \setminus p_1(A_1)|$ , natomiast w przypadku odrzucania  $\mathfrak{M}_c \not\models M^2xx(P(x), A_1(x))$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $|p_1(P) \cap p_2(A_1)| > |p_1(P) \setminus p_2(A_1)|$ , więc spełnianie i odrzucanie zdania  $M^2xx(P(x), A_1(x))$  zależy tylko i wyłącznie od tego, co jest w  $p_1(P)$  (efekt EKST, KONS i ISOM). Z punktu widzenia naszego celu, czyli logicznej analizy kryterium prawdy przez zgodę większości, taka częściowa interpretacja pierwszego argumentu binarnego kwantyfikatora większości jest zbyteczną komplikacją.

Oprócz kwestii opisanych powyżej, przeciwko częściowej interpretacji pierwszego argumentu kwantyfikatora większości przemawiają względy logiczne. Logika ze spełnianiem zdefiniowanym tak jak powyżej nie jest logiką monotoniczną, co pokazuje następujący przykład:

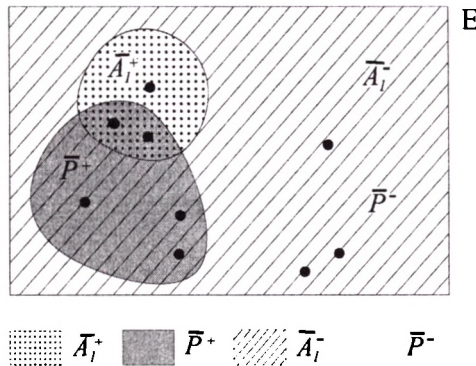
PRZYKŁAD 5.16.

Weźmy pod uwagę model częściowy dla  $L^*(M^2)$ ,  $\mathfrak{M}_c = \langle E, I_c, p_1, p_2 \rangle$ , zobrazowany na rysunku 5.2.:



Rys. 5.2.:  $\mathfrak{M}_c \models M^2_{xx}(P(x), A_1(x))$

W modelu tym zdanie  $M^2_{xx}(P(x), A_1(x))$  jest spełnione, gdyż  $|p_1(P) \cap p_1(A_1)| > |p_1(P) \setminus p_1(A_1)|$ . Jedno z możliwych totalnych rozszerzeń funkcji  $I_c$  jest wyrażone na rysunku 5.3. W modelu  $\mathfrak{M}'_c$  zdanie  $M^2_{xx}(P(x), A_1(x))$  nie jest już spełnione.



Rys. 5.3.: Nie jest tak, że  $\mathfrak{M}'_c \models M^2_{xx}(P(x), A_1(x))$  □

Konsekwencją niemonotoniczności logiki jest to, że zdefiniowanie kryterium prawdy przez zgodę większości za pomocą spełniania superwaluacyjnego traci uzasadnienie, gdyż nie jest tak, że zdania spełnione w modelu częściowym przy danym wartościowaniu są w tym modelu superwaluacyjnie spełnione, czyli nie obowiązuje odpowiednik twierdzenia 4.26. ze strony 71. Odpowiedzialna za to jest lewostronna niemonotoniczność relacji  $p_1(M^2)$  i  $p_2(M^2)$ , które interpretują kwantyfikator  $M^2$  w modelach częściowych. Jak jednak pamiętamy z rozdziału 3.1., jest to zupełnie zgodne z charakterystyką binarnego kwantyfikatora większości.

Z opisanych powyżej względów dokonamy kolejnej zmiany w definicji modelu. Polegała ona będzie na przyjęciu częściowej interpretacji jedynie predykatów wyróżnionych. Modele takie nazywać będziemy modelami semiczęściowymi.

### 5.2.1. Modele semiczęściowe dla $L^*(M^2)$

DEFINICJA 5.17. (model semiczęściowy dla  $L^*(M^2)$ )

Modelem semiczęściowym  $\mathfrak{M}_{sc}$  dla języka  $L^*(M^2)$  nazywamy  $\langle E, I_{sc}, p_1, p_2 \rangle$ , uporządkowaną czwórkę, gdzie  $E$  jest dowolnym niepustym zbiorem o mocy skończonej,  $I_{sc}, p_1, p_2$  są funkcjami interpretującymi wyrażenia tego języka w następujący sposób:

11. (a) Jeżeli  $R$  jest  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym innym niż wyróżnione symbole predykatywne, to

$$I(R) = \langle \bar{R}^+, \bar{R}^- \rangle, \text{ gdzie } \bar{R}^+ \subseteq E^n, \bar{R}^- = E^n \setminus \bar{R}^+, \quad p_1(R) = \bar{R}^+, \quad p_2(R) = \bar{R}^-.$$

(b) Jeżeli  $A_i$  jest wyróżnionym symbolem predykatywnym, to

$$I(A_i) = \langle \bar{A}_i^+, \bar{A}_i^- \rangle, \text{ gdzie } \bar{A}_i^+ \subseteq E, \bar{A}_i^- \subseteq E \setminus \bar{A}_i^+, \quad p_1(A_i) = \bar{A}_i^+, \quad p_2(A_i) = \bar{A}_i^-.$$

12.  $I(=) = \langle \{ \langle a, b \rangle \in E^2 : a = b \}, \{ \langle a, b \rangle \in E^2 : a \neq b \} \rangle$ ,

$$p_1(=) = \{ \langle a, b \rangle \in E^2 : a = b \}, \quad p_2(=) = \{ \langle a, b \rangle \in E^2 : a \neq b \}.$$

13.  $I(\forall) = \langle \{E\}, \wp(E) \setminus \{\emptyset\} \rangle$ ,  $p_1(\forall) = \{E\}$ ,  $p_2(\forall) = \wp(E) \setminus \{\emptyset\}$ ;

$$I(\exists) = \langle \wp(E) \setminus \{\emptyset\}, \{E\} \rangle, \quad p_1(\exists) = \wp(E) \setminus \{\emptyset\}, \quad p_2(\exists) = \{E\};$$

$$I(M^2) = \langle \{ \langle X, Y \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : |X \cap Y| > |X \setminus Y| \},$$

$$\{ \langle X, Y \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : |X \cap Y| > |X \setminus Y| \} \rangle,$$

$$p_1(M^2) = p_2(M^2) = \{ \langle X, Y \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : |X \cap Y| > |X \setminus Y| \}. \quad \square$$

Model semiczęściowy jest modelem częściowym, więc definicja spełniania i spełniania superwaluacyjnego w modelu semiczęściowym pozostaje taka sama jak w modelu częściowym. Z powodów analogicznych do opisanych w rozdziale 4. przyjmiemy spełnianie superwaluacyjne za podstawę definicji kryterium prawdy przez zgodę większości w modelu semiczęściowym. Chociaż tutaj wszystkie zdania nie zawierające predykatów wyróżnionych ani kwantyfikatora  $M^2$ , zbudowane według schematów tautologii klasycznego rachunku predykatów, będą tautologiami, nawet gdy wynikanie zdefiniujemy za pomocą zwykłego spełniania w modelu semiczęściowym – to nas interesują właśnie te pozostałe zdania, a tu sytuacja będzie taka sama jak w przypadku modeli częściowych dla  $L^*(M)$ : zdanie  $A_1(x) \rightarrow A_1(x)$  nie byłoby spełnione w pewnych modelach semiczęściowych, przy pewnych wartościowaniach. A zdanie to jest odpowiednikiem uznawania zdania **jeżeli  $p_1$ , to  $p_1$** .

Poniższe twierdzenie pokaże, że spełnianie (odrzucaenie) w modelach semiczęściowych dla  $L^*(M^2)$  pociąga za sobą spełnianie (odrzucaenie) superwaluacyjne, czyli że, inaczej mówiąc, logika  $L^*(M^2)$  jest logiką monotoniczną. Warto zauważyć przy okazji, że każdy totalny model częściowy jest modelem semiczęściowym.

TWIERDZENIE 5.18.

Dla dowolnego modelu semiczęściowego  $\mathfrak{M}_{sc}$  dla  $L^*(M^2)$  i dowolnego wartościowania  $v$ :



Jeżeli  $\mathfrak{M}_{sc} \models \varphi[v]$ , to  $\mathfrak{M}_{sc} \models_s \varphi[v]$

oraz

Jeżeli  $\mathfrak{M}_{sc} \not\models \varphi[v]$ , to  $\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s \varphi[v]$ .

DOWÓD: Dowód przebiega poprzez indukcję ze względu na złożoność formuł. Chociaż twierdzenie 4.26. na stronie 71 dotyczyło modeli częściowych dla  $L^*(M)$ , to kroki dotyczące formuł atomowych,  $\wedge, \vee, \neg, \forall$  i  $\exists$  mogą tu zostać powtórzone, gdyż różnica pomiędzy tymi modelami odgrywa rolę dopiero w przypadku kwantyfikatora  $M^2$ .

$\varphi = M^2xy(\psi_1, \psi_2)$ , gdzie  $\psi_2$  jest dowolną formułą, a  $\psi_1$  nie zawiera predykatów wyróżnionych:

$\mathfrak{M}_{sc} \models M^2xy(\psi_1, \psi_2)[v]$

wtw  $\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \psi_1[v(\frac{a}{x})]\} \cap \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \psi_2[v(\frac{b}{y})]\}$

$> \{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \psi_1[v(\frac{a}{x})]\} \setminus \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \psi_2[v(\frac{b}{y})]\}$ .

Ponieważ  $\psi_1$  nie zawiera predykatów wyróżnionych, więc dla każdego  $\mathfrak{M}'_c$ , który jest uzupełnieniem  $\mathfrak{M}_{sc}$ ,  $\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \psi_1[v(\frac{a}{x})]\} = \{a \in E : \mathfrak{M}'_c \models \psi_1[v(\frac{a}{x})]\}$ . Z założenia indukcyjnego wiemy, że  $\{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \psi_2[v(\frac{b}{y})]\} \subseteq \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models_s \psi_2[v(\frac{b}{y})]\}$ , czyli dla dowolnego

$\mathfrak{M}'_c$ , który jest uzupełnieniem  $\mathfrak{M}_{sc}$ ,  $\{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \psi_2[v(\frac{b}{y})]\} \subseteq \{b \in E : \mathfrak{M}'_c \models_s \psi_2[v(\frac{b}{y})]\}$ .

To daje nam, dla dowolnego  $\mathfrak{M}'_c$ ,

$\{a \in E : \mathfrak{M}'_c \models \psi_1[v(\frac{a}{x})]\} \cap \{b \in E : \mathfrak{M}'_c \models \psi_2[v(\frac{b}{y})]\}$

$> \{a \in E : \mathfrak{M}'_c \models \psi_1[v(\frac{a}{x})]\} \setminus \{b \in E : \mathfrak{M}'_c \models \psi_2[v(\frac{b}{y})]\}$ ,

czyli  $\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2xy(\psi_1, \psi_2)[v]$ .

Dowód dla  $\not\models$  przebiega analogicznie. □

Za pomocą spełniania superwaluacyjnego w modelach semiczęściowych zdefiniujemy po raz kolejny kryterium prawdy przez zgodę większości.

### 5.3. DEFINICJA KRYTERIUM PRAWDY PRZEZ ZGODĘ WIĘKSZOŚCI W MODELU SEMICZĘŚCIOWYM DLA $L^*(M^2)$ ZE SPEŁNIANIEM SUPERWALUACYJNYM

DEFINICJA 5.19. (kryterium prawdy przez zgodę większości II)

Niech  $p_1(P)$  będzie zbiorem, do którego należą członkowie wyróżnionej populacji (i tylko oni), a  $\varphi(x) = T(U(\alpha, x))$ :

Zdanie  $\alpha$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2xx(P(x), \varphi(x)).$$

Zdanie  $\alpha$  jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s M^2xx(P(x), \varphi(x)).$$
 □

W szczególności w przypadku zdań atomowych definicja ta przybierze następującą postać:

Zdanie  $p_1$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2xx(P(x), A_1(x)).$$

Zdanie  $p_1$  jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s M^2_{xx}(P(x), A_1(x)).$$

#### 5.4. LOGICZNE FUNKCJE QUORUM

Do tej pory, badając większość danej populacji, braliśmy pod uwagę wszystkich jej członków. Oznacza to, że z wyjątkiem pytań o prawdziwość tautologii i kontrtautologii, warunkiem koniecznym, choć oczywiście nie wystarczającym, do tego, aby zdanie  $p$  było prawdziwe lub fałszywe, było to, że więcej niż połowa danej grupy wypowiedziała się na jego temat. W definicji kwantyfikatora zakładaliśmy więc coś, co w praktyce podejmowania decyzji kolegialnych określa się mianem „wymogu quorum”, a próg *quorum* w tym wypadku określony został na poziomie 50%+1.<sup>1</sup> Język  $L^*(M^2)$  pozwala nam jednak na zobrazowanie za pomocą kwantyfikatora  $M^2$  innego typu sytuacji, z jaką też często spotykamy się na przykład w wyborach do władz krajowych czy regionalnych. Bierzymy wtedy pod uwagę nie większość całej grupy, ale większość tych jej członków, którzy wypowiedzieli się na temat danego zdania, czy, inaczej mówiąc, wzięli udział w głosowaniu.<sup>2</sup>

Aby zobrazować tę sytuację w języku  $L^*(M^2)$ , wystarczy dodać do niego drugą grupę predykatów wyróżnionych, powiedzmy  $C_1, C_2, \dots$ , i zinterpretować je w ten sposób, że  $I(C_i) = \langle p_1(A_i) \cup p_2(A_i), E \setminus (p_1(A_i) \cup p_2(A_i)) \rangle$ . Predykaty te otrzymywałyby wobec tego zawsze interpretację totalną i, co za tym idzie, mogłyby występować jako pierwszy argument kwantyfikatora większości. Same one jednak w tej roli nie spełniają jeszcze funkcji, o którą nam chodzi, bo zdanie typu  $M^2_{xx}(C_1(x), A_1(x))$ , zgodnie z przyjętą definicją funkcji tłumaczącej  $T$ , odpowiadałoby temu, że „większość spośród tych, którzy uznają lub odrzucają zdanie  $p$ , uznaje je”, a to, choć samo w sobie też interesujące, nie jest dokładnie przykładem sytuacji, o którą nam chodziło. Zazwyczaj mamy na myśli tych, którzy wypowiedzieli swoje zdanie, ale dodatkowo należą do pewnej wybranej grupy, na przykład uprawnionych do głosowania. Zanotujemy to w naszym języku za pomocą zdania  $M^2_{xx}(P(x) \wedge C_1(x), A_1(x))$ , gdzie  $P$  interpretowane jest jako ta wybrana populacja. Definicja kryterium prawdy przez zgodę większości zmodyfikowana w tym duchu wyglądałaby następująco:

##### DEFINICJA 5.20.

(kryterium prawdy przez zgodę większości po odrzuceniu „wymogu quorum”)

Niech  $p_1(P)$  będzie zbiorem, do którego należą członkowie wyróżnionej populacji (i tylko oni),  $\varphi(x) = T(U(\alpha, x))$ , a  $\psi(x)$  formułą, dla której  $I_{sc}(\psi) = \langle p_1(\varphi) \cup p_2(\varphi), E \setminus (p_1(\varphi) \cup p_2(\varphi)) \rangle$ :

Zdanie  $\alpha$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2_{xx}(P(x) \wedge \psi(x), \varphi(x)).$$

Zdanie  $\alpha$  jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s M^2_{xx}(P(x) \wedge \psi(x), \varphi(x)). \quad \square$$

<sup>1</sup> Formalnie rzecz biorąc, należałoby tu raczej mówić o sytuacji analogicznej do wymogu *quorum*, gdyż ten ostatni dotyczy kwestii ważności wyborów. Konsekwencje praktyczne obu sytuacji są jednak bardzo zbliżone.

<sup>2</sup> Pomijam tu sytuację głosowania poprzez wstrzymanie się od głosu.

W szczególności w przypadku zdań atomowych definicja ta przybierze następującą postać:

Zdanie  $p_1$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2_{xx}(P(x) \wedge C_1(x), A_1(x)).$$

Zdanie  $p_1$  jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s M^2_{xx}(P(x) \wedge C_1(x), A_1(x)).$$

Gdzie  $I_{sc}(C_1) = \langle p_1(A_1) \cup p_2(A_1), E \setminus (p_1(A_1) \cup p_2(A_1)) \rangle$ .

Jak łatwo pokazać, jeżeli moglibyśmy założyć, że  $|p_1(C_i)|$  jest zawsze nieparzysta, to każde zdanie okazałoby się prawdziwe bądź fałszywe. O ile jednak tego typu założenie wydaje się mieć silne pragmatyczne podstawy jako założenie o nieparzystej liczebności grupy wyjściowej (patrz uwagi na stronie 58), o tyle wymóg ten w przypadku grupy reprezentowanej przez tych jej członków, którzy wypowiedzieli swoje zdanie, wydaje się zbyt arbitralny, aby go na serio rozważać. Tak czy inaczej, przy tak zmodyfikowanej definicji kryterium prawdy przez zgodę większości znacznie więcej zdań okazałoby się prawdziwymi lub fałszywymi, gdyż jedynymi nieokreślonymi zdaniami byłyby takie, co do których nikt się nie wypowiedział ani za, ani przeciwko (konsekwencja tego, że kwantyfikator  $M^2$  nie jest pozytywnie silny!), lub takie, których liczba zwolenników jest równa liczbie przeciwników.

## 5.5. ALTERNATYWA DLA MODELI CZĘŚCIOWYCH

Konkurencyjnym rozwiązaniem w stosunku do wprowadzenia częściowych predykatów wyróżnionych byłoby przyjęcie, że dwu skrajnym postawom epistemicznym: uznaniu i odrzuceniu, odpowiada nie jeden pozytywny predykat i jego negacja, ale dwa oddzielne predykaty, powiedzmy  $A$  i  $R$ .<sup>3</sup> Negacji  $A$  odpowiadałoby nieuznanie, a negacji  $R$  nieodrzućenie. Rekurencyjna definicja funkcji  $T^*$ , tłumaczącej zdania o uznawaniu na język  $L^*_{AR}(M^2)$  (który różni się od  $L^*(M^2)$  tym, że oprócz  $A_1, A_2, \dots$  występują w nim dodatkowe wyróżnione predykaty „odrzućania”:  $R_1, R_2, \dots$ ), wyglądałaby wtedy następująco (przyjmujemy, że  $O(\alpha, x)$  jest skrótem dla: „osoba  $x$  odrzuca zdanie  $\alpha$ ”):

DEFINICJA 5.21. (funkcja tłumacząca zdania o uznawaniu na język  $L^*_{AR}(M^2)$ )

$$T^*(U(p_1, x)) = A_1(x),$$

$$T^*(O(p_1, x)) = R_1(x);$$

$$T^*(U(\text{nie } \alpha, x)) = T^*(O(\alpha, x)),$$

$$T^*(O(\text{nie } \alpha, x)) = T^*(U(\alpha, x));$$

$$T^*(U(\alpha \text{ lub } \beta, x)) = T^*(U(\alpha, x)) \vee T^*(U(\beta, x)),$$

$$T^*(O(\alpha \text{ lub } \beta, x)) = T^*(O(\alpha, x)) \wedge T^*(O(\beta, x));$$

$$T^*(U(\alpha \text{ i } \beta, x)) = T^*(U(\alpha, x)) \wedge T^*(U(\beta, x)),$$

$$T^*(O(\alpha \text{ i } \beta, x)) = T^*(O(\alpha, x)) \vee T^*(O(\beta, x));$$

$$T^*(U(\text{jeżeli } \alpha, \text{ to } \beta, x)) = T^*(O(\alpha, x)) \vee T^*(U(\beta, x)),$$

$$T^*(O(\text{jeżeli } \alpha, \text{ to } \beta, x)) = T^*(U(\alpha, x)) \wedge T^*(O(\beta, x)).$$

□

<sup>3</sup>Rozdział ten powstał w znacznym stopniu pod wpływem rozmów z Pawłem Turnaem, któremu zawdzięczam wiele cennych uwag.

Sama logika częściowa pozwala na podobne rozwiązania poprzez możliwość odróżnienia wewnętrznej i zewnętrznej negacji (por. Langholm 1988, s. 17).<sup>4</sup> Różnica polega na tym, że wewnętrzna negacja zdania o nieokreślonej wartości logicznej jest nieokreślona, podczas gdy zewnętrzna negacja zdania o nieokreślonej wartości logicznej przyjmuje wartość wyróżnioną. Tabela negacji zewnętrznej  $\sim \varphi$ , wygląda wobec tego następująco (\* oznacza wartość nieokreślona):

	$\sim$
1	0
*	1
0	1

Tab. 5.1.: Negacja zewnętrzna

1 i 0 odpowiadają w naszej nomenklaturze spełnieniu i odrzuceniu przez model:  $\mathfrak{M}_c \models \sim \varphi[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest tak, że  $\mathfrak{M}_c \models \varphi[v]$ ;  $\mathfrak{M}_c \not\models \sim \varphi[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathfrak{M}_c \models \varphi[v]$ . Stąd każda formuła o postaci  $\sim \varphi$  jest spełniona bądź odrzucona w każdym modelu i przy każdym wartościowaniu.

Tabela negacji wewnętrznej,  $\neg \varphi$ , wygląda natomiast tak:

	$\neg$
1	0
*	*
0	1

Tab. 5.2.: Negacja wewnętrzna

Langholm definiuje implikację za pomocą negacji zewnętrznej:  $\varphi \Rightarrow \psi \stackrel{\text{df}}{=} \sim \varphi \vee \psi$ . Jej tabela wygląda wtedy następująco:

$\Rightarrow$	1	*	0
1	1	*	0
*	1	1	1
0	1	1	1

Tab. 5.3.: Implikacja zdefiniowana za pomocą negacji zewnętrznej

Takiej implikacji odpowiadałoby zdefiniowanie funkcji  $T^*$  dla implikacji poprzez  $T^*(U(\text{jeżeli } \alpha, \text{ to } \beta, x)) = \sim T^*(U(\alpha, x)) \vee T^*(U(\beta, x))$ .

Tabela implikacji zdefiniowanej przez negację wewnętrzną ( $\varphi \rightarrow \psi \stackrel{\text{df}}{=} \neg \varphi \vee \psi$ ) wygląda następująco:

<sup>4</sup>Langholm nazywa negację zewnętrzną – *exclusion negation*. Podobnie van Fraassen w (1969, s. 69) używa terminu *exclusion negation* dla określenia negacji zewnętrznej, a *choice negation* – dla określenia negacji wewnętrznej.

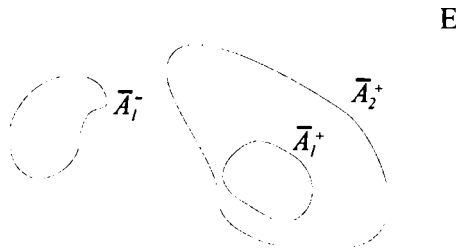
$\rightarrow$	1	*	0
1	1	*	0
*	1	*	*
0	1	1	1

Tab. 5.4.: Implikacja zdefiniowana za pomocą negacji wewnętrznej

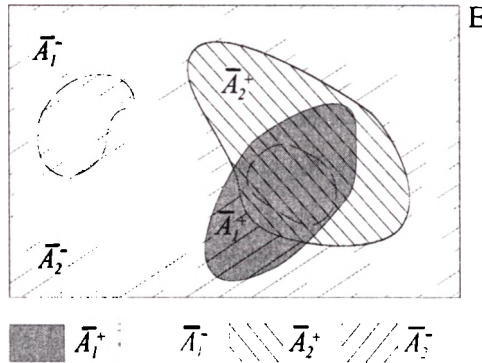
Za przyjęciem tej drugiej definicji implikacji w analizie kryterium prawdy przez zgodę większości przemawia interpretacja, jaką przyjęliśmy dla tej części uniwersum modelu, która jest zarówno poza  $p_1(A_1)$  jak i poza  $p_2(A_1)$ : do  $E \setminus (p_1(A_1) \cup p_2(A_1))$  należą osoby, ani nie uznające, ani nie odrzucające zdania  $p_1$ . Dzięki superwaluacyjnemu spełnianiu, które przyjęliśmy, w określaniu prawdziwości zdania  $p_1$  poprzez kryterium prawdy przez zgodę większości bierzemy pod uwagę nie tylko zbiory  $p_1(A_1)$  i  $p_2(A_1)$ , ale i wszystkie możliwe ich rozszerzenia do interpretacji totalnej. (W modelu standardowym dla  $L^*_{AR}(M^2)$  zbiorom  $p_1(A_1)$  i  $p_2(A_1)$  odpowiadałyby odpowiednio  $I(A_1)$  i  $I(R_1)$ , a superwaluacyjnemu spełnianiu analogiczne pojęcie, które brałoby pod uwagę modele, w których luka pomiędzy  $I(A_1)$  a  $I(R_1)$  zamyka się w odpowiedni sposób.) Rozważmy teraz następujący przykład:

## PRZYKŁAD 5.22.

Gdyby zdefiniować implikację tak, jak robi to Langholm, to otrzymalibyśmy, że zdanie  $\forall x(A_1(x) \Rightarrow A_2(x))$  jest spełnione w modelu  $\mathfrak{M}_c$ , zobrazowanym na rysunku 5.4., bo  $\bar{A}_1^+ \subseteq \bar{A}_2^+$ , a więc  $(E \setminus \bar{A}_1^+) \cup \bar{A}_2^+ = E$ .

Rys. 5.4.:  $\mathfrak{M}_c \models \forall x(A_1(x) \Rightarrow A_2(x))$ 

W modelach częściowych bierzemy jednak pod uwagę możliwe rozszerzenia interpretacji predykatów  $A_1$  i  $A_2$  do interpretacji totalnej, a wtedy  $A_1^+$  może „urosnąć” poza  $\bar{A}_2^+$ . W modelu przedstawionym na rysunku 5.5.,  $\mathfrak{M}'_c$ , zdanie  $\forall x(A_1(x) \Rightarrow A_2(x))$  nie byłoby już spełnione, co pokazuje, że logika taka nie byłaby logiką monotoniczną. Zgodnie zaś z definicją implikacji, którą przyjęliśmy w modelach częściowych, zdanie  $\forall x(A_1(x) \rightarrow A_2(x))$  nie byłoby spełnione w modelu wyjściowym,  $\mathfrak{M}_c$ , gdyż  $\bar{A}_1^- \cup \bar{A}_2^+ \neq E$ .



Rys. 5.5.: Nie jest tak, że  $\mathfrak{M}'_c \models \forall x (A_1(x) \Rightarrow A_2(x))$  □

Problem jednak w tym, że w modelu standardowym nie możemy zdefiniować implikacji za pomocą negacji wewnętrznej, pojęcie zaś analogiczne do pojęcia spełniania superwaluacyjnego potrzebne byłoby dla uzyskania prawdziwości tautologii klasycznych. Stąd opisana alternatywa nie do końca jest adekwatną alternatywą dla modeli częściowych jako narzędzia analizy kryterium prawdy przez zgodę większości.

## 5.6. OGRANICZENIA TEORII MODELII SKOŃCZONYCH

W rozdziałach 4. i 5. podaliśmy semantyczną charakterystykę języków  $L^*(M)$  i  $L^*(M^2)$  poprzez skończone modele częściowe (semiczęściowe) ze spełnieniem superwaluacyjnym i zdefiniowaliśmy w nich kryterium prawdy przez zgodę większości. Powstaje pytanie, czy istnieją rachunki, których twierdzeniami byłyby wszystkie i tylko te formuły, które są spełnione we wszystkich kolejno rozważanych modelach, przy wszystkich wartościowaniach. Nawet zanim zaczniemy zastanawiać się, czy kwantyfikatory  $M$  i  $M^2$ , tak jak je zdefiniowaliśmy, to umożliwiają, wiemy, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Odpowiedzialne za ten stan rzeczy jest założenie FIN, które w obu tych rozdziałach przyjęliśmy. W pracy z 1950 roku pt.: „Niemożność algorytmu dla problemu rozrzedzoności na koniecznych klasach” Borys Trahtenbrot udowodnił twierdzenie, z którego wynika, że zbiór zdań logiki pierwszego rzędu prawdziwych we wszystkich modelach skończonych nie jest rekurencyjnie przeliczalny.<sup>5</sup> Wynika z tego także, że każda logika, która zawiera elementarną logikę predykatów, a więc także  $L^*(M)$  i  $L^*(M^2)$ , jest nieaksjomatyzowalna przy FIN (por. Westerståhl 1995, s. 396). Z drugiej strony, można by uniknąć tej konsekwencji przyjmując, że język, w którym pracujemy, to język monadyczny. W końcu wyróżnione symbole, za pomocą których zapisujemy zdania o uznawaniu, to predykaty. Kaplan w (1966) twierdzi, że po dołożeniu do monadycznego rachunku predykatów bez identyczności kwantyfikatora  $M$  otrzymujemy logikę rozstrzygalną także wtedy, gdy ograniczymy rozważania do modeli skończonych.  $M^2$  nie jest jednak definiowalne za pomocą  $M$ , a to  $M^2$  jest kwantyfikatorem języka naturalnego, więc za jego pomocą chcemy zdefiniować kryterium prawdy przez zgodę większości. Nie potrafię

<sup>5</sup>Takie sformułowanie tego twierdzenia podają za Westerståhlem (1989, s. 83). Trahtenbrot zatytułował swoje twierdzenie tak, jak w tytule artykułu podanym powyżej, ale w tym przypadku wynika z tego jednak brak rekurencyjnej przeliczalności zdań prawdziwych we wszystkich modelach skończonych.

natomiast odpowiedzieć na pytanie, czy teoria modeli skończonych dla  $L^*(M^2)$  jako języka monadycznego jest aksjomatyzowalna.

Zostawiając więc na boku język monadyczny, stajemy przed dwoma pytaniami:

1. Czy założenie FIN, które przyjmowaliśmy dotąd, jest założeniem istotnym? Czy możemy je odrzucić zachowując intuicje, które skłoniły nas do przyjęcia FIN, takie jak przekonanie o tym, że liczba członków populacji, które rozważamy, jest zawsze skończona?
2. Czy odrzucenie FIN, o ile możliwe, pozwoliłoby nam zbudować rachunek dla  $L^*(M^2)$  (a tym samym  $L^*(M)$ )?

Odpowiedź na pierwsze pytanie jest pozytywna i w rozdziale 6. pokażę, jak to zrobić. Niestety, nie potrafię podać odpowiedzi na drugie pytanie. Z jednej strony van Benthem i Westerståhl twierdzą, że w logice  $L(M^2)$  możemy zdefiniować porządek liczb naturalnych i wobec tego logika ta nie jest aksjomatyzowalna (1995, s. 400). W innym miejscu (1984a, s. 454) van Benthem nazywa binarny kwantyfikator większości kwantyfikatorem drugiego rzędu, co przekreślałoby szansę na aksjomatyzację. Odpowiedzialną za ten stan rzeczy jest przede wszystkim cecha ISOM (por. Westerståhl 1995, s. 397), gdyż wiele innych cech, takich jak KONS czy EKST jest aksjomatyzowalna, jak pokazał Kees Doets (1991). Westerståhl (1995, s. 397) podaje częściową charakterystykę dla  $M^2$ . Z drugiej jednak strony, na co zwrócił mi uwagę Marcin Mostowski, dopóki nie ustalimy interpretacji kwantyfikatora większości we wszystkich dziedzinach, trudno jest rozstrzygać jednoznacznie kwestie aksjomatyzowalności tej logiki. O kłopotach z interpretacją kwantyfikatora większości w dziedzinach nieskończonych piszę w rozdziale następnym.

W rozdziale 7. mam nadzieję pokazać, że pewną wersję kwantyfikatora większości (nazywam ją kwantyfikatorem pseudowiększości, gdyż zdecydowanie nie nadaje się do stosowania w dziedzinach matematycznych, ale dla celu zdefiniowania kryterium prawdy przez zgodę większości jest zupełnie adekwatny) da się zdefiniować w logice  $L_{\omega_1\omega}$  z dodanymi trzema typami predykatów wyróżnionych.





## MODELE O DOWOLNYM UNIWERSUM

Przyjęcie założenia o skończoności mocy uniwersów modeli, które rozważamy (FIN), było uzasadnione na co najmniej dwa sposoby. Po pierwsze, wynikało ono z tego, że w przypadku kwantyfikatora M, czyli kwantyfikatora większości typu  $\langle 1 \rangle$ , relatywizacja do populacji pokrywała się z relatywizacją do modelu, gdyż zawsze rozważaliśmy „wszystkich” z uniwersum modelu. Ponieważ rozważane populacje zawsze są skończone, wobec tego konieczne było przyjęcie, że ograniczamy się do modeli o skończonym uniwersum. Dodatkowe uzasadnienie czerpaliśmy z tego, że przyjęcie FIN jest przeważającą postawą w badaniach nad kwantyfikatorami języka naturalnego, a kwantyfikator większości chcemy traktować jako taki właśnie kwantyfikator. Motywacje za przyjęciem tego założenia płyną zazwyczaj stąd, że w języku naturalnym mamy zawsze do czynienia ze skończoną liczbą zdań, skończoną liczbą rozmówców itd. Jednym z niewielu, którzy przeciwstawiają się temu nurtowi, jest Kees van Deemter, który w (1985) argumentuje za odrzuceniem FIN. Pokazuje on, że większość ciekawych wyników, które zostały osiągnięte przy tym założeniu, da się udowodnić i bez niego, a inne w nieco zmienionych wersjach. Dodatkowo zwraca uwagę na to, że również w języku naturalnym mamy do czynienia z kwantyfikatorami, takimi jak choćby **przeliczalnie wiele**<sup>1</sup>, które wymagają interpretacji w modelach nieskończonych. Słowem, niewiele tracimy odrzucając to założenie, a zyskujemy możliwość jednolitego potraktowania zarówno kwantyfikatorów interpretowalnych w modelach skończonych, jak i tych interpretowalnych w modelach nieskończonych. Dodatkowo uwalniamy się od ograniczeń teorii modeli skończonych.

W tym rozdziale postaram się pokazać, że modele o dowolnej mocy uniwersum pozwalają na oddanie intuicji skończoności populacji, które rozważamy. Dodanie do języka nowego typu predykatów wyróżnionych, których używać będziemy do oznaczenia populacji, które rozważamy, i zagwarantowanie dla nich interpretacji przez zbiory skończone, pozwoli nam zachować intuicję, zgodnie z którą mamy do czynienia jedynie ze skończonymi grupami indywidualów czy skończonymi populacjami.

### 6.1. INTERPRETACJA WIĘKSZOŚCI W MODELU O DOWOLNYM UNIWERSUM

W rozdziałach poprzednich zdefiniowaliśmy kwantyfikator większości za pomocą porównywania mocy zbiorów. Aby definicja spełniania, taka jaką przyjęliśmy w rozdziale poprzednim, miała sens w przypadku modeli o dowolnym uniwersum, musimy ustalić, co to znaczy, że  $|X| = |Y|$  dla zbiorów o mocy nieskończonej. Zazwyczaj przyjmuje się Cantorowską definicję równoliczności, według której  $|X| = |Y|$ , gdy istnieje bijekcja  $f : X \rightarrow Y$ . Nie jest to

<sup>1</sup>Przykładem użycia tego kwantyfikatora w języku naturalnym może być następujące zdanie: „Możemy zbudować co najwyżej przeliczalnie wiele różnych zdań ze skończonego alfabetu”.

definicja zgodna ze wszystkimi intuicjami, w szczególności kontrprzykładów należy szukać tam, gdzie chodzi nam o stwierdzanie, że jeden zbiór ma mniejszą moc niż drugi. Te podawane najczęściej wskazują na konflikt z intuicją, według której każdy zbiór powinien być większy niż jego część właściwa: zgodnie z Cantorowską definicją, zbiór liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem liczb parzystych, wbrew zdroworozsądkowemu przekonaniu, że tych pierwszych jest dokładnie dwa razy więcej, nie stanowią więc one nawet większości w zbiorze liczb naturalnych. Innym przykładem, podanym przez Barwise'a i Coopera (1981, s. 163), jest następujący:

Więcej niż połowa liczb rzeczywistych pomiędzy 0 a 1, wyrażonych w notacji dziesiętnej, nie zaczyna się na 7.

Zdanie to jest intuicyjnie prawdziwe, a przy Cantorowskiej interpretacji równoliczności zbiorów okazuje się fałszywe (w modelu standardowym) lub pozbawione wartości logicznej (w modelu częściowym). Barwise i Cooper twierdzą, że aby tego typu zdania miały w ogóle wartość logiczną, musi na modelu być zadana miara zbioru (s. 163). Tego typu rozwiązania podają na przykład Adam Olszewski (1992), Johan van Benthem (1983) czy Michał Krynicki i Marcin Mostowski (1999). W pracy Olszewskiego pojawiła się też propozycja zdefiniowania większości w zbiorach nieskończonych za pomocą pojęcia gęstości zbioru. Propozycja Krynickiego i Mostowskiego dotyczy szerokiej grupy kwantyfikatorów, a wśród nich kwantyfikatorów ilościowych, takich jak kwantyfikator większości. Po pierwsze jednak traktuje jednakowo wszystkie kwantyfikatory ilościowe, a więc **więcej** na równi z **większością**, w wyniku czego zaciera się, jeżeli w ogóle nie zanika, wyróżniony charakter zbioru kontekstowego w przypadku kwantyfikatora większości (por. Krynicki i Mostowski 1999, s. 552–554), co wydaje mi się poważną usterką w interpretacji tego kwantyfikatora. Dodatkowo, jak sami autorzy zauważają, ich ujęcie prowadzi do tego, że w konkretnych modelach nie otrzymamy jednoznacznej interpretacji kwantyfikatorów;<sup>2</sup> stąd tytuł ich pracy – „Ambiguous quantifiers”. Z opisanych powodów uważam więc, że propozycja Krynickiego i Mostowskiego nie jest w pełni zadowalająca jako propozycja interpretacji kwantyfikatora większości w modelach nieskończonych.

Nie będę dalej rozwijać prezentacji poglądów na interpretację kwantyfikatora większości w modelach o nieskończonym uniwersum, ani proponować własnych rozwiązań. W obu przypadkach byłoby to nadużyciem cierpliwości czytelnika, gdyż nas i tak interesują przypadki porównywania mocy skończonych. W zastosowaniu, jakie zamierzamy poczynić z języka  $L^{**}(M^2)$ , możemy arbitralnie przyjąć Cantorowską definicję równoliczności i nie przejmować się wyżej wymienionymi paradoksami, gdyż wszystkie one biorą się z rozważań nad zbiorami nieskończonymi.<sup>3</sup> Jak pokażę poniżej, w wyróżnionych modelach zbiór kontekstowy, czyli pierwszy argument kwantyfikatora większości, interpretowany będzie przez zbiory skończone. Ponieważ spełnianie zdania skwantyfikowanego poprzez  $M^2$  zależy tylko i wyłącznie od mocy zbioru kontekstowego i jego przecięcia ze zbiorami, które interpretują drugi argument kwantyfikatora  $M^2$ , spełnianie zdań użytych do zdefiniowania kryterium prawdy przez zgodę większości zależy tylko i wyłącznie od porównywania mocy zbiorów skończonych. Powyższe paradoksy nie wystąpią więc w kontekście kryterium prawdy przez zgodę większości.

<sup>2</sup>W przypadku kwantyfikatorów ilościowych, a więc i kwantyfikatora większości, otrzymamy jednoznaczna interpretację, gdy ograniczymy się do modeli skończonych. W tym wypadku nie było jednak problemów z jego interpretacją.

<sup>3</sup>Dodatkowa gwiazdka przy  $L^*$  służy podkreśleniu, że język  $L^{**}(M^2)$  różni się do języka  $L^*(M^2)$  poprzez dodanie dodatkowych typów predykatów wyróżnionych; por. definicja 6.1. na następnym stronie.

## 6.2. MODEL SEMICZĘŚCIOWY O DOWOLNYM UNIWERSUM

Ze względu na powyższe niejasności co do porównywania mocy zbiorów nieskończonych będziemy chcieli w języku mieć możliwość wypowiedzenia zdań, o których będziemy wiedzieli z góry, że ich spełnianie w modelu wyróżnionym zależy jedynie od porównywania zbiorów o mocy skończonej. Wszystkie zdania języka  $L^{**}(M^2)$ , których będziemy używać do zdefiniowania kryterium prawdy przez zgodę większości, będą tego typu zdaniami. Dokonamy tego na poziomie języka poprzez przyjęcie dodatkowej grupy wyróżnionych symboli predykatywnych  $B_1, B_2, \dots$ , które interpretowane będą w taki sposób, że  $p_1(B_i)$  będzie zawsze skończone. Symboli tych będziemy używać dla oznaczenia rozważanych populacji. Ponieważ z racji swej funkcji predykaty  $B_1, B_2, \dots$  występowały będą na miejscu pierwszego argumentu kwantyfikatora  $M^2$ , otrzymają one totalną interpretację:  $p_2(B_i) = E \setminus p_1(B_i)$ . Z takim rozwiązaniem wiąże się, przynajmniej na pierwszy rzut oka, pewien problem. Umieszczając  $\neg B_1$  w roli pierwszego argumentu kwantyfikatora  $M^2$ , wychodzimy poza obszar zbiorów skończonych ze względu na dowolną, a więc i nieskończoną moc uniwersum modelu. Nie możemy więc za pomocą  $\neg B_1$  sformułować pytania o większość tych, którzy nie należą do populacji  $b_1$  (którą oznaczyliśmy za pomocą predykatu  $B_1$ ). Czy jednak naprawdę chcemy pytać o większość kotów i myszy, kamieni, liczb i innych przedmiotów, które należą do uniwersum wyróżnionego modelu, a nie należą do populacji  $b_1$ ? Moc takiego modelu może być nieskończona, a wtedy ludzi na zaludnienie go raczej nie wystarczy. Gdy pytamy o nie-fizyków, to używamy negacji kontekstowej, angielskiej *non-*, która niestety nie ma naturalnego odpowiednika w języku polskim, i mamy na myśli co najwyżej wszystkich ludzi, którzy nie są fizykami, choć częściej ten kontekst jest jeszcze bardziej precyzyjny (nie-wiolonczeliści to prawdopodobnie nie wszyscy ludzie, ale tylko muzycy grający na innych niż wiolonczela instrumentach). Aby zapewnić sobie możliwość użycia tego typu negacji kontekstowej, która nie wyprowadzi nas poza bezpieczną dziedzinę zbiorów o mocy skończonej, dodamy do języka jeszcze jeden symbol wyróżniony  $L$ , którego zamierzoną interpretacją będą wszyscy ludzie. Oczywiście poprzez  $\neg B_1(x) \wedge L(x)$  na miejscu pierwszego argumentu kwantyfikatora  $M^2$  odnosić się będziemy do ludzi, którzy nie należą do populacji  $b_1$ . Ponieważ chcemy, aby wyróżniane przez nas populacje były podzbiarami zbioru ludzi, zapewnimy to sobie poprzez odpowiednie zdefiniowanie ich interpretacji w modelu. Poniżej przedstawię odpowiednie definicje.

### 6.2.1. Język $L^{**}(M^2)$

Język  $L^{**}(M^2)$  różni się od języka  $L^*(M^2)$  jedynie poprzez dodanie dodatkowych typów wyróżnionych predykatów:

DEFINICJA 6.1. (język  $L^{**}(M^2)$ )

Język  $L^{**}(M^2)$  składa się z następujących wyrażeń:

1. Symbole logiczne: punkty 1.(a), (b) i (d) jak w definicji 2.1. na stronie 29; punkt 1.(c) jak w definicji 5.1. na stronie 82.
2. Symbole pozalogiczne:
  - (a) dla każdego  $n = 1, 2, \dots$  zbiór (niekoniecznie niepusty)  $n$ -argumentowych symboli relacyjnych  $P^n$ ; dowolne elementy tych zbiorów oznaczamy za pomocą symboli  $P, R, S, P_1, P_2, \dots$ ;

- (b) zbiór wyróżnionych symboli predykatywnych typu I:  $A_1, A_2, \dots$ ;
- (c) zbiór wyróżnionych symboli predykatywnych typu II:  $B_1, B_2, \dots$ ;
- (d) pojedynczy wyróżniony symbol predykatywny  $L$ , nazywamy go wyróżnionym symbolem predykatywnym typu III.

3. Nawiasy:  $(, )$ . □

W definicji poprawnie zbudowanej formuły uwzględnimy dodatkowe typy predykatów wyróżnionych. Punkty (b), (c) i (d) poniżej wynikają właściwie z (a), wyodrębnimy je jednak, gdyż predykaty wyróżnione odgrywają w tej konstrukcji kluczową rolę.

DEFINICJA 6.2. (formuła  $L^{**}(M^2)$ )

Zasady tworzenia formuł:

R1. (a) Jak w definicji 2.2. na stronie 30.

- (b) Jeżeli  $A_i$  jest wyróżnionym symbolem predykatywnym typu I, a  $x$  zmienną, to  $A_i(x)$  jest formułą.
- (c) Jeżeli  $B_i$  jest wyróżnionym symbolem predykatywnym, a  $x$  zmienną, to  $B_i(x)$  jest formułą.
- (d)  $L(x)$  jest formułą, gdy  $x$  jest zmienną.

R2. Jeżeli  $x_1$  i  $x_2$  są zmiennymi, to  $(x_1 = x_2)$  jest formułą.

R3. (a) Jak w definicji 5.2. na stronie 82.

- (b) Jeżeli  $\varphi$  jest formułą nie zawierającą predykatów wyróżnionych typu I,  $\psi$  jest dowolną formułą, a  $x$  i  $y$  są zmiennymi, to  $M^2xy(\varphi, \psi)$  jest formułą.

R4. Jak w definicji 2.2. na stronie 30.

Jedynie wyrażenia zbudowane za pomocą kroków R1.–R4. są formułami  $L^{**}(M^2)$ . □

Formuły zbudowane zgodnie z krokami R1. lub R2. nazywamy *formułami atomowymi*. Przez  $FOR_{L^{**}(M^2)}$  będę oznaczała zbiór formuł  $L^{**}(M^2)$ .

Podobnie jak w rozdziale 5.1. definiujemy implikację i kwantyfikator większości typu  $\langle 1 \rangle$ , a także zmienną wolną i zdanie w  $L^{**}(M^2)$ . Modelem semiczęściowym dla  $L^{**}(M^2)$  będzie się różnił od modelu semiczęściowego dla  $L^*(M^2)$  w punktach dotyczących interpretacji dodatkowych grup wyróżnionych symboli predykatywnych i przede wszystkim tym, że uniwersum tego modelu może być dowolnym niepustym zbiorem.

6.2.2. *Model semiczęściowy o dowolnym uniwersum dla  $L^{**}(M^2)$*

DEFINICJA 6.3. (model semiczęściowy dla  $L^{**}(M^2)$ )

Modelem semiczęściowym  $\mathfrak{M}_{sc}$  dla języka  $L^{**}(M^2)$  nazywamy  $\langle E, I_{sc}, p_1, p_2 \rangle$ , uporządkowaną czwórkę, gdzie  $E$  jest dowolnym niepustym zbiorem, a  $I_{sc}, p_1, p_2$  są funkcjami interpretującymi wyrażenia tego języka w następujący sposób:

11. (a) Jeżeli  $R$  jest  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym innym niż wyróżnione symbole predykatywne typu I, II lub III, to  
 $I(R) = \langle \bar{R}^+, \bar{R}^- \rangle$ , gdzie  $\bar{R}^+ \subseteq E^n$ ,  $\bar{R}^- = E^n \setminus \bar{R}^+$ ,  $p_1(R) = \bar{R}^+$ ,  $p_2(R) = \bar{R}^-$ .
- (b) Jeżeli  $A_i$  jest wyróżnionym symbolem predykatywnym typu I, to  
 $I(A_i) = \langle \bar{A}_i^+, \bar{A}_i^- \rangle$ , gdzie  $\bar{A}_i^+ \subseteq E$ ,  $\bar{A}_i^- \subseteq E \setminus \bar{A}_i^+$ ,  $p_1(A_i) = \bar{A}_i^+$ ,  $p_2(A_i) = \bar{A}_i^-$ .
- (c)  $I(L) = \langle \bar{L}^+, \bar{L}^- \rangle$ , gdzie  $\bar{L}^+ \subseteq E$  i  $|\bar{L}^+| < \omega$ , a  $\bar{L}^- = E \setminus \bar{L}^+$ ,  
 $p_1(L) = \bar{L}^+$ ,  $p_2(L) = \bar{L}^-$ .
- (d) Jeżeli  $B_i$  jest wyróżnionym symbolem predykatywnym typu II, to  
 $I(B_i) = \langle \bar{B}_i^+, \bar{B}_i^- \rangle$ , gdzie  $\bar{B}_i^+ \subseteq \bar{L}^+$ ,  $\bar{B}_i^- = E \setminus \bar{B}_i^+$ ,  $p_1(B_i) = \bar{B}_i^+$ ,  $p_2(B_i) = \bar{B}_i^-$ .
12.  $I(=) = \langle \{ \langle a, b \rangle \in E^2 : a = b \}, \{ \langle a, b \rangle \in E^2 : a \neq b \} \rangle$ ,  
 $p_1(=) = \{ \langle a, b \rangle \in E^2 : a = b \}$ ,  $p_2(=) = \{ \langle a, b \rangle \in E^2 : a \neq b \}$ .
13.  $I(\forall) = \langle \{E\}, \wp(E) \setminus \{\emptyset\} \rangle$ ,  $p_1(\forall) = \{E\}$ ,  $p_2(\forall) = \wp(E) \setminus \{\emptyset\}$ ;  
 $I(\exists) = \langle \wp(E) \setminus \{\emptyset\}, \{E\} \rangle$ ,  $p_1(\exists) = \wp(E) \setminus \{\emptyset\}$ ,  $p_2(\exists) = \{E\}$ ;  
 $I(M^2) = \langle \{ \langle X, Y \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : |X \cap Y| > |X \setminus Y| \}, \{ \langle X, Y \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : |X \cap Y| > |X \setminus Y| \} \rangle$ ,  
 $p_1(M^2) = p_2(M^2) = \{ \langle X, Y \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : |X \cap Y| > |X \setminus Y| \}$ .  $\square$

Definicja spełniania w modelu semiczęściowym dla  $L^{**}(M^2)$  pozostaje taka sama jak w modelu semiczęściowym dla  $L^*(M^2)$ , a więc taka sama jak w modelu częściowym dla  $L^*(M^2)$ .

Warto zauważyć, że w przypadku, gdy pierwszy argument kwantyfikatora większości jest formułą atomową zbudowaną za pomocą predykatu wyróżnionego typu II, a więc w przypadku, jaki interesuje nas ze względu na zdefiniowanie kryterium prawdy przez zgodę większości, nie musimy zakładać skończoności zbiorów, które interpretują wyróżnione predykaty typu I  $A_1, A_2, \dots$ , aby prawdziwość zdań o uznawaniu lub odrzucaniu zależała jedynie od porównywania skończonych mocy zbiorów. Wynika to stąd, że relacje interpretujące kwantyfikator większości,  $p_1(M^2)$  i  $p_2(M^2)$ , są EKST, KONS i ISOM, a więc prawdziwość lub fałszywość zdania  $M^2_{xx}(B_3(x), A_1(x))$  zależą jedynie od mocy zbiorów  $p_1(B_3), p_1(B_3) \cap p_1(A_1)$  i  $p_1(B_3) \cap p_2(A_1)$ . Skoro moc  $p_1(B_3)$  jest skończona, to skończone są też moce zbiorów pozostałych bez względu na moc  $p_1(A_1)$  i  $p_2(A_1)$ .

### 6.3. DEFINICJA KRYTERIUM PRAWDY PRZEZ ZGODĘ WIĘKSZOŚCI W MODELU SEMICZĘŚCIOWYM DLA $L^{**}(M^2)$ ZE SPEŁNIANIEM SUPERWALUACYJNYM

Za pomocą spełniania superwaluacyjnego zdefiniowanego jak w rozdziale 4. (definicja 4.25. na stronie 70) zdefiniujemy teraz kryterium prawdy przez zgodę większości:

DEFINICJA 6.4. (kryterium prawdy przez zgodę większości III)

Niech  $B_1$  będzie wyróżnionym predykatem typu II, zinterpretowanym w taki sposób, że  $p_1(B_1)$  to zbiór, do którego należą członkowie wyróżnionej populacji (i tylko oni), a  $\varphi(x) = T(U(\alpha, x))$ :

Zdanie  $\alpha$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2xx(B_1(x), \varphi(x)).$$

Zdanie  $\alpha$  jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s M^2xx(B_1(x), \varphi(x)). \quad \square$$

W szczególności w przypadku zdań atomowych definicja ta przybierze następującą postać:

Zdanie  $p_1$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2xx(B_3(x), A_1(x)).$$

Zdanie  $p_1$  jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s M^2xx(B_3(x), A_1(x)).^4$$

Mimo że pozbyliśmy się założenia FIN i rozważamy modele o dowolnych uniwersach, to za pomocą predykatu  $L$  wykrawamy sobie w każdym takim modelu jak gdyby odpowiednik modeli o uniwersum skończonym, które analizowaliśmy w rozdziałach poprzednich. Mówi o tym poniższe twierdzenie.

#### TWIERDZENIE 6.5.

Niech  $\mathfrak{M}_{sc} = \langle E^{\mathfrak{M}}, I_{sc}^{\mathfrak{M}}, p_1^{\mathfrak{M}}, p_2^{\mathfrak{M}} \rangle$  będzie modelem semiczęściowym dla języka  $L^{**}(M^2)$ ,

$\mathfrak{M}_{sc} = \langle E^{\mathfrak{M}}, I_{sc}^{\mathfrak{M}}, p_1^{\mathfrak{M}}, p_2^{\mathfrak{M}} \rangle$  – modelem semiczęściowym dla języka  $L^*(M^2)$ ,

a  $\mathfrak{D}_c = \langle E^{\mathfrak{D}}, I_c^{\mathfrak{D}}, p_1^{\mathfrak{D}}, p_2^{\mathfrak{D}} \rangle$  – modelem częściowym dla języka  $L^*(M)$ .<sup>5</sup>

Niech  $E^{\mathfrak{D}} = p_1^{\mathfrak{M}}(P_i) = p_1^{\mathfrak{M}}(B_i)$ ,  $E^{\mathfrak{M}} = p_1^{\mathfrak{M}}(L)$ ;  $\varphi(x)$  będzie formułą zbudowaną jedynie za pomocą wyróżnionych symboli predykatywnych  $A_1, A_2, \dots$  zmiennej i funktorów zdaniowych oraz  $p_1^{\mathfrak{D}}(\varphi) = p_1^{\mathfrak{M}}(P_i) \cap p_1^{\mathfrak{M}}(\varphi) = p_1^{\mathfrak{M}}(B_i) \cap p_1^{\mathfrak{M}}(\varphi)$ ,  $p_2^{\mathfrak{D}}(\varphi) = p_1^{\mathfrak{M}}(P_i) \cap p_2^{\mathfrak{M}}(\varphi) = p_1^{\mathfrak{M}}(B_i) \cap p_2^{\mathfrak{M}}(\varphi)$ .

Następujące warunki są równoważne:

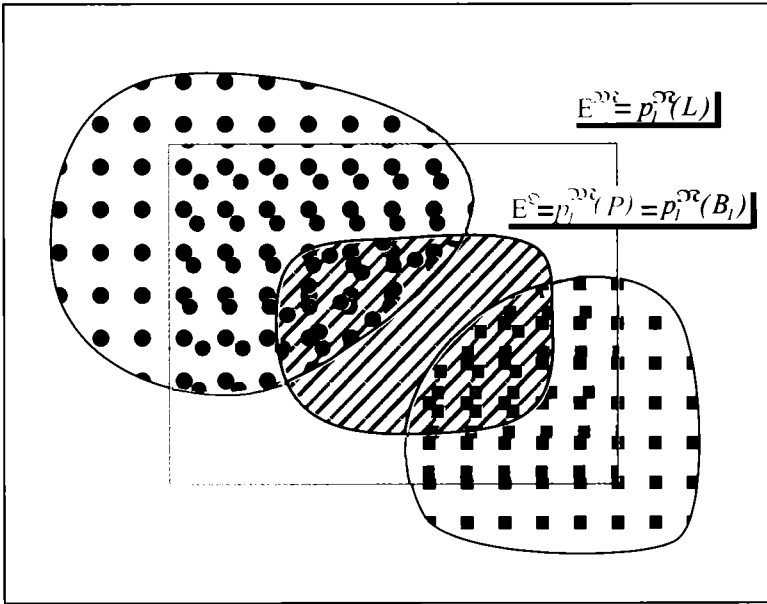
- (i)  $\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2xx(B_i(x), \varphi(x))$ ,
- (ii)  $\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2xx(P_i(x), \varphi(x))$ ,
- (iii)  $\mathfrak{D}_c \models_s Mx\varphi(x)$ ;

także poniższe warunki są równoważne:

- (iv)  $\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s M^2xx(B_i(x), \varphi(x))$ ,
- (v)  $\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s M^2xx(P_i(x), \varphi(x))$ ,
- (vi)  $\mathfrak{D}_c \not\models_s Mx\varphi(x)$ ;

<sup>4</sup>Choć jest ścisły związek pomiędzy indeksem  $i$  w  $p_i$  i  $A_i$  (wyznaczony poprzez funkcję  $T$ ), to indeks  $j$  przy  $B_j$  jest od nich niezależny.

<sup>5</sup>Indeksy górne  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{D}$ , które pojawiają się w tym twierdzeniu, nie wiążą się z żadną zmianą w definicji poszczególnych modeli, lecz są jedynie pomocniczymi symbolami, które pozwolą nam odnosić się skrótowo do uniwersów czy funkcji interpretujących odpowiednio modeli  $\mathfrak{M}_{sc}$ ,  $\mathfrak{M}_{sc}$  i  $\mathfrak{D}_c$ .

$E^{\mathfrak{R}}$  $\square E^{\mathfrak{R}}$  $\square E^{\mathfrak{S}}$  $\square E^{\mathfrak{S}}$  $p_i^{\mathfrak{R}}(L)$  $p_i^{\mathfrak{R}}(B_i)$  $p_i^{\mathfrak{S}}(P)$  $\bullet \bullet p_i^{\mathfrak{R}}(\varphi)$  $\bullet \bullet p_i^{\mathfrak{S}}(\varphi)$  $\bullet \bullet p_i^{\mathfrak{S}}(\varphi)$  $\blacksquare \blacksquare p_2^{\mathfrak{R}}(\varphi)$  $\blacksquare \blacksquare p_2^{\mathfrak{S}}(\varphi)$  $\blacksquare \blacksquare p_2^{\mathfrak{S}}(\varphi)$ Rys. 6.1.:  $\mathfrak{N}_{sc}, \mathfrak{M}_{sc}, \mathfrak{D}_c$





DOWÓD:

1. Jeżeli (i), to (ii)

$\mathfrak{N}_{sc} \models_s M^2xx(B_i(x), \varphi(x))$  wtw dla każdego modelu  $\mathfrak{N}'_c$ , który jest uzupełnieniem modelu  $\mathfrak{N}_{sc}$ ,  $\mathfrak{N}'_c \models M^2xx(B_i(x), \varphi(x))$  wtw  $|p_1^{\mathfrak{N}'_c}(B_i) \cap p_1^{\mathfrak{N}'_c}(\varphi)| > |p_1^{\mathfrak{N}'_c}(B_i) \setminus p_1^{\mathfrak{N}'_c}(\varphi)|$ . Uzupełnienie modelu  $\mathfrak{N}_{sc}$  będzie niewątpliwie (po dokonaniu odpowiednich utożsamień) uzupełnieniem modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$ . Nas jednak interesuje znacznie mocniejsze twierdzenie – musimy wiedzieć, że każde spełnianie w uzupełnieniu modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$  wynika ze spełniania w jakimś uzupełnieniu modelu  $\mathfrak{N}_{sc}$ . Niech  $\mathfrak{M}'_c$  będzie dowolnym uzupełnieniem modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$ . W modelu semiczęściowym uzupełnienia funkcji interpretującej dotyczą jedynie wyróżnionych symboli predykatywnych typu I ( $A_1, A_2, \dots$ ), zdefiniujemy wobec tego funkcję  $I^{\mathfrak{M}'_c}$  w następujący sposób:  $p_1^{\mathfrak{M}'_c}(A_i) = p_1^{\mathfrak{M}'_c}(A_i) \cup p_1^{\mathfrak{N}}(A_i)$ , a  $p_2^{\mathfrak{M}'_c}(A_i) = E^{\mathfrak{N}} \setminus p_1^{\mathfrak{N}}(A_i)$  dla  $i = 1, 2, \dots$  Model  $\mathfrak{N}'' = \langle E^{\mathfrak{N}}, I^{\mathfrak{M}'_c}, p_1^{\mathfrak{M}'_c}, p_2^{\mathfrak{M}'_c} \rangle$  jest uzupełnieniem modelu  $\mathfrak{N}$ , więc zgodnie z założeniem  $\mathfrak{N}'_c \models M^2xx(B_i(x), \varphi(x))$ , czyli, skoro spełnianie tego zdania zależy jedynie od tego, co dzieje się wewnątrz  $p_1^{\mathfrak{N}''}(B_i)$  (które jest równe  $p_1^{\mathfrak{M}'_c}(P_i)$ ), a  $p_1^{\mathfrak{N}''}(P_i) \cap p_1^{\mathfrak{N}''}(\varphi) = p_1^{\mathfrak{M}'_c}(P_i) \cap p_1^{\mathfrak{N}''}(\varphi)$ , to  $|p_1^{\mathfrak{M}'_c}(P_i) \cap p_1^{\mathfrak{M}'_c}(\varphi)| > |p_1^{\mathfrak{M}'_c}(P_i) \setminus p_1^{\mathfrak{M}'_c}(\varphi)|$ . Ponieważ  $\mathfrak{M}'_c$  był dowolnym uzupełnieniem modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$ , możemy z tego wnioskować, że  $\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2xx(P_i(x), \varphi(x))$ .

2. Jeżeli (ii), to (iii)

$\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2xx(P_i(x), \varphi(x))$  wtw dla każdego modelu  $\mathfrak{M}'_c$ , który jest uzupełnieniem modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$ ,  $\mathfrak{M}'_c \models M^2xx(P_i(x), \varphi(x))$ . Ponieważ  $p_1^{\mathfrak{M}'_c}(P_i) = p_1^{\mathfrak{M}}(P_i) = E^{\mathfrak{D}}$ , więc zgodnie z twierdzeniem 5.9. ze strony 84 wynika z tego, że  $\mathfrak{D}'_c \models Mx\varphi(x)$  dla  $\mathfrak{D}'_c$  uzupełnienia modelu  $\mathfrak{D}_c$ , zdefiniowanego w następujący sposób:  $p_1^{\mathfrak{D}'_c}(A_i) = p_1^{\mathfrak{M}'_c}(A_i) \cap p_1^{\mathfrak{M}'_c}(P_i)$ , a  $p_2^{\mathfrak{D}'_c}(A_i) = E^{\mathfrak{D}} \setminus p_1^{\mathfrak{D}'_c}(A_i)$  dla  $i = 1, 2, \dots$  Rozumowanie analogiczne do przeprowadzonego w punkcie 1. przekona nas o tym, że uda się to dla dowolnego uzupełnienia modelu  $\mathfrak{D}_c$ , czyli  $\mathfrak{D}_c \models_s Mx\varphi(x)$ .

3. Jeżeli (iii), to (i)

$\mathfrak{D}_c \models_s Mx\varphi(x)$  wtw dla każdego modelu  $\mathfrak{D}'_c$ , który jest uzupełnieniem modelu  $\mathfrak{D}_c$ ,  $\mathfrak{D}'_c \models Mx\varphi(x)$ . Ponieważ  $p_1^{\mathfrak{D}'_c}(B_i) = p_1^{\mathfrak{N}'_c}(B_i) = E^{\mathfrak{D}}$ , a  $p_1^{\mathfrak{D}'_c}(\varphi) \subseteq p_1^{\mathfrak{N}'_c}(\varphi)$ , dla każdego  $\mathfrak{N}'_c$  uzupełnienia  $\mathfrak{N}_{sc}$ , więc znowu zgodnie z twierdzeniem 5.9. ze strony 84  $\mathfrak{N}'_c \models M^2xx(B_i(x), \varphi(x))$ , a co za tym idzie  $\mathfrak{N}_{sc} \models_s M^2xx(B_i(x), \varphi(x))$ .

4. Dowód równoważności (iv), (v) i (vi) przebiega analogicznie. □

Twierdzenie to pokazuje nam, w jaki sposób możemy utożsamić poszczególne „kawałki” modelu semiczęściowego dla  $L^{**}(M^2)$ , modelu semiczęściowego dla  $L^*(M^2)$  i modelu częściowego dla  $L^*(M)$ . Ilustruje to rysunek 6.1.

Z twierdzenia 6.5. wynika bezpośrednio następujący wniosek:

WNIOSEK 6.6.

1. Zdanie  $\alpha$  jest prawdziwe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowanym w modelu częściowym dla  $L^*(M)$   
wtedy i tylko wtedy, gdy  
 $\alpha$  jest prawdziwe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowanym w modelu semiczęściowym dla  $L^*(M^2)$   
wtedy i tylko wtedy, gdy

$\alpha$  jest prawdziwe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowanym w modelu semiczęściowym dla  $L^{**}(M^2)$ .

2. Zdanie  $\alpha$  jest fałszywe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowanym w modelu częściowym dla  $L^*(M)$   
wtedy i tylko wtedy, gdy  
 $\alpha$  jest fałszywe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowanym w modelu semiczęściowym dla  $L^*(M^2)$   
wtedy i tylko wtedy, gdy  
 $\alpha$  jest fałszywe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowanym w modelu semiczęściowym dla  $L^{**}(M^2)$ .

DOWÓD:

1. Chcemy pokazać następującą równoważność:  
 $\mathfrak{D}_c \models_s Mx\varphi(x)$  wtw  $\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2xx(P_1(x), \varphi(x))$  wtw  $\mathfrak{N}_{sc} \models_s M^2xx(B_1(x), \varphi(x))$ ,  
gdzie  $\varphi(x) = T(U(\alpha, x))$ , a  $E^{\mathfrak{D}} = p_1^{\mathfrak{M}}(P_1) = p_1^{\mathfrak{N}}(B_1)$  to zbiór składający się z członków wyróżnionej populacji. Jest to dokładnie taka sytuacja jak w twierdzeniu 6.5.
2. Tu skorzystamy z punktu 2. twierdzenia 6.5., z którego wynika, że:  
 $\mathfrak{D}_c \not\models_s Mx\varphi(x)$  wtw  $\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s M^2xx(P_1(x), \varphi(x))$  wtw  $\mathfrak{N}_{sc} \not\models_s M^2xx(B_1(x), \varphi(x))$   
przy założeniach takich jak powyżej. □

Oznacza to, że definicje I, II i III kryterium prawdy przez zgodę większości są równoważne. Przy założeniu nieparzystej liczby członków populacji, które rozważamy, postaram się, nie tracąc tej równoważności, nieco jeszcze zmienić w następnym rozdziale model semiczęściowy i kwantyfikator większości tak, aby dało się ten kwantyfikator zdefiniować w języku  $L_{\omega_1, \omega}$ , do którego dodamy wyróżnione predykaty typu I, II i III.

## TEORIA TW

Konstrukcja, którą zaproponuję w tym rozdziale, jest próbą zdefiniowania kwantyfikatora większości, czy raczej pseudowiększości, w języku  $L_{\omega_1\omega}^{**}$ , czyli języku  $L_{\omega_1\omega}$  z dodanymi trzema typami predykatów wyróżnionych znanymi z poprzedniego rozdziału, przy założeniu nieparzystej liczby członków populacji, które rozważamy.

Nazywam ten kwantyfikator kwantyfikatorem pseudowiększości, gdyż zachowuje się on tak jak kwantyfikator większości, ale tylko w pewnej klasie modeli: takich, w których pierwszy argument tego kwantyfikatora interpretowany jest przez parę zbiorów, spośród których pierwszy ma moc nieparzystą. Jest to więc kwantyfikator adekwatny dla zdefiniowania kryterium prawdy przez zgodę większości, o ile założymy, że rozważane populacje mają nieparzystą liczbę członków. Takie założenie, choć z punktu widzenia logicznego arbitralne, wydaje się mieć pragmatyczne uzasadnienie, o czym pisałam już w rozdziale 4.2. na stronie 58. Przy podejmowaniu decyzji kolegialnych dba się zazwyczaj o to, aby grupy decyzyjne składały się z nieparzystej liczby osób, aby wykluczyć impas polegający na równomiernym rozłożeniu się głosów „za” i „przeciw”. W oparciu o taki kwantyfikator zdefiniuję po raz kolejny kryterium prawdy przez zgodę większości w modelach semiczęściowych dla  $L_{\omega_1\omega}^{**}$  i pokażę, że definicja ta, przy założeniu nieparzystej liczby członków populacji, które rozważamy, jest równoważna dotychczas zaproponowanemu. Sformułuję następnie teorię TW (teorię większości), która powstanie w wyniku dodania kilku aksjomatów do aksjomatów rachunku  $L_{\omega_1\omega}$ . Przedstawię dowód pełności zbioru aksjomatów teorii TW względem modeli semiczęściowych dla  $L_{\omega_1\omega}^{**}$ , w których wyróżnione predykaty typu II,  $B_1, B_2, \dots$ , są interpretowane przez pary zbiorów, z których pierwszy ma moc nieparzystą. Ten ostatni warunek oznaczmy przez NIEP.

Wyjaśnienia wymaga tu słowo „teoria” użyte w poprzednich zdaniach, a także w tytule rozdziału. Wielu logików uważa, że formalizacja jest formalizacją, gdy rachunek w jej wyniku otrzymany jest aksjomatyzowalny, a reguły dowodowe są skończone. Oczywiście rachunek  $L_{\omega_1\omega}$  nie spełnia tego warunku, a co dopiero teoria na jego bazie zbudowana. Nie będę tutaj dyskutować z tym poglądem. To, co zaproponuję, nie jest formalizacją w tym sensie. Używam tu słowa „teoria” w szerszym sensie, takim, w którym teorią można określić system powstały w wyniku rozszerzenia zbioru aksjomatów logiki  $L_{\omega_1\omega}$  o dodatkowe, specyficzne aksjomaty. Użycie to zgodne jest na przykład z definicją teorii dedukcyjnej, podaną przez Stanisława Krajewskiego w (1987).

### 7.1. $L_{\omega_1\omega}$

Logika  $L_{\omega_1\omega}$  jest logiką nieskończoną, która powstaje z logiki elementarnej poprzez dopuszczenie łączenia alternatywą i koniunkcją przeliczalnych zbiorów formuł. Pierwszym,

który zaproponował badania nad tego typu logikami, był Alfred Tarski w pracy z 1958 roku zatytułowanej „Remarks on predicate logic with infinitely long expressions” (por. Scott 1965). Oryginalna propozycja Tarskiego wykraczała poza logikę  $L_{\omega_1, \omega}$ , gdyż oprócz przeliczalnych koniunkcji i alternatyw dopuszczał on przeliczalne kwantyfikacje, czyli coś, co w terminologii przyjętej dziś za Carol Karp (1964) jest logiką  $L_{\omega_1, \omega_1}$ . Ogólnie logika  $L_{\alpha\beta}$  jest rozszerzeniem logiki elementarnej, w którym dopuszcza się łączenie za pomocą koniunkcji i alternatywy mniej niż  $\alpha$  formuł i kwantyfikacje po mniej niż  $\beta$  zmiennych.  $L_{\omega_1, \omega}$  jest w tym sensie minimalnym rozszerzeniem logiki elementarnej i posiada zbliżoną do niej charakterystykę teoriomodelową. Obowiązuje w niej między innymi dolne twierdzenie Löwenheima-Skolema, twierdzenie o pełności, choć przy dopuszczeniu dowodów o przeliczalnej długości (patrz twierdzenie 7.24. i reguły inferencyjne na stronie 123) i pewne wersje górnego twierdzenia Löwenheima-Skolema oraz twierdzenia o zwartości.<sup>1</sup> Ta charakterystyka, no i prosty fakt, że kwantyfikuje się w tej logice jedynie po zmiennych indywidualnych, skłoniły Danę Scotta do uznania logiki  $L_{\omega_1, \omega}$  za „rozsądną nieskończoną logikę pierwszego rzędu” (Scott 1965, s. 329). Po tym wstępie przedstawię dokładne definicje języka, modelu, spełniania i innych pojęć, znanych z poprzednich rozdziałów, dla  $L_{\omega_1, \omega}$ .

#### DEFINICJA 7.1. (język $L_{\omega_1, \omega}$ )

Język  $L_{\omega_1, \omega}$  składa się z następujących wyrażeń:

##### 1. Symbole logiczne:

- (a) funktory zdaniowe:  $\vee, \wedge, \neg, \bigwedge_{n < \omega}$ ;
- (b) zbiór zmiennych indywidualnych  $V$  o mocy  $\omega_1$ ; dowolne elementy tego zbioru oznaczamy za pomocą symboli:  $x, y, z, x_1, x_2, \dots, x_\alpha, \dots$ , gdzie  $\alpha < \omega_1$ ;<sup>2</sup>
- (c) symbol kwantyfikatorowy:  $\forall$ ;<sup>3</sup>
- (d) symbol identyczności:  $=$ .

##### 2. Symbole pozalogiczne: dla każdego $n = 1, 2, \dots$ zbiór (niekoniecznie niepusty) $n$ -argumentowych symboli relacyjnych $P^n$ ; dowolne elementy tych zbiorów oznaczamy za pomocą symboli $P, R, S, P_1, P_2, \dots$ ; jednoargumentowe symbole relacyjne nazywamy symbolami predykatywnymi lub po prostu predykatami.

##### 3. Nawiasy: $(, )$ .

□

W definicji poprawnie zbudowanej formuły oraz zmiennej wolnej przybędą punkty dotyczące nowego symbolu  $\bigwedge_{n < \omega}$ :

#### DEFINICJA 7.2. (formuła $L_{\omega_1, \omega}$ )

Zasady tworzenia formuł:

<sup>1</sup>Choć oczywiście zwartość jako taka nie obowiązuje dla  $L_{\omega_1, \omega}$ .

<sup>2</sup>Przyjmuję, zgodnie z tym, jak robią to Karp (1964), Keisler (1971) i Lopez-Escobar (1965), że w języku  $L_{\omega_1, \omega}$  mamy nieprzeliczalną ilość zmiennych indywidualnych. Przeliczalną ilość przyjmują Lindström (1966), Makkai (1969), Scott (1965), van Benthem i Doets (1983) oraz Ebbinghaus i Flum (1999). Muszą wtedy założyć, że w dowodzie może występować co najwyżej skończona liczba zmiennych wolnych (por. Scott 1965, s. 336).

<sup>3</sup>Przyjmuję jedynie  $\forall$  jako symbol podstawowy ( $\exists$  będzie zdefiniowany poniżej), aby móc w następnym rozdziale bez dodatkowych dostosowań skorzystać z syntaktycznego ujęcia  $L_{\omega_1, \omega}$  przedstawionego przez Keislera w (1971).

- R1. Jeżeli  $R$  jest na  $n$ -argumentowym symbole relacyjnym, a  $x_1, \dots, x_n$  są zmiennymi, to  $R(x_1, \dots, x_n)$  jest formułą.
- R2. Jeżeli  $x_1$  i  $x_2$  są zmiennymi, to  $(x_1 = x_2)$  jest formułą.
- R3. Jeżeli  $\varphi$  jest formułą, a  $x$  zmienną, to  $\forall x \varphi$  jest formułą.
- R4. Jeżeli  $\varphi, \psi$  są formułami, to  $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi)$  też są formułami.
- R5. Jeżeli  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  są formułami, to  $\bigwedge_{n < \omega} \varphi_n$  jest formułą.

Jedynie wyrażenia zbudowane za pomocą kroków R1.–R5. są formułami  $L_{\omega_1, \omega}$ . □

Formuły zbudowane zgodnie z krokami R1. lub R2. nazywamy *formułami atomowymi*. Po przez  $\text{FOR}_{L_{\omega_1, \omega}}$  będą oznaczała zbiór formuł  $L_{\omega_1, \omega}$ .

DEFINICJA 7.3. (zmienna wolna w  $L_{\omega_1, \omega}$ )

Zbiór zmiennych wolnych formuły  $\varphi \in \text{FOR}_{L_{\omega_1, \omega}}$ ,  $ZW(\varphi)$ , definiujemy w następujący sposób:

- (•) punkty (1.), (2.), (3.) jak w definicji 5.5. na stronie 83,
- 4.  $ZW(\forall x \varphi) = ZW(\varphi) \setminus \{x\}$ ,
- 5.  $ZW(\bigwedge_{n < \omega} \varphi_n) = \bigcup_{n < \omega} ZW(\varphi_n)$ . □

Definicja zdania pozostaje taka sama, jak w przypadku dotychczas rozważanych języków. Podobnie jak dotychczas, przyjmiemy definicję implikacji za pomocą alternatywy i negacji. Dodatkowo za pomocą negacji i kwantyfikatora ogólnego zdefiniujemy kwantyfikator egzystencjalny  $\exists$ , a za pomocą negacji i nieskończonej koniunkcji – nieskończoną alternatywę  $\bigvee_{n < \omega}$ :

DEFINICJA 7.4. (kwantyfikator egzystencjalny w  $L_{\omega_1, \omega}$ )

Jeżeli  $\varphi$  jest formułą, a  $x$  zmienną, to

$$\exists x \varphi \stackrel{\text{df}}{=} \neg \forall x \neg \varphi. \quad \square$$

DEFINICJA 7.5. (nieskończona alternatywa)

Jeżeli  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  są formułami, to

$$\bigvee_{n < \omega} \varphi_n \stackrel{\text{df}}{=} \neg \bigwedge_{n < \omega} \neg \varphi_n. \quad \square$$

Model standardowy dla  $L_{\omega_1, \omega}$  jest dokładnie takim samym modelem jak model standardowy dla  $L$ , to znaczy takim jak model dla  $L^*(M)$  zdefiniowany na stronie 53 (definicja 4.1.) z tą tylko różnicą, że nie będzie w jego opisie punktów dotyczących interpretacji kwantyfikatorów  $\forall$  i  $\exists$  ani symboli wyróżnionych i uniwersum tego modelu będzie dowolnym zbiorem. Wynika to z tego, że język logiki elementarnej i język  $L_{\omega_1, \omega}$  nie różnią się co do symboli

pozalogicznych. Z tego samego powodu model częściowy dla  $L_{\omega_1, \omega}$  będzie takim samym modelem, jak model częściowy zdefiniowany dla  $L^*(M)$  na stronie 58 (definicja 4.9.), znowu po pominięciu wyżej wymienionych punktów. W definicjach spełniania w modelu standardowym i częściowym dojdą natomiast punkty dotyczące nieskończonej koniunkcji.

**DEFINICJA 7.6.** (spełnianie w modelu standardowym dla  $L_{\omega_1, \omega}$ )

Mówimy, że wartościowanie  $\nu$  spełnia formułę  $\varphi \in \text{FOR}_{L_{\omega_1, \omega}}$  w modelu standardowym  $\mathfrak{M}$  dla  $L_{\omega_1, \omega}$ ,  $\mathfrak{M} \models \varphi[\nu]$ , gdy:

- S1. Jeżeli  $\varphi = R(x_1, \dots, x_n)$  jest  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, to  $\mathfrak{M} \models R(x_1, \dots, x_n)[\nu]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle \nu(x_1), \dots, \nu(x_n) \rangle \in I(R)$ .
- S2.  $\mathfrak{M} \models (x_1 = x_2)[\nu]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\nu(x_1) = \nu(x_2)$ .
- S3. Jeżeli  $\varphi$  jest formułą, a  $x$  jest zmienną, to  $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi[\nu]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{a \in E : \mathfrak{M} \models \varphi[\nu(\frac{a}{x})]\} = E$ .
- S4. Jeżeli  $\varphi, \psi$  są formułami, to
 

$\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \psi[\nu]$	tedy i tylko wtedy, gdy	$\mathfrak{M} \models \varphi[\nu]$ i $\mathfrak{M} \models \psi[\nu]$ ;
$\mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi[\nu]$	tedy i tylko wtedy, gdy	$\mathfrak{M} \models \varphi[\nu]$ lub $\mathfrak{M} \models \psi[\nu]$ ;
$\mathfrak{M} \models \neg \varphi[\nu]$	tedy i tylko wtedy, gdy	nie jest tak, że $\mathfrak{M} \models \varphi[\nu]$ .
- S5. Jeżeli  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  są formułami, to  $\mathfrak{M} \models \bigwedge_{n < \omega} \varphi_n[\nu]$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $i < \omega$ ,  $\mathfrak{M} \models \varphi_i[\nu]$ . □

Z definicji kwantyfikatora egzystencjalnego, nieskończonej alternatywy oraz powyższej definicji spełniania w modelu standardowym dla  $L_{\omega_1, \omega}$  wynika bezpośrednio następujący fakt:

**FAKT 7.7.**

Dla każdego modelu standardowego  $\mathfrak{M}$  dla  $L_{\omega_1, \omega}$  i każdego wartościowania  $\nu$ :

1. Jeżeli  $\varphi$  jest formułą, a  $x$  zmienną, to  $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi[\nu]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\{a \in E : \mathfrak{M} \models \varphi[\nu(\frac{a}{x})]\} \neq \emptyset$ .
2. Jeżeli  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  są formułami, to  $\mathfrak{M} \models \bigvee_{n < \omega} \varphi_n[\nu]$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie  $i < \omega$ , że  $\mathfrak{M} \models \varphi_i[\nu]$ . □

Definicje wynikania i tautologii dla  $L_{\omega_1, \omega}$  są naturalnymi analogonami odpowiednich pojęć z logiki elementarnej:

**DEFINICJA 7.8.** (wynikanie w  $L_{\omega_1, \omega}$ )

Mówimy, że formuła  $\psi \in \text{FOR}_{L_{\omega_1, \omega}}$  wynika ze zbioru formuł  $\Gamma \subseteq \text{FOR}_{L_{\omega_1, \omega}}$ ,  $\Gamma \models \psi$ , wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego modelu standardowego  $\mathfrak{M}$  dla  $L_{\omega_1, \omega}$  i każdego wartościowania  $\nu$ :

jeżeli  $\mathfrak{M} \models \varphi[\nu]$  dla każdej formuły  $\varphi \in \Gamma$ , to  $\mathfrak{M} \models \psi[\nu]$ . □

DEFINICJA 7.9. (tautologia  $L_{\omega, \omega}$ )

Formułę  $\varphi \in \text{FOR}_{L_{\omega, \omega}}$  nazywamy *tautologią*  $L_{\omega, \omega}$ ,  $\models \varphi$ , gdy wynika ona z pustego zbioru formuł.  $\square$

DEFINICJA 7.10. (spełnianie w modelu częściowym dla  $L_{\omega, \omega}$ )

Mówimy, że wartościowanie  $\nu$  spełnia (odrzuca) formułę  $\varphi \in \text{FOR}_{L_{\omega, \omega}}$  w modelu częściowym  $\mathfrak{M}_c$  dla  $L_{\omega, \omega}$ ,  $\mathfrak{M}_c \models \varphi[\nu]$  ( $\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[\nu]$ ), gdy:

- S1. Jeżeli  $\varphi = R(x_1, \dots, x_n)$  jest  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, to
- |  |                          |  |
|--|--------------------------|--|
| $\mathfrak{M}_c \models R(x_1, \dots, x_n)[\nu]$     | wtedy i tylko wtedy, gdy | $\langle \nu(x_1), \dots, \nu(x_n) \rangle \in p_1(R)$ , |
| $\mathfrak{M}_c \not\models R(x_1, \dots, x_n)[\nu]$ | wtedy i tylko wtedy, gdy | $\langle \nu(x_1), \dots, \nu(x_n) \rangle \in p_2(R)$ . |
- S2.  $\mathfrak{M}_c \models (x_1 = x_2)[\nu]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\nu(x_1) = \nu(x_2)$ ,  
 $\mathfrak{M}_c \not\models (x_1 = x_2)[\nu]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\nu(x_1) \neq \nu(x_2)$ .
- S3. Jeżeli  $\varphi$  jest formułą, a  $x$  jest zmienną, to
- |   |                          |   |
|---|--------------------------|---|
| $\mathfrak{M}_c \models \forall x \varphi[\nu]$     | wtedy i tylko wtedy, gdy | $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \varphi[\nu(\frac{a}{x})]\} = E$ ,                |
| $\mathfrak{M}_c \not\models \forall x \varphi[\nu]$ | wtedy i tylko wtedy, gdy | $\{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \varphi[\nu(\frac{a}{x})]\} \neq \emptyset$ . |
- S4. Jeżeli  $\varphi, \psi$  są formułami, to
- |   |                          |  |
|---|--------------------------|--|
| $\mathfrak{M}_c \models \varphi \wedge \psi[\nu]$     | wtedy i tylko wtedy, gdy | $\mathfrak{M}_c \models \varphi[\nu]$ i $\mathfrak{M}_c \models \psi[\nu]$ ,           |
| $\mathfrak{M}_c \not\models \varphi \wedge \psi[\nu]$ | wtedy i tylko wtedy, gdy | $\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[\nu]$ lub $\mathfrak{M}_c \not\models \psi[\nu]$ , |
| $\mathfrak{M}_c \models \varphi \vee \psi[\nu]$       | wtedy i tylko wtedy, gdy | $\mathfrak{M}_c \models \varphi[\nu]$ lub $\mathfrak{M}_c \models \psi[\nu]$ ,         |
| $\mathfrak{M}_c \not\models \varphi \vee \psi[\nu]$   | wtedy i tylko wtedy, gdy | $\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[\nu]$ i $\mathfrak{M}_c \not\models \psi[\nu]$ ,   |
| $\mathfrak{M}_c \models \neg \varphi[\nu]$            | wtedy i tylko wtedy, gdy | $\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[\nu]$ ,  |
| $\mathfrak{M}_c \not\models \neg \varphi[\nu]$        | wtedy i tylko wtedy, gdy | $\mathfrak{M}_c \models \varphi[\nu]$ .  |
- S5. Jeżeli  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  są formułami, to
- |  |                          |  |
|--|--------------------------|--|
| $\mathfrak{M} \models \bigwedge_{n < \omega} \varphi_n[\nu]$     | wtedy i tylko wtedy, gdy | dla każdego $i < \omega$ , $\mathfrak{M} \models \varphi_i[\nu]$ ,                     |
| $\mathfrak{M} \not\models \bigwedge_{n < \omega} \varphi_n[\nu]$ | wtedy i tylko wtedy, gdy | istnieje takie $i < \omega$ , że $\mathfrak{M} \not\models \varphi_i[\nu]$ . $\square$ |

Z definicji kwantyfikatora egzystencjalnego, nieskończonej alternatywy oraz powyższej definicji spełniania w modelu częściowym dla  $L_{\omega, \omega}$  wynika bezpośrednio następujący fakt:

FAKT 7.11.

Dla każdego modelu częściowego  $\mathfrak{M}_c$  dla  $L_{\omega, \omega}$  i dla każdego wartościowania  $\nu$ :

1. Jeżeli  $\varphi$  jest formułą, a  $x$  jest zmienną, to
 

$\mathfrak{M}_c \models \exists x \varphi[\nu]$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$\{a \in E : \mathfrak{M}_c \models \varphi[\nu(\frac{a}{x})]\} \neq \emptyset$ ,
$\mathfrak{M}_c \not\models \exists x \varphi[\nu]$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$\{a \in E : \mathfrak{M}_c \not\models \varphi[\nu(\frac{a}{x})]\} = E$ .
2. Jeżeli  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  są formułami, to
 

$\mathfrak{M} \models \bigvee_{n < \omega} \varphi_n[\nu]$	wtedy i tylko wtedy, gdy	istnieje takie $i < \omega$ , że $\mathfrak{M} \models \varphi_i[\nu]$ ,
$\mathfrak{M} \not\models \bigvee_{n < \omega} \varphi_n[\nu]$	wtedy i tylko wtedy, gdy	dla każdego $i < \omega$ , $\mathfrak{M} \not\models \varphi_i[\nu]$ . $\square$

Spełnianie superwaluacyjne, wynikanie superwaluacyjne i tautologia superwaluacyjna zostały zdefiniowane w ogólnej postaci (definicje 4.25. na stronie 70, 4.34. na stronie 78, 4.35.

na stronie 79), pozostają więc nie zmienione. W rozdziale 4.3. udowodniliśmy twierdzenie (4.30. na stronie 74), zrównujące totalne modele częściowe dla języka logiki elementarnej z modelami standardowymi. Analogon tego twierdzenia obowiązuje także w  $L_{\omega_1, \omega}$ :

**TWIERDZENIE 7.12.**

Jeżeli  $\mathfrak{M}_c = \langle E, I_c, p_1, p_2 \rangle$  jest totalnym modelem częściowym dla  $L_{\omega_1, \omega}$ , a  $\mathfrak{M} = \langle E, I \rangle$  jest modelem standardowym dla  $L_{\omega_1, \omega}$  takim, że dla każdego symbolu tego języka  $\zeta$ , dla którego funkcja  $p_1$  jest zdefiniowana,  $I(\zeta) = p_1(\zeta)$ , to dla dowolnego wartościowania  $v$  i dowolnej formuły  $\varphi \in \text{FOR}_{L_{\omega_1, \omega}}$ :

$$\mathfrak{M}_c \models \varphi[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \mathfrak{M} \models \varphi[v]$$

oraz

$$\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \text{nie jest tak, że} \quad \mathfrak{M} \models \varphi[v].$$

**DOWÓD:** Dowód przebiega przez indukcję ze względu na złożoność formuł. Ponieważ modele częściowy i standardowy dla  $L_{\omega_1, \omega}$  nie różnią się w istotny dla tego dowodu sposób od modeli, których dotyczyło twierdzenie 4.30., kroki dotyczące formuł atomowych,  $\wedge, \vee, \neg, \forall$  dowodzone są dokładnie tak samo jak w tym twierdzeniu. Pozostaje przypadek dla  $\bigwedge_{n < \omega}$ .<sup>4</sup>

$\varphi = \bigwedge_{n < \omega} \psi_n$ , gdzie  $\psi_i$  dla  $i < \omega$  są dowolnymi formułami:

$\mathfrak{M}_c \models \bigwedge_{n < \omega} \psi_n[v]$  wtw dla każdego  $i < \omega$   $\mathfrak{M}_c \models \psi_i[v]$

wtw (z zał. ind.) dla każdego  $i < \omega$   $\mathfrak{M} \models \psi_i[v]$  wtw  $\mathfrak{M} \models \bigwedge_{n < \omega} \psi_n[v]$ ;

$\mathfrak{M}_c \not\models \bigwedge_{n < \omega} \psi_n[v]$  wtw istnieje takie  $i < \omega$ , że  $\mathfrak{M}_c \not\models \psi_i[v]$

wtw (z zał. ind.) istnieje takie  $i < \omega$ , że nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models \psi_i[v]$

wtw nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models \bigwedge_{n < \omega} \psi_n[v]$ . □

Wynika z tego, że w przypadku  $L_{\omega_1, \omega}$  zbiór tautologii pokrywa się ze zbiorem tautologii superwaluacyjnych:

**TWIERDZENIE 7.13.**

Dla każdej formuły  $\varphi \in \text{FOR}_{L_{\omega_1, \omega}}$

$$\models \varphi \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \models_s \varphi.$$

**DOWÓD:** Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że  $\models \varphi$ , ale nie jest tak, że  $\models_s \varphi$ . Wynika z tego, że istnieje taki model częściowy  $\mathfrak{M}_c = \langle E, I_c, p_1, p_2 \rangle$  i wartościowanie  $v$ , że nie jest tak, że  $\mathfrak{M}_c \models_s \varphi[v]$ . Wobec tego istnieje  $\mathfrak{M}'_c = \langle E, I'_c, p'_1, p'_2 \rangle$ , totalne rozszerzenie  $\mathfrak{M}_c$ , takie że nie jest tak, że  $\mathfrak{M}'_c \models \varphi[v]$ . Ze względu na to, że  $\mathfrak{M}'_c$  jest totalnym modelem,  $\mathfrak{M}'_c \not\models \varphi[v]$ .<sup>5</sup> Skonstruujmy model standardowy  $\mathfrak{M} = \langle E, I \rangle$  taki, że dla każdego symbolu  $\zeta \in L_{\omega_1, \omega}$ , dla którego funkcja  $p'_1$  jest zdefiniowana,  $I(\zeta) = p'_1(\zeta)$ . Zgodnie z twierdzeniem 7.12., nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models \varphi[v]$ , co jest sprzeczne z założeniem.

<sup>4</sup>W dowodzie tego twierdzenia, a także następnych, których dowód opiera się na indukcji ze względu na złożoność formuł, korzystamy z twierdzenia o indukcji pozaskończonej.

<sup>5</sup>Argumentacja za tym, że w przypadku  $L_{\omega_1, \omega}$  niespełnianie w modelu totalnym równoważne jest odrzucaniu, opiera się na indukcji ze względu na złożoność formuł.



W drugą stronę założymy, że  $\models_s \varphi$ , ale nie jest tak, że  $\models \varphi$ . Istnieje wobec tego model standardowy dla  $L_{\omega_1\omega}$ ,  $\mathfrak{M} = \langle E, I \rangle$  i wartościowanie  $\nu$ , takie że nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models \varphi[\nu]$ . Skonstruujmy totalny model częściowy  $\mathfrak{M}_c = \langle E, I_c, p_1, p_2 \rangle$  taki, że dla każdego symbolu  $\zeta \in L_{\omega_1\omega}$ , dla którego funkcja  $I$  jest zdefiniowana,  $p_1(\zeta) = I(\zeta)$ . Zgodnie z twierdzeniem 7.12.,  $\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[\nu]$ .  $\mathfrak{M}$  jest modelem częściowym i jako model totalny jest swoim jedynym totalnym rozszerzeniem, czyli  $\mathfrak{M}_c \not\models_s \varphi[\nu]$ , co jest sprzeczne z tym, że  $\models_s \varphi$ , gdyż nie jest tak, że model równocześnie spełnia i odrzuca superwaluacyjnie jakąś formułę.  $\square$

Twierdzenie to pozwala nam mieć nadzieję na zbudowanie teorii TW (teorii większości), w której zdefiniujemy kryterium prawdy przez zgodę większości na bazie aksjomatyki dla  $L_{\omega_1\omega}$ , o ile uda nam się zdefiniować kwantyfikator większości w tym języku. Doświadczenie z rozdziału 4.3. pozwala nam się domyślać, że zdefiniowanie w języku  $L_{\omega_1\omega}$  kwantyfikatora większości i zinterpretowanie go w modelach częściowych nie da zadowalających rezultatów (por. także uwagi na stronie 120). Wzorem rozdziału 6. ograniczymy rozważania do modeli semiczęściowych dla języka  $L_{\omega_1\omega}^{**}$ , który powstaje z  $L_{\omega_1\omega}$  poprzez przyjęcie trzech typów wyróżnionych symboli predykatywnych. W języku tym zdefiniujemy kwantyfikator, który nazwiemy *kwantyfikatorem pseudowiększości*  $\mathbb{W}$ . W modelach semiczęściowych dla  $L_{\omega_1\omega}^{**}$ , w których predykaty  $B_1, B_2, \dots$ , czyli predykaty wyróżnione typu II znane z poprzednich rozdziałów, interpretowane są w taki sposób, że  $p_1(B_i)$  (dla każdego  $i < \omega$ ) ma moc nieparzystą, kwantyfikator ten zachowywał się będzie mniej więcej<sup>6</sup> tak, jak kwantyfikator większości  $M^2$ . Stąd w teorii TW przyjmiemy założenie, które oznaczać będziemy skrótowo NIEP, że predykaty  $B_1, B_2, \dots$  interpretowane są przez pary zbiorów, z których pierwszy ma moc nieparzystą.

## 7.2. MODELE SEMICZĘŚCIOWE DLA $L_{\omega_1\omega}^{**}$

DEFINICJA 7.14. (język  $L_{\omega_1\omega}^{**}$ )

Język  $L_{\omega_1\omega}^{**}$  składa się z następujących wyrażeń:

1. Symbole logiczne: jak w definicji 7.1. na stronie 108.
2. Symbole pozalogiczne:
  - (a) dla każdego  $n = 1, 2, \dots$  zbiór (niekoniecznie niepusty)  $n$ -argumentowych symboli relacyjnych  $P^n$ ; dowolne elementy tych zbiorów oznaczamy za pomocą symboli  $P, R, S, P_1, P_2, \dots$ ;
  - (b) zbiór wyróżnionych symboli predykatywnych typu I:  $A_1, A_2, \dots$ ;
  - (c) zbiór wyróżnionych symboli predykatywnych typu II:  $B_1, B_2, \dots$ ;
  - (d) pojedynczy wyróżniony symbol predykatywny  $L$ , nazywamy go wyróżnionym symbolem predykatywnym typu III.
3. Nawiasy:  $(, )$ .  $\square$

<sup>6</sup>„Mniej więcej” oznacza, że musimy przyjąć dodatkowe ograniczenia dla budowania formuł za pomocą kwantyfikatora  $M^2$ , analogiczne do tych, jakie przyjmiemy w definicji kwantyfikatora  $\mathbb{W}$  (definicja 7.15. na następnej stronie).

Zasady tworzenia formuł, definicje formuły atomowej, zmiennych wolnych, zdania, implikacji, kwantyfikatora egzystencjalnego i nieskończonej alternatywy pozostają takie same jak w przypadku  $L_{\omega_1\omega}$ .

W języku  $L_{\omega_1\omega}^{**}$  zdefiniujemy kwantyfikator pseudowiększości  $W$ . Niech

$$\Gamma_n(B_i) := \exists x_1 \dots \exists x_n ((B_i(x_1) \wedge \dots \wedge B_i(x_n) \wedge (i \neq j \rightarrow x_i \neq x_j)) \\ \wedge \forall z (B_i(z) \rightarrow (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_n)))$$

$\Gamma_n(B_i)$  reprezentuje zdanie mówiące, że istnieje dokładnie  $n$  elementów spełniających  $B_i(x)$ ;

$$\Psi_m(B_i, \psi) := \exists y_1 \dots \exists y_m (B_i(y_1) \wedge \dots \wedge B_i(y_m) \wedge \psi(y_1) \wedge \dots \wedge \psi(y_m) \wedge (i \neq j \rightarrow y_i \neq y_j)),$$

$\Psi_m(B_i, \psi)$  reprezentuje zdanie mówiące, że istnieje co najmniej  $m$  elementów spełniających  $B_i(y) \wedge \psi(y)$ . Za pomocą tych zdań zdefiniujemy kwantyfikator pseudowiększości  $W$ :

DEFINICJA 7.15. (kwantyfikator pseudowiększości  $W$ )

Jeżeli  $B_i$  jest wyróżnionym predykatem typu II, a  $\psi$  jest dowolną formułą z jedną zmienną wolną, to

$$Wxy(B_i(x), \psi(y)) \stackrel{\text{df}}{=} \bigwedge_{n < \omega} (\Gamma_{2n+1}(B_i) \wedge \Psi_{n+1}(B_i, \psi)). \quad \square$$

Model semiczęściowy dla  $L_{\omega_1\omega}^{**}$  różni się od modelu semiczęściowego dla  $L^{**}(M^2)$  zdefiniowanego na stronie 102 (definicja 6.3.) jedynie tym, że pomijamy w jego definicji punkty dotyczące kwantyfikatora  $M^2$  i  $\exists$ . Poza tym model semiczęściowy jest modelem częściowym, a spełnianie formuł zbudowanych za pomocą predykatów wyróżnionych niczym nie różni się od spełniania innych formuł, więc definicja spełniania w modelu częściowym dla  $L_{\omega_1\omega}$  jest też definicją spełniania w modelu semiczęściowym dla  $L_{\omega_1\omega}^{**}$ . Rozszerzymy teraz definicję funkcji interpretującej wzorem praktyki przyjętej w poprzednich rozdziałach:

DEFINICJA 7.16. (funkcja  $I_{sc}$  dla wybranych formuł złożonych języka  $L_{\omega_1\omega}^{**}$ )

1. Jeżeli  $\varphi$  jest formułą z jedną zmienną wolną nie zawierającą kwantyfikatorów, to  $p_1(\varphi)$  i  $p_2(\varphi)$  przyjmują następujące wartości:

(•) Punkty 1(a), (b), (c) i (d) jak w definicji 4.11. na stronie 60

(e) jeżeli  $\varphi = \bigwedge_{n < \omega} \psi_n$ , gdzie  $\psi_i$  dla  $i < \omega$  są formułami z jedną, tą samą zmienną wolną, to

$$p_1(\varphi) = \bigcap_{n < \omega} p_1(\psi_n), \quad p_2(\varphi) = \bigcup_{n < \omega} p_2(\psi_n).$$

2. Jak w definicji 4.11. na stronie 60.

3.  $p_1(W) = \{(X, Y) \in \wp(E) \times \wp(E) : |X| = 2k+1, \text{ gdzie } k < \omega \text{ i } |X \cap Y| > |X \setminus Y|\}$   
 $p_2(W) = \{(X, Y) \in \wp(E) \times \wp(E) : |X| \geq \omega \text{ lub } |X| = 2k, \text{ gdzie } k < \omega$   
 lub  $|X| = 2k+1, \text{ gdzie } k < \omega \text{ i } |X \cap Y| > |X \setminus Y|\}$ .

We wszystkich tych przypadkach  $I_{sc}(\varphi) = \langle p_1(\varphi), p_2(\varphi) \rangle$ . □

TWIERDZENIE 7.17.

1. Gdy  $\varphi(x)$  jest formułą z jedną zmienną wolną, nie zawierającą kwantyfikatorów, to dla dowolnego modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$  dla  $L_{\omega, \omega}^{**}$  i dowolnego wartościowania  $v$ :

$$\mathfrak{M}_{sc} \models \varphi(x)[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad v(x) \in p_1(\varphi)$$

oraz

$$\mathfrak{M}_{sc} \not\models \varphi(x)[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad v(x) \in p_2(\varphi).$$

2. Gdy  $\varphi(x_2, \dots, x_n)$  jest formułą z  $n-1$  zmiennymi wolnymi, składającą się z kwantyfikatora  $\forall$ , zmiennej i formuły atomowej, to

$$\mathfrak{M}_{sc} \models \varphi(x_2, \dots, x_n)[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \langle v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_1(\varphi)$$

oraz

$$\mathfrak{M}_{sc} \not\models \varphi(x_2, \dots, x_n)[v] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \langle v(x_2), \dots, v(x_n) \rangle \in p_2(\varphi).$$

3.  $\mathfrak{M}_{sc} \models \forall xy (B_i(x), \varphi(y))[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle \{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x)[v_x^a]\}, \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \varphi(y)[v_y^b]\} \rangle \in p_1(W)$$

(wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x)[v_x^a]\}| = 2k+1, \text{ gdzie } k < \omega$$

$$\text{ i } |\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x)[v_x^a]\} \cap \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \varphi(y)[v_y^b]\}|$$

$$> |\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x)[v_x^a]\} \setminus \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \varphi(y)[v_y^b]\}|);$$

$\mathfrak{M}_{sc} \not\models \forall xy (B_i(x), \varphi(y))[v]$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle \{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x)[v_x^a]\}, \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \not\models \varphi(y)[v_y^b]\} \rangle \in p_2(W)$$

(wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x)[v_x^a]\}| \geq \omega \text{ lub } |\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x)[v_x^a]\}| = 2k, \text{ gdzie } k < \omega$$

$$\text{ lub } |\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x)[v_x^a]\}| = 2k+1, \text{ gdzie } k < \omega$$

$$\text{ i } |\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x)[v_x^a]\} \cap \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \not\models \varphi(y)[v_y^b]\}|$$

$$> |\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x)[v_x^a]\} \setminus \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \not\models \varphi(y)[v_y^b]\}|).$$

DOWÓD:

1. Punkty 1.(a)–(c) jak w dowodzie twierdzenia 4.12. na stronie 61.

(d)  $\psi_1, \psi_2, \dots$  są formułami z jedną, tą samą, zmienną wolną  $x$ , a  $\varphi(x) = \bigwedge_{n < \omega} \psi_n(x)$ :

$\mathfrak{M}_{sc} \models \varphi(x)[v]$  wtw dla każdego  $i < \omega$   $\mathfrak{M}_{sc} \models \psi_i(x)[v]$  wtw dla każdego  $i < \omega$   $v(x) \in p_1(\psi_i)$

wtw  $v(x) \in \bigcap_{n < \omega} p_1(\psi_n)$  wtw  $v(x) \in p_1(\varphi)$ ;

$\mathfrak{M}_{sc} \not\models \varphi(x)[v]$  wtw istnieje takie  $i < \omega$ , że  $\mathfrak{M}_{sc} \not\models \psi_i(x)[v]$

wtw istnieje takie  $i < \omega$ , że  $v(x) \in p_2(\psi_i)$  wtw  $v(x) \in \bigcup_{n < \omega} p_2(\psi_n)$  wtw  $v(x) \in p_2(\varphi)$ .

2. Dokładnie tak, jak w dowodzie twierdzenia 4.12. na stronie 61 (punkt 2.(a)).

3.  $\mathfrak{M}_{sc} \models \forall xy (B_i(x), \varphi(y))[v]$

wtw  $\mathfrak{M}_{sc} \models \bigwedge_{n < \omega} (\exists x_1 \dots \exists x_{2n+1} ((B_i(x_1) \wedge \dots \wedge B_i(x_{2n+1})) \wedge (i \neq j \rightarrow x_i \neq x_j)))$

- $\wedge \forall z (B_i(z) \rightarrow (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_{2n+1}))$   
 $\wedge \exists y_1 \dots \exists y_{n+1} (B_i(y_1) \wedge \dots \wedge B_i(y_{n+1}) \wedge \varphi(y_1) \wedge \dots \wedge \varphi(y_{n+1}) \wedge (i \neq j \rightarrow y_i \neq y_j)) [v]$   
 wtw istnieje takie  $k < \omega$ , że  
 $\mathfrak{M}_{sc} \models \exists x_1 \dots \exists x_{2k+1} ((B_i(x_1) \wedge \dots \wedge B_i(x_{2k+1}) \wedge (i \neq j \rightarrow x_i \neq x_j))$   
 $\wedge \forall z (B_i(z) \rightarrow (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_{2k+1})))$   
 $\wedge \exists y_1 \dots \exists y_{k+1} (B_i(y_1) \wedge \dots \wedge B_i(y_{k+1}) \wedge \varphi(y_1) \wedge \dots \wedge \varphi(y_{k+1}) \wedge (i \neq j \rightarrow y_i \neq y_j)) [v]$   
 wtw istnieje takie  $k < \omega$ , że  
 $\{a_1 \in E : \{a_2 \in E : \dots \{a_{2k+1} \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models ((B_i(x_1) \wedge \dots \wedge B_i(x_{2k+1}) \wedge (i \neq j \rightarrow x_i \neq x_j))$   
 $\wedge \forall z (B_i(z) \rightarrow (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_{2k+1}))) [v(\frac{a_1}{x_1} \dots \frac{a_{2k+1}}{x_{2k+1}})] \neq \emptyset \dots \neq \emptyset \neq \emptyset$   
 $i \{b_1 \in E : \{b_2 \in E : \dots \{b_{k+1} \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models (B_i(y_1) \wedge \dots \wedge B_i(y_{k+1}) \wedge \varphi(y_1) \wedge \dots \wedge \varphi(y_{k+1}))$   
 $\wedge (i \neq j \rightarrow y_i \neq y_j) [v(\frac{b_1}{y_1} \dots \frac{b_{k+1}}{y_{k+1}})] \neq \emptyset \dots \neq \emptyset \neq \emptyset$   
 wtw istnieje takie  $k < \omega$ , że  
 $\{a_1 \in E : a_1 \in p_1(B_i), a_1 \neq a_i \text{ dla } i = 2, \dots, 2k+1 \text{ i } \dots$   
 $\dots \{a_{2k+1} \in E : a_{2k+1} \in p_1(B_i) \text{ i } a_{2k+1} \neq a_i \text{ dla } i = 1, \dots, 2k \text{ i}$   
 $\mathfrak{M}_{sc} \models \forall z (B_i(z) \rightarrow (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_{2k+1})) [v(\frac{a_1}{x_1} \dots \frac{a_{2k+1}}{x_{2k+1}})] \neq \emptyset \dots \neq \emptyset$   
 $i \{b_1 \in E : b_1 \neq b_i \text{ dla } i = 2, \dots, k+1 \text{ i } \mathfrak{M}_{sc} \models (B_i(y_1) \wedge \varphi(y_1)) [v(\frac{b_1}{y_1} \dots \frac{b_{k+1}}{y_{k+1}})] \text{ i } \dots$   
 $\dots \{b_{k+1} \in E : b_{k+1} \neq b_i \text{ dla } i = 1, \dots, k$   
 $\text{ i } \mathfrak{M}_{sc} \models (B_i(y_{k+1}) \wedge \varphi(y_{k+1})) [v(\frac{b_1}{y_1} \dots \frac{b_{k+1}}{y_{k+1}})] \neq \emptyset \dots \neq \emptyset$   
 wtw istnieje takie  $k < \omega$ , że  
 $\{a_1 \in E : a_1 \in p_1(B_i), a_1 \neq a_i \text{ dla } i = 2, \dots, 2k+1 \text{ i } \dots$   
 $\dots \{a_{2k+1} \in E : a_{2k+1} \in p_1(B_i) \text{ i } a_{2k+1} \neq a_i \text{ dla } i = 1, \dots, 2k \text{ i}$   
 $\{d \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models (\neg B_i(z) \vee (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_{2k+1})) [v(\frac{a_1}{x_1} \dots \frac{a_{2k+1}}{x_{2k+1}} \frac{d}{z})] = E \neq \emptyset \dots \neq \emptyset$   
 $i |\{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models (B_i(y) \wedge \varphi(y)) [v(\frac{b}{y})]\}| \geq k+1$   
 wtw istnieje takie  $k < \omega$ , że  
 $\{a_1 \in E : a_1 \in p_1(B_i), a_1 \neq a_i \text{ dla } i = 2, \dots, 2k+1 \text{ i } \dots$   
 $\dots \{a_{2k+1} \in E : a_{2k+1} \in p_1(B_i) \text{ i } a_{2k+1} \neq a_i \text{ dla } i = 1, \dots, 2k \text{ i}$   
 $\{d \in E : d \in p_2(B_i) \text{ lub } d = a_1 \text{ lub } \dots \text{ lub } d = a_{2k+1}\} = E \neq \emptyset \dots \neq \emptyset$   
 $i |\{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models (B_i(y) \wedge \varphi(y)) [v(\frac{b}{y})]\}| \geq k+1$   
 wtw istnieje takie  $k < \omega$ , że  
 $|\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x) [v(\frac{a}{x})]\}| = 2k+1$   
 $i |\{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models (B_i(y) \wedge \varphi(y)) [v(\frac{b}{y})]\}| \geq k+1$   
 wtw  $|\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x) [v(\frac{a}{x})]\}| = 2k+1$ , gdzie  $k < \omega$   
 $i |\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x) [v(\frac{a}{x})]\} \cap \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \varphi(y) [v(\frac{b}{y})]\}|$   
 $> |\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x) [v(\frac{a}{x})]\} \setminus \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \varphi(y) [v(\frac{b}{y})]\}|$   
 wtw  $\{\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x) [v(\frac{a}{x})]\}, \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \varphi(y) [v(\frac{b}{y})]\}\} \in p_1(W)$
- $\mathfrak{M}_{sc} \not\models \forall xy (B_i(x), \varphi(y)) [v]$   
 wtw  $\mathfrak{M}_{sc} \not\models \bigwedge_{n < \omega} (\exists x_1 \dots \exists x_{2n+1} ((B_i(x_1) \wedge \dots \wedge B_i(x_{2n+1}) \wedge (i \neq j \rightarrow x_i \neq x_j))$   
 $\wedge \forall z (B_i(z) \rightarrow (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_{2n+1})))$   
 $\wedge \exists y_1 \dots \exists y_{n+1} (B_i(y_1) \wedge \dots \wedge B_i(y_{n+1}) \wedge \varphi(y_1) \wedge \dots \wedge \varphi(y_{n+1}) \wedge (i \neq j \rightarrow y_i \neq y_j)) [v]$   
 wtw dla każdego  $k < \omega$   
 $\mathfrak{M}_{sc} \not\models \exists x_1 \dots \exists x_{2k+1} ((B_i(x_1) \wedge \dots \wedge B_i(x_{2k+1}) \wedge (i \neq j \rightarrow x_i \neq x_j))$   
 $\wedge \forall z (B_i(z) \rightarrow (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_{2k+1})))$   
 $\wedge \exists y_1 \dots \exists y_{k+1} (B_i(y_1) \wedge \dots \wedge B_i(y_{k+1}) \wedge \varphi(y_1) \wedge \dots \wedge \varphi(y_{k+1}) \wedge (i \neq j \rightarrow y_i \neq y_j)) [v]$

wtw dla każdego  $k < \omega$

$$\{a_1 \in E : \dots \{a_{2k+1} \in E : \mathfrak{M}_{sc} \not\models ((B_i(x_1) \wedge \dots \wedge B_i(x_{2k+1})) \wedge (i \neq j \rightarrow x_i \neq x_j)) \wedge \forall z (B_i(z) \rightarrow (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_{2k+1})) [v(\frac{a_1}{x_1} \dots \frac{a_{2k+1}}{x_{2k+1}})])\} = E \dots\} = E$$

$$\text{lub } \{b_1 \in E : \dots \{b_{k+1} \in E : \mathfrak{M}_{sc} \not\models (B_i(y_1) \wedge \dots \wedge B_i(y_{k+1})) \wedge \varphi(y_1) \wedge \dots \wedge \varphi(y_{k+1}) \wedge (i \neq j \rightarrow y_i \neq y_j)) [v(\frac{b_1}{y_1} \dots \frac{b_{k+1}}{y_{k+1}})])\} = E \dots\} = E$$

wtw dla każdego  $k < \omega$

$$\{a_1 \in E : a_1 \in p_2(B_i) \text{ lub } a_1 = a_2 \text{ lub } \dots \text{ lub } a_1 = a_{2k+1} \text{ lub } \dots \{a_{2k+1} \in E : a_{2k+1} \in p_2(B_i) \text{ lub } a_{2k+1} = a_1 \text{ lub } \dots \text{ lub } a_{2k+1} = a_{2k}\}$$

$$\text{lub } \{d \in E : d \in p_1(B_i) \text{ i } d \neq a_1, \dots, d \neq a_{2k+1}\} \neq \emptyset\} = E \dots\} = E$$

$$\text{lub } \{b_1 \in E : \mathfrak{M}_{sc} \not\models (B_i(y_1) \wedge \varphi(y_1)) [v(\frac{b_1}{y_1} \dots \frac{b_{k+1}}{y_{k+1}})] \text{ lub } b_1 = b_2 \text{ lub } \dots \text{ lub } b_1 = b_{k+1} \text{ lub } \dots$$

$$\dots \{b_{k+1} \in E : \mathfrak{M}_{sc} \not\models (B_i(y_{k+1}) \wedge \varphi(y_{k+1})) [v(\frac{b_1}{y_1} \dots \frac{b_{k+1}}{y_{k+1}})] \text{ lub } b_{k+1} = b_1 \text{ lub } \dots \text{ lub } b_{k+1} = b_k\} = E \dots\} = E$$

wtw dla każdego  $k < \omega$

$$|\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x) [v(\frac{a}{x})]\}| \leq 2k \text{ lub } |\{d \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(z) [v(\frac{d}{z})]\}| > 2k + 1$$

$$\text{lub } |E \setminus \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \not\models (B_i(y) \wedge \varphi(y)) [v(\frac{b}{y})]\}| \leq k$$

wtw dla każdego  $k < \omega$

$$|\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x) [v(\frac{a}{x})]\}| \leq 2k \text{ lub } |\{d \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(z) [v(\frac{d}{z})]\}| > 2k + 1$$

$$\text{lub } |\{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(y) [v(\frac{b}{y})]\} \text{ i } \mathfrak{M}_{sc} \not\models \varphi(y) [v(\frac{b}{y})]\}| \geq k + 1$$

wtw  $|\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x) [v(\frac{a}{x})]\}| = 2k$ , gdzie  $k < \omega$

$$\text{lub } |\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x) [v(\frac{a}{x})]\}| > \omega$$

$$\text{lub } |\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x) [v(\frac{a}{x})]\}| = 2k + 1, \text{ gdzie } k < \omega$$

$$\text{i } |\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x) [v(\frac{a}{x})]\} \cap \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \not\models \varphi(y) [v(\frac{b}{y})]\}|$$

$$> |\{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x) [v(\frac{a}{x})]\} \setminus \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \not\models \varphi(y) [v(\frac{b}{y})]\}|$$

$$\text{wtw } \langle \{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models B_i(x) [v(\frac{a}{x})]\}, \{b \in E : \mathfrak{M}_{sc} \not\models \varphi(y) [v(\frac{b}{y})]\} \rangle \in p_2(W). \quad \square$$

Z twierdzenia powyższego wynika między innymi, że nie otrzymamy tu odpowiednika faktu 5.12. ze strony 86, czyli nie jest tak, że dla dowolnego modelu semiczęściowego  $\mathfrak{M}_{sc}$  i dowolnego wartościowania  $v$ :

$$\mathfrak{M}_{sc} \models \neg W_{xy}(B_i(x), \varphi(y)) [v] \text{ wtw } \mathfrak{M}_{sc} \models W_{xy}(B_i(x), \neg \varphi(y)) [v],$$

ani też nie obowiązuje to prawo dla  $\not\models$  – kwantyfikator  $W$  nie jest samodualny.<sup>7</sup>

### 7.3. DEFINICJA KRYTERIUM PRAWDY PRZEZ ZGODĘ WIĘKSZOŚCI W MODELU SEMICZĘŚCIOWYM DLA $L_{\omega_1}^{**}$ ZE SPEŁNIANIEM SUPERWALUACYJNYM, PRZY ZAŁOŻENIU NIEP

Za pomocą spełniania superwaluacyjnego zdefiniujemy kryterium prawdy przez zgodę większości przy założeniu, że rozważane populacje mają nieparzystą liczbę osób:

DEFINICJA 7.18. (kryterium prawdy przez zgodę większości IV)

Żałómy, że rozważane populacje mają nieparzystą liczbę osób. Niech  $B_1$  będzie wyróżnionym predykatem typu II, zinterpretowanym w taki sposób, że  $p_1(B_1)$  to zbiór, do którego należą członkowie wyróżnionej populacji (i tylko oni), a  $\varphi(x) = T(U(\alpha, x))$ :

<sup>7</sup>Będzie samodualny, gdy założymy NIEP.

Zdanie  $\alpha$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \models_s Wxx(B_1(x), \varphi(x));$$

Zdanie  $\alpha$  jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s Wxx(B_1(x), \varphi(x)). \quad \square$$

W szczególności w przypadku zdań atomowych definicja ta przybierze następującą postać:

Zdanie  $p_1$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \models_s Wxx(B_3(x), A_1(x)).$$

Zdanie  $p_1$  jest fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s Wxx(B_3(x), A_1(x)).$$

Język  $L^{**}(M^2)$  z rozdziału 6. zdefiniowaliśmy w taki sposób, że posiada on te same symbole pozalogiczne co język  $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ . Możemy wobec tego porównać spełnianie zdań mówiących o uznawaniu przez większość przez modele semiczęściowe dla  $L^{**}(M^2)$  i  $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ . Okazuje się, że przy założeniu NIEP, istnieje tu odpowiedniość, którą wyrazimy za pomocą następującego twierdzenia:

#### TWIERDZENIE 7.19.

Założmy NIEP. Niech  $\mathfrak{N}_{sc} = \langle E^{\mathfrak{N}}, I_{sc}^{\mathfrak{N}}, p_1^{\mathfrak{N}}, p_2^{\mathfrak{N}} \rangle$  będzie modelem semiczęściowym dla języka  $L^{**}(M^2)$ , a  $\mathfrak{M}_{sc} = \langle E^{\mathfrak{M}}, I_{sc}^{\mathfrak{M}}, p_1^{\mathfrak{M}}, p_2^{\mathfrak{M}} \rangle$  będzie modelem semiczęściowym dla języka  $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ , takim, że  $p_1^{\mathfrak{M}}(B_i) = p_1^{\mathfrak{N}}(B_i)$  oraz  $p_1^{\mathfrak{M}}(B_i) \cap p_1^{\mathfrak{M}}(\varphi) = p_1^{\mathfrak{N}}(B_i) \cap p_1^{\mathfrak{N}}(\varphi)$ ,  $p_1^{\mathfrak{M}}(B_i) \cap p_2^{\mathfrak{M}}(\varphi) = p_1^{\mathfrak{N}}(B_i) \cap p_2^{\mathfrak{N}}(\varphi)$ . Dla formuły  $\varphi(x) \in \text{FOR}_{L^{**}(M^2)} \cap \text{FOR}_{L_{\omega_1, \omega}^{**}}$ , która jest zbudowana jedynie za pomocą wyróżnionych symboli predykatywnych  $A_1, A_2, \dots$  i funktorów zdaniowych  $\wedge, \vee, \neg$  następujące warunki są parami równoważne:

$$(i) \quad \mathfrak{N}_{sc} \models_s M^2xx(B_i(x), \varphi(x)) \quad \text{ i } \quad (ii) \quad \mathfrak{M}_{sc} \models_s Wxx(B_i(x), \varphi(x))$$

oraz

$$(iii) \quad \mathfrak{N}_{sc} \not\models_s M^2xx(B_i(x), \varphi(x)) \quad \text{ i } \quad (iv) \quad \mathfrak{M}_{sc} \not\models_s Wxx(B_i(x), \varphi(x)).$$

DOWÓD:

1. (a) Jeżeli (i), to (ii)

$\mathfrak{N}_{sc} \models_s M^2xx(B_i(x), \varphi(x))$  wtw dla każdego modelu  $\mathfrak{N}'_c$ , który jest uzupełnieniem modelu  $\mathfrak{N}_{sc}$ ,  $\mathfrak{N}'_c \models M^2xx(B_i(x), \varphi(x)) [v]$  wtw  $|p_1^{\mathfrak{N}'_c}(B_i) \cap p_1^{\mathfrak{N}'_c}(\varphi)| > |p_1^{\mathfrak{N}'_c}(B_i) \setminus p_1^{\mathfrak{N}'_c}(\varphi)|$ . Musimy pokazać, podobnie jak zrobiliśmy to w dowodzie twierdzenia 6.5., że każde spełnianie w uzupełnieniu modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$  wynika ze spełniania w jakimś uzupełnieniu modelu  $\mathfrak{N}_{sc}$ . Niech  $\mathfrak{M}''_c$  będzie dowolnym uzupełnieniem modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$ . W modelu semiczęściowym uzupełnienia funkcji interpretującej dotyczą jedynie wyróżnionych symboli predykatywnych typu I ( $A_1, A_2, \dots$ ), zdefiniujemy wobec tego funkcję  $I^{\mathfrak{M}''_c}$  w następujący sposób:  $p_1^{\mathfrak{M}''_c}(A_i) = p_1^{\mathfrak{M}_{sc}}(A_i) \cup p_1^{\mathfrak{N}'_c}(A_i)$ , a  $p_2^{\mathfrak{M}''_c}(A_i) = E^{\mathfrak{N}'_c} \setminus p_1^{\mathfrak{N}'_c}(A_i)$  dla  $i = 1, 2, \dots$ . Model  $\mathfrak{N}''_c$  jest uzupełnieniem modelu  $\mathfrak{N}_{sc}$ , więc zgodnie z założeniem  $\mathfrak{N}''_c \models M^2xx(B_i(x), \varphi(x)) [v]$ ,

a więc, skoro spełnianie tego zdania zależy jedynie od tego, co dzieje się wewnątrz  $p_1^{\mathfrak{M}''}(B_i)$  (które jest równe  $p_1^{\mathfrak{M}'}(B_i)$ ), a  $p_1^{\mathfrak{M}'}(B_i) \cap p_1^{\mathfrak{M}''}(\varphi) = p_1^{\mathfrak{M}''}(B_i) \cap p_1^{\mathfrak{M}'}(\varphi)$ , to  $|p_1^{\mathfrak{M}''}(B_i) \cap p_1^{\mathfrak{M}''}(\varphi)| > |p_1^{\mathfrak{M}''}(B_i) \setminus p_1^{\mathfrak{M}''}(\varphi)|$ . Ponieważ  $\mathfrak{M}''_c$  był dowolnym uzupełnieniem modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$ , a NIEP założyliśmy, możemy z tego wnioskować, że  $\mathfrak{M}_{sc} \models_s \forall x x (B_i(x), \varphi(x))$ .

1. (b) W drugą stronę dowód przebiega analogicznie.

2. (a) Jeżeli (iii), to (iv)

$\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s M^{2xx}(B_i(x), \varphi(x))$  wtw dla każdego modelu  $\mathfrak{M}'_c$ , który jest uzupełnieniem modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$ ,  $\mathfrak{M}'_c \not\models M^{2xx}(B_i(x), \varphi(x))$  wtw  $|p_1^{\mathfrak{M}'_c}(B_i) \cap p_2^{\mathfrak{M}'_c}(\varphi)| > |p_1^{\mathfrak{M}'_c}(B_i) \setminus p_2^{\mathfrak{M}'_c}(\varphi)|$ . Rozumowanie analogiczne do przeprowadzonego powyżej pokazuje, że każde odrzucanie w uzupełnieniu modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$  wynika z odrzucania w jakimś uzupełnieniu modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$ . W każdym takim uzupełnieniu  $\mathfrak{M}''_c$   $|p_1^{\mathfrak{M}''_c}(B_i) \cap p_2^{\mathfrak{M}''_c}(\varphi)| > |p_1^{\mathfrak{M}''_c}(B_i) \setminus p_2^{\mathfrak{M}''_c}(\varphi)|$ . Ponieważ  $\mathfrak{M}''_c$  był dowolnym uzupełnieniem modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$ , a NIEP założyliśmy, możemy z tego wnioskować, że  $\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s \forall x x (B_i(x), \varphi(x))$ .

2. (b) W drugą stronę dowód przebiega analogicznie. □

Po założeniu, że rozważamy jedynie populacje o nieparzystej liczbie członków, z twierdzenia powyższego oraz z wniosku 6.6. z twierdzenia 6.5. (strona 105) bezpośrednio wynika równoważność dotychczas sformułowanych definicji kryterium prawdy przez zgodę większości I, II, III i IV:

WNIOSEK 7.20.

Gdy założymy NIEP, to

1. (a) Zdanie  $\alpha$  jest prawdziwe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowanym w modelu częściowym dla  $L^*(M)$   
wtedy i tylko wtedy, gdy
- (b)  $\alpha$  jest prawdziwe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowanym w modelu semiczęściowym dla  $L^*(M^2)$   
wtedy i tylko wtedy, gdy
- (c)  $\alpha$  jest prawdziwe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowanym w modelu semiczęściowym dla  $L^{**}(M^2)$   
wtedy i tylko wtedy, gdy
- (d)  $\alpha$  jest prawdziwe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowanym w modelu semiczęściowym dla  $L_{\omega, \omega}^{**}$ .
2. (a') Zdanie  $\alpha$  jest fałszywe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowanym w modelu częściowym dla  $L^*(M)$   
wtedy i tylko wtedy, gdy
- (b')  $\alpha$  jest fałszywe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowanym w modelu semiczęściowym dla  $L^*(M^2)$   
wtedy i tylko wtedy, gdy
- (c')  $\alpha$  jest fałszywe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowanym w modelu semiczęściowym dla  $L^{**}(M^2)$   
wtedy i tylko wtedy, gdy

(d')  $\alpha$  jest fałszywe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowanym w modelu semiczęściowym dla  $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ .

DOWÓD: Równoważności (a) wtw (b) wtw (c) oraz (a') wtw (b') wtw (c') dowiedliśmy we wniosku 6.6. na stronie 105. (c) wtw (d) to następująca równoważność:

$\mathfrak{N}_{sc} \models_s M^2_{xx}(B_1(x), \varphi(x))$  wtw  $\mathfrak{M}_{sc} \models_s W_{xx}(B_1(x), \varphi(x))$

gdzie model  $\mathfrak{N}_{sc}$  jest modelem semiczęściowym dla  $L^{**}(M^2)$ , model  $\mathfrak{M}_{sc}$  jest modelem semiczęściowym dla  $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ ,  $\varphi(x) = T(U(\alpha, x))$ , a  $p_1^{\mathfrak{M}}(B_1) = p_1^{\mathfrak{N}}(B_1)$  to zbiór składający się z członków wyróżnionej populacji. Jest to dokładnie taka sytuacja jak w twierdzeniu 7.19. Dowód równoważności (c') z (d') przebiega analogicznie.  $\square$

Dlaczego musieliśmy założyć, że populacje mają nieparzystą liczbę osób? Czy nie moglibyśmy dopuścić dowolnych populacji o skończonej liczbie członków i odpowiednio użyć do definicji kwantyfikatora  $W$  zamiast formuł  $\Gamma_{2n+1}$  i  $\Psi_{n+1}$  ich wersji dla dowolnych liczb naturalnych:  $\Gamma_n$  i  $\Psi_{[\frac{n}{2}]+1}$ .<sup>8</sup> Okazuje się, że choć na przykład zdanie  $W_{xx}(B(x), \varphi(x))$  byłoby spełnione w modelu semiczęściowym  $\mathfrak{M}_{sc}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $|p_1(B_1)|$  byłaby skończona (obojętnie parzysta czy nieparzysta) i  $|p_1(B_1) \cap \{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \varphi(x)[v(\frac{a}{r})]\}| > |p_1(B_1) \setminus \{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \varphi(x)[v(\frac{a}{r})]\}|$  – czyli tak, jak byśmy sobie życzyli – to byłoby ono odrzucone przez model wtedy i tylko wtedy, gdy  $|p_1(B_1)|$  byłaby nieskończona lub skończona, ale  $|p_1(B_1) \cap \{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \varphi(x)[v(\frac{a}{r})]\}| \geq |p_1(B_1) \setminus \{a \in E : \mathfrak{M}_{sc} \models \varphi(x)[v(\frac{a}{r})]\}|$ . Ostrą nierówność w twierdzeniu 7.17. uzyskaliśmy korzystając z tego, że w definicji kwantyfikatora  $W$  użyliśmy formuł  $\Gamma_{2n+1}$  i  $\Psi_{n+1}$ , co sprawia, że ta definicja jest adekwatną definicją wtedy i tylko wtedy, gdy założymy, że wszystkie rozważane populacje mają nieparzystą liczbę członków. Za tym, że kwantyfikator zdefiniowany za pomocą nieostrej nierówności nie nadaje się do zdefiniowania kryterium prawdy przez zgodę większości, gdyż zaburzona zostaje równoważność fałszu i negacji prawdy, argumentowałam w rozdziale 4.3.2. na stronie 75. Tam rozważałam zmienienie interpretacji kwantyfikatora większości  $M$ , ale tutaj sytuacja wyglądałaby analogicznie (por. przykład 4.31. na stronie 75). Musimy wobec tego założyć nieparzystą moc zbiorów, które będą reprezentowały rozważane populacje.

Pokazaliśmy w twierdzeniu 7.13. na stronie 112, że formuły spełnione we wszystkich totalnych modelach częściowych dla  $L_{\omega_1, \omega}$ , przy wszystkich wartościowaniach, to dokładnie formuły spełnione we wszystkich standardowych modelach dla  $L_{\omega_1, \omega}$  przy wszystkich wartościowaniach. Czym właściwie różni się totalny model semiczęściowy dla  $L_{\omega_1, \omega}^{**}$  od totalnego modelu częściowego dla  $L_{\omega_1, \omega}$ , w którym predykaty wyróżnione z  $L_{\omega_1, \omega}^{**}$  występują, ale są traktowane jak każde inne predykaty? Totalne modele semiczęściowe dla  $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ , to takie totalne modele częściowe dla  $L_{\omega_1, \omega}$ , w których predykaty  $L$  i  $B_1, B_2, \dots$  otrzymały specjalne interpretacje. W przypadku  $A_1, A_2, \dots$  nie ma żadnej różnicy, gdyż warunki na nie nałożone znikają w modelach totalnych. Predykat  $L$  zawsze interpretowany jest przez parę zbiorów, z których pierwszy jest zbiorem skończonym, podobnie  $B_1, B_2, \dots$ . Dodatkowo  $p_1(B_i)$  muszą zawierać się w  $p_1(L)$  dla każdego  $i < \omega$ . W języku  $L_{\omega_1, \omega}$  tego typu ograniczenia dają się zapisać za pomocą zdań:

$$(\alpha) \bigwedge_{k < \omega} \bigvee_{n < \omega} \exists x_1 \dots \exists x_n ((B_k(x_1) \wedge \dots \wedge B_k(x_n) \wedge (i \neq j \rightarrow x_i \neq x_j)) \\ \wedge \forall z (B_k(z) \rightarrow (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_n))),$$

<sup>8</sup>[ $\frac{n}{2}$ ] oznacza część całkowitą z  $\frac{n}{2}$ .



$$(\beta) \bigvee_{n < \omega} \exists x_1 \dots \exists x_n ((L(x_1) \wedge \dots \wedge L(x_n) \wedge (i \neq j \rightarrow x_i \neq x_j)) \\ \wedge \forall z (L(z) \rightarrow (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_n))),$$

$$(\gamma) \bigwedge_{k < \omega} \forall x (B_k(x) \rightarrow L(x)).$$

Naszym celem jest zbudowanie teorii TW, z której aksjomatów dowieść będzie można wszystkich i tylko takich formuł, które są spełnione superwaluacyjnie we wszystkich modelach semiczęściowych dla  $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ , w których dodatkowo spełnione superwaluacyjnie jest NIEP. Zmienimy wobec tego warunek  $(\alpha)$  na warunek mocniejszy, wyrażający NIEP:

$$(\text{NIEP}) \bigwedge_{k < \omega} \bigvee_{n < \omega} \exists x_1 \dots \exists x_{2n+1} ((B_k(x_1) \wedge \dots \wedge B_k(x_{2n+1}) \wedge (i \neq j \rightarrow x_i \neq x_j)) \\ \wedge \forall z (B_k(z) \rightarrow (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_{2n+1}))).$$

Twierdzimy poniżej, że formuły spełnione superwaluacyjnie w dowolnych modelach semiczęściowych, w których spełnione jest NIEP, przy dowolnych wartościowaniach, to dokładnie formuły, które w  $L_{\omega_1, \omega}$  wynikają z  $\{(\text{NIEP}), (\beta), (\gamma)\}$ . Zakładamy tu, że język  $L_{\omega_1, \omega}$  zawiera wszystkie symbole wyróżnione z  $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ , choć nie mają one charakteru symboli wyróżnionych; inaczej mówiąc, są to języki o tym samym typie podobieństwa. Wynika z tego, że  $\text{FOR}_{L_{\omega_1, \omega}} = \text{FOR}_{L_{\omega_1, \omega}^{**}}$ .

**TWIERDZENIE 7.21.**

Dla każdej formuły  $\varphi \in \text{FOR}_{L_{\omega_1, \omega}^{**}}$ :

$\varphi$  jest spełniona superwaluacyjnie przez każde wartościowanie  $v$ , w każdym modelu semiczęściowym dla  $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ , w którym spełnione jest NIEP

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\{(\text{NIEP}), (\beta), (\gamma)\} \models \varphi.$$

**DOWÓD:** Oznaczmy lewą stronę tej równoważności przez  $(*)$ .

1. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że zachodzi  $(*)$  i nie jest tak, że  $\{(\text{NIEP}), (\beta), (\gamma)\} \models \varphi$ . Oznacza to, że istnieje taki model standardowy  $\mathfrak{M} = \langle E^{\mathfrak{M}}, I^{\mathfrak{M}} \rangle$  dla  $L_{\omega_1, \omega}$  i takie wartościowanie  $v$ , że  $\mathfrak{M} \models (\text{NIEP}) \wedge (\beta) \wedge (\gamma) [v]$ , ale nie jest tak, że  $\mathfrak{M} \models \varphi[v]$ . Skonstruujemy na bazie modelu  $\mathfrak{M}$  model  $\mathfrak{M}_{sc}$  dla  $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ . Niech  $E^{\mathfrak{M}} = E^{\mathfrak{M}}$ ,  $p_1^{\mathfrak{M}} = I^{\mathfrak{M}}$ , a  $p_2^{\mathfrak{M}}$  zdefiniowane jest w następujący sposób:

(a) Jeżeli  $R$  jest dowolnym  $n$ -argumentowym symbolem relacyjnym, to

$$p_2^{\mathfrak{M}}(R) = (E^{\mathfrak{M}})^n \setminus p_1^{\mathfrak{M}}(R);$$

(b)  $p_2^{\mathfrak{M}}(=) = (E^{\mathfrak{M}})^2 \setminus p_1^{\mathfrak{M}}(=)$ ;

(c)  $p_2^{\mathfrak{M}}(\forall) = \wp(E^{\mathfrak{M}}) \setminus \{\emptyset\}$ .

Definicja modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$  tak jak stoi, różni się od definicji totalnego modelu semiczęściowego dla  $L_{\omega_1, \omega}^{**}$  w punktach dotyczących predykatów wyróżnionych typu II i III, ale spełnienie tych warunków gwarantuje  $(\beta)$  i  $(\gamma)$ , które podobnie jak NIEP są spełnione w  $\mathfrak{M}_{sc}$ . Model  $\mathfrak{M}_{sc}$  jest więc semiczęściowym modelem dla  $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ , w którym spełnione jest NIEP i odrzucone jest  $\varphi$

przy wartościowaniu  $v$ . Jako model totalny jest on swoim jedynym uzupełnieniem, wobec czego  $\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s \varphi[v]$ , co jest sprzeczne z założeniem.

2. W drugą stronę założymy, że  $\{(NIEP), (\beta), (\gamma)\} \models \varphi$ , ale nie jest tak jak głosi (\*). Wobec tego istnieje taki model semiczęściowy dla  $L_{\omega_1\omega}^{**}$ , nazwijmy go  $\mathfrak{M}_{sc}$ , w którym spełnione jest NIEP i takie wartościowanie  $v$ , że nie jest tak, że  $\mathfrak{M}_{sc} \models_s \varphi[v]$ . Co za tym idzie, istnieje takie  $\mathfrak{M}'_c = \langle E^{\mathfrak{M}'}, I_c^{\mathfrak{M}'}, p_1^{\mathfrak{M}'}, p_2^{\mathfrak{M}'} \rangle$  – uzupełnienie  $\mathfrak{M}_{sc}$ , że nie jest tak, że  $\mathfrak{M}'_c \models \varphi[v]$ . Skonstruujmy model  $\mathfrak{N}$  przyjmując, że  $E^{\mathfrak{N}} = E^{\mathfrak{M}'}$ , a  $I^{\mathfrak{N}} = p_1^{\mathfrak{M}'}$ . Model taki spełnia wszystkie warunki bycia modelem standardowym dla  $L_{\omega_1\omega}$ . Ponieważ powstał na bazie modelu semiczęściowego dla  $L_{\omega_1\omega}^{**}$ , w którym NIEP,  $(\beta)$  i  $(\gamma)$  są spełnione – są także w nim spełnione. Nie jest natomiast spełnione  $\varphi$ , co przeczy założeniom.  $\square$

Posiadając taką wiedzę, możemy teraz przystąpić do skonstruowania teorii TW, z której aksjomatów chcemy wydedukować za pomocą reguł inferencyjnych obowiązujących dla  $L_{\omega_1\omega}$  wszystkie i tylko te formuły, które wynikają w  $L_{\omega_1\omega}$  z  $\{(NIEP), (\beta), (\gamma)\}$ .

## 7.4. TEORIA TW

### 7.4.1. Ujęcie syntaktyczne $L_{\omega_1\omega}$

Teoria TW powstaje poprzez dodanie trzech aksjomatów do aksjomatów dla  $L_{\omega_1\omega}$ . Przedstawię poniżej system aksjomatów dla logiki  $L_{\omega_1\omega}$ , który podaje Jerome H. Keisler. Drobne różnice w stosunku do sformułowania Keislera wynikają z tego, że język  $L_{\omega_1\omega}$ , który rozważamy, nie zawiera stałych indywidualnych ani symboli funkcyjnych. Wcześniej jednak zdefiniujemy za Keislerem dla każdej formuły  $\varphi \in \text{FOR}_{L_{\omega_1\omega}}$ , formułę  $\varphi\bar{\neg}$ , która będzie równoważna formule  $\neg\varphi$ :

DEFINICJA 7.22.  $(\varphi\bar{\neg})$

1. gdy  $\varphi$  jest formułą atomową, to  $\varphi\bar{\neg} = \neg\varphi$ ;
2.  $(\neg\varphi)\bar{\neg} = \varphi$ ;
3.  $(\bigwedge_{n < \omega} \varphi_n)\bar{\neg} = \bigvee_{n < \omega} \neg\varphi_n$ ;
4.  $(\bigvee_{n < \omega} \varphi_n)\bar{\neg} = \bigwedge_{n < \omega} \neg\varphi_n$ ;
5.  $(\forall x\varphi)\bar{\neg} = \exists x\neg\varphi$ ;
6.  $(\exists x\varphi)\bar{\neg} = \forall x\neg\varphi$ .<sup>9</sup>

$\square$

AKSJOMATY DLA  $L_{\omega_1\omega}$ :

Niech  $\varphi, \psi$  oraz  $\varphi_i$ , gdzie  $i < \omega$  będą dowolnymi formułami  $L_{\omega_1\omega}$ , a  $x$  i  $y$  dowolnymi zmiennymi.

(A1.) Każda tautologia rachunku zdań jest aksjomatem.

(A2.)  $(\neg\varphi) \rightarrow (\varphi\bar{\neg})$  i  $(\varphi\bar{\neg}) \rightarrow (\neg\varphi)$ .

<sup>9</sup>Keisler (1971, s. 11).

(A3.)  $\bigwedge_{n < \omega} \varphi_n \rightarrow \varphi_i$ , gdzie  $i < \omega$ .

(A4.)  $\forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)$ , gdzie  $\varphi(y)$  powstaje poprzez prawidłowe podstawienie zmiennej  $y$  za  $x$  w  $\varphi(x)$ .

(A5.)  $x = x$ .

(A6.)  $x = y \rightarrow y = x$ .

(A7.)  $\varphi(x) \wedge (y = x) \rightarrow \varphi(y)$ , gdzie  $\varphi(y)$  i  $y$  są tym czym w (A4).

REGUŁY INFERENCYJNE  $L_{\omega_1\omega}$ :

(R1.) *modus ponens* (MP)

(R2.)  $\frac{\psi \rightarrow \varphi(x)}{\psi \rightarrow \forall x \varphi(x)}$ , gdzie  $x$  nie ma wolnego wystąpienia w  $\psi$ .

(R3.)  $\frac{\psi \rightarrow \varphi_i \text{ dla wszystkich } \varphi_i, i < \omega}{\psi \rightarrow \bigwedge_{n < \omega} \varphi_n}$

DEFINICJA 7.23. (teza  $L_{\omega_1\omega}$ )

Zbiorem tez  $L_{\omega_1\omega}$  nazywamy najmniejszy zbiór formuł języka  $L_{\omega_1\omega}$ , który zawiera aksjomaty (A1.)–(A7.) i jest domknięty na reguły inferencji (R1.)–(R3.).

$\vdash_{L_{\omega_1\omega}} \varphi$  oznacza, że  $\varphi$  jest tezą  $L_{\omega_1\omega}$ . □

TWIERDZENIE 7.24. (twierdzenie o pełności (Karp 1964))

Jeżeli  $\varphi$  jest formułą  $L_{\omega_1\omega}$ , to

$\vdash_{L_{\omega_1\omega}} \varphi$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\models \varphi$ . □

#### 7.4.2. Teoria TW

Teoria TW, sformułowana w języku  $L_{\omega_1\omega}^{**}$ , powstaje poprzez dodanie trzech aksjomatów do aksjomatów logiki  $L_{\omega_1\omega}$ :

AKSJOMATY DLA TW:

(A.) (A1.)–(A7.) jak dla  $L_{\omega_1\omega}$ .

(A8.)  $\bigwedge_{n < \omega} \exists x_1 \dots \exists x_{2n+1} ((\mathbf{B}(x_1) \wedge \dots \wedge \mathbf{B}(x_{2n+1})) \wedge (i \neq j \rightarrow x_i \neq x_j))$   
 $\wedge \forall z (\mathbf{B}(z) \rightarrow (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_{2n+1})))$ ,

gdzie  $\mathbf{B}$  jest dowolnym wyróżnionym predykatem typu II, a  $x_i$  jest dowolną zmienną.

(A9.)  $\bigwedge_{n < \omega} \exists x_1 \dots \exists x_n ((L(x_1) \wedge \dots \wedge L(x_n)) \wedge (i \neq j \rightarrow x_i \neq x_j))$   
 $\wedge \forall z (L(z) \rightarrow (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_n))$ ,

gdzie  $L$  jest wyróżnionym predykatem typu III, a  $x_i$  jest dowolną zmienną.

(A10.)  $\forall x (\mathbf{B}(x) \rightarrow L(x))$ ,

gdzie  $\mathbf{B}$  jest wyróżnionym predykatem typu II,  $L$  jest wyróżnionym predykatem typu III, a  $x$  jest dowolną zmienną.

Choć aksjomaty (A8.) i (A10.) nie są pojedynczymi zdaniami tylko schematami przeliczalnej ilości zdań, to w języku  $L_{\omega_1\omega}^{**}$  możemy zapisać każdy z tych aksjomatów w postaci nieskończonej koniunkcji, czyli jednego zdania. Niech

$$\Phi_k := \bigwedge_{n < \omega} \exists x_1 \dots \exists x_{2n+1} ((B_k(x_1) \wedge \dots \wedge B_k(x_{2n+1}) \wedge (i \neq j \rightarrow x_i \neq x_j)) \wedge \forall z (B_k(z) \rightarrow (z = x_1 \vee \dots \vee z = x_{2n+1}))),$$

$$\Psi_k := \forall x (B_k(x) \rightarrow L(x)),$$

gdzie  $B_k$  jest wyróżnionym predykatem typu II,  $L$  wyróżnionym predykatem typu III, a  $k < \omega$ .

$$(A8.' ) = \bigwedge_{k < \omega} \Phi_k$$

$$(A10.' ) = \bigwedge_{k < \omega} \Psi_k$$

Możemy teraz przyjąć zdania (A8.' ) i (A10.' ) jako dodatkowe aksjomaty w miejsce schematycznych (A8.) i (A10.). Twierdzenie o pełności dla teorii TW jest teraz prostym wnioskiem z twierdzenia 7.24.

**TWIERDZENIE 7.25.** (twierdzenie o pełności dla teorii TW)

Dla każdej formuły  $\varphi \in \text{FOR}_{L_{\omega_1\omega}^{**}}$ :

$$\{(A8.' ), (A9.' ), (A10.' )\} \vdash_{L_{\omega_1\omega}} \varphi$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\{(A8.' ), (A9.' ), (A10.' )\} \models \varphi. \quad \square$$

Proste porównanie pokazuje nam, że (A8.' ) = (NIEP), (A9.' ) = ( $\beta$ ), (A10.' ) = ( $\gamma$ ) ze strony 120. Z twierdzenia powyższego oraz twierdzenia 7.21. ze strony 121 wynika wobec tego następujący wniosek:

**WNIOSEK 7.26.**

Dla każdej formuły  $\varphi \in \text{FOR}_{L_{\omega_1\omega}^{**}}$ :

$\varphi$  jest spełniona superwaluacyjnie przez każde wartościowanie  $v$ , we wszystkich modelach semiczęściowych dla  $L_{\omega_1\omega}^{**}$ , w których spełnione jest NIEP

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\{(A8.' ), (A9.' ), (A10.' )\} \vdash_{L_{\omega_1\omega}} \varphi. \quad \square$$

Wniosek ten wyraża adekwatność teorii TW w stosunku do jej zamierzonych modeli.

## 7.5. TEORIA TW DLA MODELI SKOŃCZONYCH

Skoro udało się nam zdefiniować w języku  $L_{\omega_1\omega}^{**}$  klasę modeli, w których predykaty  $B_1, B_2, \dots$  interpretowane są przez pary zbiorów, z których pierwszy element ma moc nieparzystą, to w podobny sposób moglibyśmy oczywiście zdefiniować klasę modeli skończonych. Nie na wiele by się to jednak przydało w przypadku kwantyfikatora większości typu  $\langle 1, 1 \rangle$ , a właśnie ten kwantyfikator uznaliśmy za bardziej adekwatny jako podstawę definicji kryterium prawdy przez zgodę większości. Wynika to stąd, że w przypadku kwantyfikatorów binarnych spełniających KONS i EKST, a takim jest binarny kwantyfikator większości, to ich pierwszy argument, zbiór kontekstowy, odpowiada relatywizacji do populacji. Ograniczenie rozważań do modeli skończonych (FIN) byłoby ani nie konieczne, ani nie wystarczające. Nie wystarczające, gdyż i tak musielibyśmy założyć NIEP, czyli nieparzystą moc pierwszych elementów par, które interpretują predykaty  $B_1, B_2, \dots$ , aby móc sformułować adekwatną teorię TW w  $L_{\omega_1\omega}^{**}$ , a nie konieczne, gdyż spełnianie zdań, których używamy do zdefiniowania kryterium prawdy przez zgodę większości, zdań typu  $\mathfrak{M}_{sc} \models_s (B_1(x), A_3(x))$ , nie zależy w żaden sposób od mocy uniwersum modelu. FIN okazałoby się więc zbędnym założeniem.

Twierdzenie o pełności dla teorii TW kończy logiczną analizę kryterium prawdy przez zgodę większości. W rozdziale następnym wyciągnę logiczno-filozoficzne wnioski z tej analizy.



## Część III





## WNIOSKI

Przedmiotem niniejszej pracy jest logiczna analiza kryterium prawdy przez zgodę większości, stąd też wnioski z tej analizy będą wnioskami natury logiczno-filozoficznej i obejmowały będą zagadnienia takie, jak związek pomiędzy konsensualnym kryterium prawdy a kryterium prawdy przez zgodę większości, kwestię bivalencji i monotoniczności tego kryterium oraz zagadnienia związane z logicznymi ograniczeniami stosowalności kryterium prawdy przez zgodę większości.

### 8.1. KRYTERIUM PRAWDY PRZEZ ZGODĘ WIĘKSZOŚCI A KONSENSUALNE KRYTERIUM PRAWDY

W ujęciu, które w niniejszej pracy zastosowałam do analizy konsensualnego kryterium prawdy, zgoda powszechna traktowana była jako szczególny przypadek zgody większości. Ponieważ „większość” analizowana była za pomocą kwantyfikatora większości, powstaje pytanie, czy możemy analizować „wszystkich” za pomocą kwantyfikatora ogólnego. Kwantyfikatorem większości, za pomocą którego definiowaliśmy kryterium prawdy przez zgodę większości, był kwantyfikator typu  $\langle 1, 1 \rangle$ . Chociaż w językach, które rozważaliśmy, nie występował binarny kwantyfikator ogólny, to był on w nich definiowalny, a poza tym moglibyśmy taki kwantyfikator do nich dołożyć. Zinterpretowany byłby on w modelach częściowych w następujący sposób:

$$I(\forall^2) = \langle \{ \langle X, Y \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : X \subseteq Y \}, \{ \langle X, Y \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : X \cap Y \neq \emptyset \} \rangle.$$

Porównanie interpretacji tego kwantyfikatora z interpretacją kwantyfikatora  $M^2$  pokazuje, że  $\forall^2$  nie byłby szczególnym przypadkiem kwantyfikatora większości  $M^2$ : o ile  $p_1(\forall^2) \subseteq p_1(M^2)$ , o tyle w przypadku  $p_2$  zachodzi raczej odwrotna zależność. Dla zobrazowania zgody powszechnej jako szczególnego przypadku zgody większości musielibyśmy zdefiniować inny kwantyfikator, nazwijmy go kwantyfikatorem  $\Pi^2$ , w następujący sposób:

$$I(\Pi^2) = \langle \{ \langle X, Y \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : X \subseteq Y \}, \{ \langle X, Y \rangle \in \wp(E) \times \wp(E) : X \subseteq Y \} \rangle.$$

Łatwo teraz pokazać, pod jednym dodatkowym warunkiem, że zgoda powszechna jest szczególnym przypadkiem zgody większości:

**TWIERDZENIE 8.1.**

$$\{ p_1(\Pi^2) \setminus \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle \} \} \subseteq p_1(M^2), \text{ a } \{ p_2(\Pi^2) \setminus \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle \} \} \subseteq p_2(M^2).$$

DOWÓD: Weźmy dowolne zbiory  $X, Y$ , takie, że  $\langle X, Y \rangle \in p_1(\Pi^2)$ . Wiemy wobec tego, że  $X \subseteq Y$ , a więc  $X \cap Y = X$ . Jeżeli teraz  $X \neq \emptyset$ , a takie właśnie założenie przyjęliśmy, to możemy z tego wnioskować, że  $|X \cap Y| > |X \setminus Y|$ , czyli  $\langle X, Y \rangle \in p_1(M^2)$ . Ponieważ w obu przypadkach  $p_1 = p_2$ , więc tym samym pokazaliśmy, że  $\{p_2(\Pi^2) \setminus \{\langle \emptyset, \emptyset \rangle\}\} \subseteq p_2(M^2)$ .  $\square$

Założenie o wykluczeniu zbioru pustego było tutaj konieczne ze względu na przyjętą interpretację kwantyfikatora większości, zgodnie z którą nie jest on pozytywnie silny (PS) (por. rozdział 3.3.), czyli zdanie „Większość jednorozców jest jednorozcami” nie będzie ani prawdziwe, ani fałszywe, podczas gdy kwantyfikator  $\Pi^2$  jest pozytywnie silny, czyli zdanie „Wszystkie jednorozce są jednorozcami” byłoby zawsze prawdziwe. Dotykamy tu złożonego problemu nazw pustych. Nie będę jednak tego zagadnienia rozwijać, gdyż z pragmatycznego punktu widzenia konwencje dotyczące zgody większości i zgody powszechnej w grupie składającej się z pustego zbioru są mało znaczące.

Zgodnie z konsensualnym kryterium prawdy rozumianym jako szczególny przypadek zgody większości, zdanie  $p$  będzie prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy wszyscy członkowie danej populacji je uznają; zdanie  $p$  będzie fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy wszyscy członkowie danej populacji je odrzucają. Choć większość zwolenników konsensualnego kryterium prawdy nie wypowiada się na temat fałszywości zdań, to wydaje mi się, że byłoby oni skłonni zgodzić się z tą definicją. Świadczyć o tym mogą choćby uwagi Arystotelesa na temat uznawania zdań sprzecznych z negacjami zdań powszechnie uznanych z Księgi I *Topik*: „Podobnie też przesłanki negatywne w stosunku do sprzecznych z poglądami powszechnie uznanymi będą uchodzić za powszechnie uznane” (104a 14–24). Prawo równoważności fałszu i negacji prawdy, które w niniejszej pracy wielokrotnie było przytaczane jako argument za przyjęciem lub odrzuceniem kolejnych wersji definicji kryterium prawdy przez zgodę większości, oddaje intuicje wyrażone przez Arystotelesa. Z logicznego punktu widzenia sankcjonuje ono przyjęcie kwantyfikatora  $\Pi^2$  jako podstawy definicji konsensualnego kryterium prawdy, a tym samym potwierdza, moim zdaniem, adekwatność potraktowania konsensualnego kryterium prawdy jako szczególnego przypadku kryterium prawdy przez zgodę większości.

## 8.2. KONSENSUALNE KRYTERIUM PRAWDY A KORESPONDENCYJNA TEORIA PRAWDY. OGRANICZENIA STOSOWALNOŚCI KONSENSUALNEGO KRYTERIUM PRAWDY

We wstępie do niniejszej pracy wskazywałam przykładowe klasy zdań, do których, według mnie, kryterium prawdy przez zgodę większości może być stosowane. Z logicznego punktu widzenia nie widać jednak przeszkód, aby stosować je w przypadku innych klas zdań. Czy oznacza to jednak, że możemy stosować to kryterium do zupełnie dowolnych klas zdań? Odpowiedź na to pytanie zależy od tego, czy chcemy traktować je jako kryterium konkurencyjne czy jako kryterium uzupełniające w stosunku do innych kryteriów. Jak już wspomniałam we wstępie, ja przychyliam się do tej drugiej opcji. Oznacza to, że w przypadku, gdy mamy inne jasne kryteria prawdziwości zdań, a przykładem takiego kryterium mogłaby być dowodliwość zdań matematycznych, która dla intuicjonisty jest kryterium prawdziwości, musimy ograniczyć stosowalność kryterium prawdy przez zgodę większości, gdyż zazwyczaj kryteria te byłyby w konflikcie: łatwo wyobrazić sobie sytuację, w której nie jest tak, że większość członków jakiejś populacji uznaje matematycznie dowodliwe zdanie. Zakres

stosowalności kryterium prawdy przez zgodę większości zależy więc w znacznym stopniu od tego, jak bardzo przywiązani jesteśmy do innych kryteriów i na ile dają się one stosować w konkretnych przypadkach.

Jest jednak grupa zdań, do których nie możemy stosować kryterium prawdy przez zgodę większości z powodów czysto logicznych. Do grupy tej należą zdania stwierdzające uznawanie innych zdań przez większość, czyli właśnie zdania użyte w definicji kryterium prawdy przez zgodę większości.<sup>1</sup> W jaki sposób badamy, czy jest tak, że większość członków populacji  $b_1$  uznaje zdanie  $p$ ? Do tej pory nie sprecyzowanym jasno założeniem było to, że zawsze możemy sprawdzić, czy jest tak, że większość członków populacji  $b_1$  uznaje zdanie  $p$ : populacja ma skończoną liczbę członków, a więc po prostu obliczamy i badamy stosunek liczby tych, którzy dane zdanie uznają, do liczby pozostałych. Inaczej mówiąc, zdanie „większość członków populacji  $b_1$  uznaje zdanie  $p$ ” jest prawdziwe, jeżeli policzyliśmy i rzeczywiście tak jest, że liczba członków, którzy uznają zdanie  $p$ , przewyższa liczebnością pozostałych członków populacji  $b_1$ . Do zdań tego typu stosowaliśmy wobec tego korespondencyjną definicję prawdy, a proste liczenie dostarczało nam w tym wypadku metody wyodrębniania zdań prawdziwych.

Postępowanie takie było w pełni uprawomocnione, gdyż kryterium prawdy przez zgodę większości traktowane było jako jedno z wielu kryteriów. Czy można było jednak postąpić inaczej i przyjąć, że kryterium, które stosujemy w przypadku pytania o prawdziwość bądź fałszywość zdań typu „większość członków populacji  $b_1$  uznaje zdanie  $p$ ”, jest także kryterium prawdy przez zgodę większości? Odpowiedź na to pytanie jest negatywna z przynajmniej dwu powodów. Po pierwsze, przyjąwszy, że kryterium prawdy przez zgodę większości obowiązuje także i w tym wypadku, narażamy się na niebezpieczeństwo regresu w nieskończoność. Oznaczmy przez  $q$  zdanie „większość członków populacji  $b_1$  uznaje zdanie  $p$ ”. Aby odpowiedzieć na pytanie, czy zdanie  $p$  jest prawdziwe, musimy wiedzieć, czy jest tak, jak głosi zdanie  $q$ . Gdybyśmy teraz zamiast liczenia odwołali się z powrotem do kryterium prawdy przez zgodę większości, to musielibyśmy z kolei ustalić, czy jest tak, że „większość członków populacji  $b_2$  uznaje zdanie  $q$ ”, a potem pytać o to z kolei zdanie, itd. Aby tego uniknąć, musimy na którymś etapie przyjąć, że do stwierdzania prawdziwości zdań stwierdzających uznawanie przez większość zdań stwierdzających uznawanie przez większość stosujemy inne kryterium prawdy. W niniejszej pracy przyjąłem, że już na pierwszym etapie stosujemy proste liczenie i do niego odwołujemy się przy orzekaniu prawdziwości zdań typu „większość członków populacji  $b_1$  uznaje zdanie  $p$ ”.

Inny argument przemawiający przeciwko stosowaniu kryterium prawdy przez zgodę większości do zdań orzekających uznawanie innych zdań przez większość związany jest z pytaniem o to, czy możemy zachować intuicje związane z korespondencyjną definicją prawdy w stosunku do jakiejś klasy zdań, a równocześnie stosować do tej klasy zdań kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowane tak jak w definicji III, czyli poprzez spełnianie superwaluacyjne w modelach semiczęściowych dla  $L^{**}(M^2)$ . Przykładem potwierdzającym taką możliwość jest to, że zarówno w myśl korespondencyjnej definicji prawdy, jak i zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości wszystkie klasyczne tautologie są (zawsze) prawdziwe. Jednak, ogólnie rzecz biorąc, kryterium prawdy przez zgodę większości stosować będziemy tam, gdzie inne kryteria nie dają nam odpowiedzi na pytanie o prawdziwość zdania, gdyż w przeciwnym wypadku możliwy byłby konflikt z tymi właśnie kryteriami. I tak dokładnie jest w przypadku zdań typu „Większość członków populacji  $b_1$  uznaje zdanie  $p$ ”.

<sup>1</sup>Na tę kwestię zwrócił mi uwagę Mark Brown.

Przyjmuję, że „proste liczenie” pozwala nam stwierdzić, jak faktycznie ma się stosunek liczebny członków populacji  $b_1$ , którzy uznają zdanie  $p$ , do tych jej członków, którzy tego zdania nie uznają, a tym samym pozwala wydzielić te zdania powyższego typu, które są prawdziwe zgodnie z korespondencyjną definicją prawdy. Rozważmy zdanie  $p$ , o którym założymy, że jest ono uznane przez większość populacji  $b_1$ , czyli zdanie  $M^2(B_1(x), A_1(x))$  jest spełnione w modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$ , w którym  $p_1(B_1)$  jest zbiorem składającym się z członków populacji  $b_1$ , a  $p_1(A_1)$  jest zbiorem ludzi uznających zdanie  $p$ . Skoro założyliśmy, że zdanie  $p$  jest uznane przez większość członków populacji  $b_1$ , to intuicja związana z korespondencyjną definicją prawdy (wyrażona na przykład w Tarskiego konwencji T) każe nam uznać zdanie „Większość członków populacji  $b_1$  uznaje zdanie  $p$ ” za prawdziwe. Czy z takiego założenia wynika jednak, że zdanie „Większość członków populacji  $b_1$  uznaje zdanie  $p$ ” jest prawdziwe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości? Niekoniecznie. Aby zastosować do tego zdania badane kryterium, musimy przetłumaczyć je na język  $L^{**}(M^2)$  za pomocą funkcji tłumaczącej T. Z punktu widzenia logiki zdań, a taki punkt widzenia przy tym tłumaczeniu przyjęliśmy, zdanie „Większość członków populacji  $b_1$  uznaje zdanie  $p$ ” jest po prostu zdaniem atomowym; oznaczmy je przez  $q$ . Zdanie to będzie prawdziwe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości, jeżeli większość członków populacji  $b_2$  uzna to zdanie, czyli gdy zdanie  $M^2(B_2(x), A_2(x))$  jest spełnione w modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$  przy interpretacji zdefiniowanej analogicznie do tego, jak to zrobiliśmy powyżej. Możemy przy tym zarówno przyjąć, że rozważaną populacją powinna być ta sama populacja co w przypadku zdania  $p$ , czyli populacja  $b_1$ , jak i że powinna to być inna populacja: nie ma logicznego związku ani pomiędzy spełnianiem zdań  $M^2(B_1(x), A_1(x))$  i  $M^2(B_1(x), A_2(x))$ , ani pomiędzy spełnianiem zdań  $M^2(B_1(x), A_1(x))$  i  $M^2(B_2(x), A_2(x))$ . Może się więc łatwo zdarzyć, że zdanie  $p$  okaże się prawdziwe zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości, a zdanie „Większość członków populacji  $b_1$  uznaje zdanie  $p$ ” okaże się zgodnie z tym kryterium fałszywe. Przekładając to na język życia codziennego, łatwo wyobrazić sobie sytuację, w której członkowie grupy spytani o oczekiwany przez nich wynik głosowania nie odgadną go. Stać się tak może na przykład na skutek przecenienia wyjątkowości własnych preferencji przez członków grupy, lub odwrotnie, na skutek ekstrapolacji jednolitości gustów ich najbliższego otoczenia.

Reasumując, w większości wypadków zakres stosowalności kryterium prawdy przez zgodę większości zależy od naszych preferencji filozoficznych. Zdania typu „Większość członków populacji  $b_1$  uznaje zdanie  $p$ ”, których używamy w jego sformułowaniu, są jednak z tego zakresu wyłączone z powodów czysto logicznych.

### 8.3. BIWALENCJA

W najbardziej ogólnej formie kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowane było w języku  $L^{**}(M^2)$ , więc w tym języku sformułujemy pytanie o bivalencję, czyli o to, czy każde zdanie jest prawdziwe lub fałszywe.<sup>2</sup> Ponieważ definicja kryterium prawdy przez zgodę większości w języku  $L^{**}(M^2)$  (definicja III) jest równoważna definicjom tego kryterium w językach  $L^*(M)$ ,  $L^*(M^2)$ , a przy założeniu nieparzystej liczby członków populacji, które rozważamy także w  $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ , kwestia bivalencji rozstrzygnięta w przypadku  $L^{**}(M^2)$  obowiązuje dla tych innych języków.

<sup>2</sup>Zasada bivalencji jest czasami utożsamiana z twierdzeniem, że każde zdanie jest prawdziwe lub nie jest prawdziwe. Taka zasada oczywiście obowiązuje w przypadku kryterium prawdy przez zgodę większości. W rozdziale tym bivalencję rozumiemy jednak jako twierdzenie, że każde zdanie jest prawdziwe bądź fałszywe.

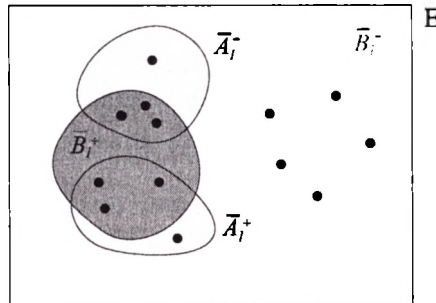
Weźmy dowolne zdanie  $\alpha$  z języka naturalnego. Ponieważ w przypadku kryterium prawdy przez zgodę większości kwestia prawdziwości zdania zawsze zrelatywizowana jest do konkretnej populacji, o której większość pytamy, pytanie o biwalencję proponuję przełożyć na pytanie o to, czy dla dowolnego zdania  $\alpha$  i dla dowolnej populacji  $b_1$  jest tak, że zdanie  $\alpha$  jest prawdziwe lub zdanie  $\alpha$  jest fałszywe. Zgodnie z definicją kryterium prawdy przez zgodę większości (strona 103) sprowadza się to do pytania, czy w każdym modelu semiczęściowym dla  $L^{**}(M^2)$  zdanie  $M^2_{xx}(B_1(x), \varphi(x))$  jest superwaluacyjnie spełnione lub superwaluacyjnie odrzucone. Odpowiedź na to pytanie jest negatywna, co pokażę w poniższym twierdzeniu.

**TWIERDZENIE 8.2.**

Nie jest tak, że dla dowolnego modelu semiczęściowego  $\mathfrak{M}_{sc}$  i dowolnej formuły  $\varphi(x) \in \text{FOR}_{L^{**}(M^2)}$ :

$$\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2_{xx}(B_1(x), \varphi(x)) \quad \text{lub} \quad \mathfrak{M}_{sc} \not\models_s M^2_{xx}(B_1(x), \varphi(x)).$$

**DOWÓD:** Kontrprzykładem będzie każda sytuacja „impasowa”, w której liczba członków rozważanej populacji uznających zdanie atomowe  $p$  jest równa liczbie tych, którzy to zdanie odrzucają, przy czym wszyscy wypowiedzieli swoją opinię odnośnie do zdania  $p$ . Sytuacja taka przedstawiona jest na rysunku 8.1. Ponieważ uzupełnienie modelu  $\mathfrak{M}_{sc}$  nie zmieni stosunków mocy zbiorów  $p_1(B_1)$ ,  $p_1(B_1) \cap p_1(A_1)$  i  $p_1(B_1) \cap p_2(A_1)$ , a tylko od nich zależy spełnianie lub odrzucanie zdania  $M^2_{xx}(B_1(x), A_1(x))$ , zdanie to nie będzie w zobrazowanym modelu ani superwaluacyjnie spełnione, ani superwaluacyjnie odrzucone.



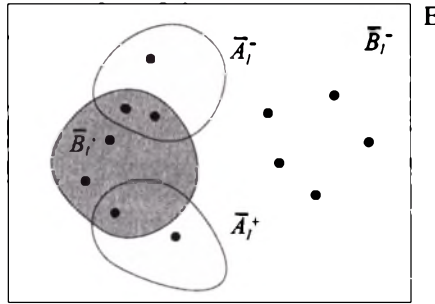
Rys. 8.1.: Nie jest tak, że  $\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2_{xx}(B_1(x), A_1(x))$  ani tak, że  $\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s M^2_{xx}(B_1(x), A_1(x))$

□

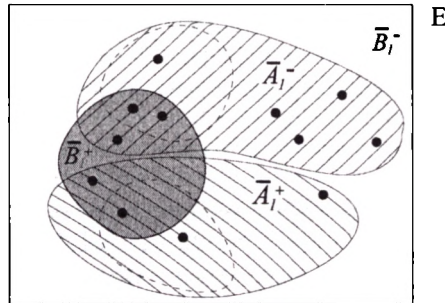
Innym typem sytuacji, które stanowią kontrprzykład dla zasady biwalencji, będą takie, w których nie jest tak, że większość populacji uznaje zdanie  $p$ , ani nie jest tak, że większość tej populacji odrzuca to zdanie, przy czym niekoniecznie grupy te muszą stanowić zbiory wzajemnie się dopełniające, jak było to w powyższym przykładzie. Poniższy przykład taką sytuację obrazuje:

## PRZYKŁAD 8.3.

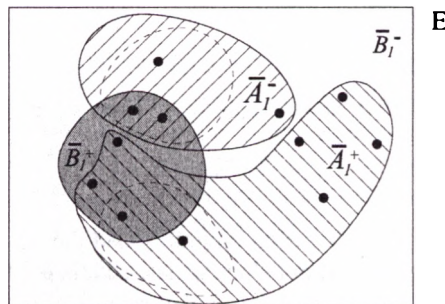
Model  $\mathfrak{M}_{sc}$  przedstawiony na rysunku 8.2. ani nie spełnia, ani nie odrzuca superwaluacyjnie zdania  $M^2xx(B_1(x), A_1(x))$ , gdyż wśród jego uzupełnień są zarówno takie, które to zdanie odrzucają (rysunek 8.3.), jak i takie, które to zdanie spełniają (rysunek 8.4.).



Rys. 8.2.: Nie jest tak, że  $\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2xx(B_1(x), A_1(x))$  ani tak, że  $\mathfrak{M}_{sc} \not\models_s M^2xx(B_1(x), A_1(x))$



Rys. 8.3.:  $\mathfrak{M}'_{sc} \not\models M^2xx(B_1(x), A_1(x))$



Rys. 8.4.:  $\mathfrak{M}''_{sc} \models M^2xx(B_1(x), A_1(x))$

Chociaż kontrprzykład, który podałam w dowodzie twierdzenia 8.2., zdaje się sugerować, że biwalencja nie obowiązywałaby nawet gdybyśmy pozostali przy modelach standardowych, gdyż i tam sytuacja podobna do „impasowej” mogłaby wystąpić, to tak naprawdę źródło nieobowiązywania biwalencji leży w przyjęciu modeli częściowych. W modelu standardowym moglibyśmy zdefiniować fałszywość jako nieobowiązywanie prawdziwości i wtedy powyższy kontrprzykład, ani z definicji żaden inny, nie byłby kontrprzykładem. Wtedy jednak kwestia biwalencji strywalizowałaby się. W modelach częściowych zastosowany kontrprzykład moglibyśmy wyeliminować definiując  $p_2(M)$  poprzez nieostrą nierówność. Rozwiązanie takie wykluczam jednak ze względu na konflikt z prawem równoważności fałszu i negacji prawdy (patrz strona 75). Powodem porzucenia modeli standardowych na rzecz modeli częściowych (semiczęściowych) była natomiast chęć zdania sprawy z sytuacji, w których pewne osoby ani nie uznają, ani nie odrzucają pewnych zdań. Ceną za to jest biwalencja. W przypadku jednak tak pragmatycznego kryterium, jakim jest kryterium prawdy przez zgodę większości, kwestie empirycznej adekwatności powinny według mnie odgrywać decydującą rolę.

#### 8.4. NIEMONOTONICZNOŚĆ KRYTERIUM PRAWDY PRZEZ ZGODĘ WIĘKSZOŚCI

Rozważając kwestię monotoniczności, należy wyraźnie odróżnić kwestię monotoniczności kwantyfikatora większości od kwestii monotoniczności kryterium prawdy przez zgodę większości, gdyż jedno nie wynika z drugiego w bezpośredni sposób. W rozdziale 3. podałam definicje prawostronnej i lewostronnej monotoniczności kwantyfikatorów typu  $\langle 1, 1 \rangle$  i monotoniczności kwantyfikatorów typu  $\langle 1 \rangle$  zgodnie z tym, jak zazwyczaj przyjmuje się w badaniach nad kwantyfikatorami uogólnionymi. W rozdziale 5.2. (twierdzenie 5.15. na stronie 88) pokazałam, że kwantyfikator  $M^2$  jest prawostronnie monotoniczny. Poniżej sprecyzuję natomiast, co rozumiem przez monotoniczność kryterium prawdy.

##### DEFINICJA 8.4. (monotoniczność kryterium prawdy)

Kryterium prawdy nazywamy monotonicznym, jeżeli zgodnie z nim z prawdziwości zdania  $\alpha$  oraz prawdziwości zdania **jeżeli  $\alpha$ , to  $\beta$**  możemy wnioskować o prawdziwości zdania  $\beta$ .  $\square$

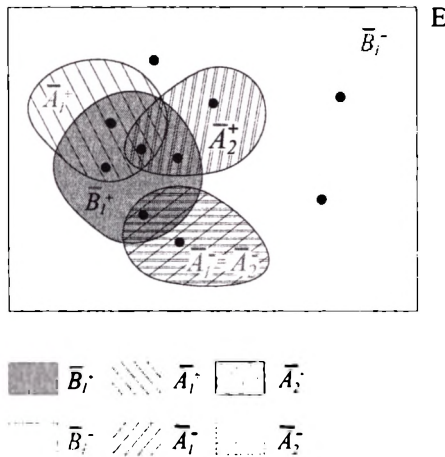
Jak pokaże poniższe twierdzenie, kryterium prawdy przez zgodę większości nie jest w tym sensie kryterium monotonicznym.

##### TWIERDZENIE 8.5.

Kryterium prawdy przez zgodę większości nie jest kryterium monotonicznym.

DOWÓD: Rozważmy populację  $b_1$  składającą się z pięciu osób, z których trzy uznają zdanie  $p$ , dwie uznają zdanie  $q$ , a jedna odrzuca zarówno zdanie  $p$ , jak i zdanie  $q$ . Sytuacja taka przedstawiona jest na rysunku 8.5. na następnej stronie. Zobrazowany na nim model  $\mathfrak{M}_{sc}$  spełnia, a więc i superwaluacyjnie spełnia, zdanie  $M^2_{xx}(B_1(x), A_1(x))$ , gdyż  $|\bar{B}^+ \cap \bar{A}_1^+| > |\bar{B}^+ \setminus \bar{A}_1^+|$ . Model ten spełnia superwaluacyjnie także zdanie  $M^2_{xx}(B_1(x), (A_1(x) \rightarrow A_2(x)))$  ( $|\bar{B}^+ \cap (\bar{A}_1^- \cup \bar{A}_2^+)| > |\bar{B}^+ \setminus (\bar{A}_1^- \cup \bar{A}_2^+)|$ ), ale nie spełnia on zdania  $M^2_{xx}(B_1(x), A_2(x))$  i, jak łatwo sobie wyobrazić, pewne jego uzupełnienia będą spełniać, a inne odrzucać to zdanie, co oznacza, że nie jest ono superwaluacyjnie spełnione przez model  $\mathfrak{M}_{sc}$ . Mamy tu więc

do czynienia z sytuacją, w której zgodnie z kryterium prawdy przez zgodę większości zdania  $p$  oraz jeżeli  $p$ , to  $q$  są prawdziwe, a  $q$  prawdziwym nie jest.



Rys. 8.5.:  $\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2_{xx}(B_1(x), A_1(x))$ ,  $\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2_{xx}(B_1(x), (A_1(x) \rightarrow A_2(x)))$ , ale nie jest tak, że  $\mathfrak{M}_{sc} \models_s M^2_{xx}(B_1(x), A_2(x))$  □

Podobny kontrprzykład pokazałby, że nie zachodzi koniunkcyjna wersja monotoniczności kryterium prawdy, według której z prawdziwości zdania  $\alpha$  oraz zdania  $\beta$  moglibyśmy wnioskować o prawdziwości zdania  $\alpha$  i  $\beta$ .

Mimo że kwantyfikator większości  $M^2$  jest prawostronnie monotoniczny, kryterium za jego pomocą zdefiniowane monotoniczne nie jest, gdyż te dwie monotoniczności niewiele ze sobą mają wspólnego. Monotoniczność kryterium zagwarantowałaby natomiast prawostronna monotoniczność malejąca, zdefiniowana w następujący sposób:<sup>3</sup>

**DEFINICJA 8.6.** (prawostronna monotoniczność malejąca kwantyfikatorów typu  $\langle 1, 1 \rangle$ )  
 Kwantyfikator  $Q$  typu  $\langle 1, 1 \rangle$  nazywamy *prawostronnie monotonicznym malejąco*, gdy dla  $B' \subseteq B \subseteq E, A \subseteq E$ :

jeżeli  $Q_E A B$  to  $Q_E A B'$ . □

Przykładem kwantyfikatora prawostronnie monotonicznego malejąco jest kwantyfikator **co najwyżej trzech** typu  $\langle 1, 1 \rangle$ , użyty jak w zdaniu „Co najwyżej trzech studentów muzykologii przystąpi do egzaminu z angielskiego w pierwszym terminie”. Zdanie to jest spełnione w modelu, w którym przecięcie zbioru studentów muzykologii ze zbiorem studentów przystępujących do egzaminu z angielskiego w pierwszym terminie liczy co najwyżej trzy elementy. Oczywiście każdy podzbiór tego przecięcia, a w szczególności podzbiór pusty, liczy co najwyżej trzy elementy i dlatego ten kwantyfikator jest kwantyfikatorem prawostronnie monotonicznym malejąco.

<sup>3</sup>Por. Westerståhl (1989, s. 76), gdzie monotoniczność taka oznaczana jest symbolem  $MON\downarrow$ .



Prawostronna monotoniczność malejąca pociągałaby za sobą monotoniczność kryterium, ale kwantyfikator większości  $M^2$  oczywiście nie jest w tym sensie monotoniczny, gdyż osłabienie poparcia dla danego zdania przez członków populacji łatwo może pozbawić to zdanie statusu zdania prawdziwego.

## 8.5. PODSUMOWANIE

W rozdziale tym starałam się poruszyć zagadnienia logiczno-filozoficzne, które tradycyjnie badane są w kontekście kryteriów prawdy, takie jak kwestia obowiązywania zasady biwalencji, monotoniczność kryterium, zakres jego stosowalności czy wreszcie specyficzna dla tego kryterium kwestia interpretacji konsensualnego kryterium prawdy jako szczególnego przypadku kryterium prawdy przez zgodę większości.

Na pierwsze miejsce wysuwa się tu kwestia obowiązywania zasady biwalencji, która zgodnie ze zdroworozsądkowym oczekiwaniem została rozstrzygnięta negatywnie. Nieobowiązywanie zasady biwalencji ma swe źródło w dwu postulatach, którymi kierowałam się w mojej pracy. Po pierwsze, kryterium prawdy przez zgodę większości opiera się na uznaniu bądź odrzucaniu zdań przez członków populacji, do których prawdziwość bądź fałszywość badanych zdań jest zrelatywizowana. Faktem empirycznym jest natomiast to, że nie wszyscy i nie co do wszystkich zdań potrafią określić, czy zdanie to jest przez nich uznane czy odrzucone. Postulat adekwatności definicji formalnych w stosunku do tego typu faktów empirycznych, z których ta definicja powinna zdawać sprawę (postulat 1. z rozdziału 4.4. ze strony 80), skłonił mnie do przyjęcia modeli częściowych jako podstawy definicji kryterium prawdy przez zgodę większości. Ten krok sam w sobie nie przesądzał jeszcze kwestii biwalencji. Dopiero modele częściowe w połączeniu z postulatem zachowania równoważności fałszu i negacji prawdy, który często uważa się za minimalny test definicji bądź kryterium prawdy (postulat 2. z rozdziału 4.4. ze strony 80), kwestię tę rozstrzygnęły negatywnie.

Następną nieklasyczną cechą kryterium prawdy przez zgodę większości jest jego niemonotoniczność, która ma swe źródło bezpośrednio w logicznej charakterystyce kwantyfikatora większości, użytego do zdefiniowania tego kryterium.

Jak starałam się argumentować w rozdziale 8.2., wybór zakresu stosowalności kryterium prawdy przez zgodę większości zależy od naszych preferencji filozoficznych. Wyróżniłam jednak klasę zdań, a są to zdania orzekające uznanie (bądź odrzucanie) przez większość innych zdań, czyli właśnie zdania użyte w sformułowaniu kryterium prawdy przez zgodę większości, które z logicznego punktu widzenia muszą być z tego zakresu wyłączone.

Przyjęcie kwantyfikatora większości za podstawę definicji kryterium prawdy przez zgodę większości dało możliwość potraktowania konsensualnego kryterium prawdy jako szczególnego przypadku kryterium prawdy przez zgodę większości. Oprócz elegancji formalnej, takie potraktowanie konsensualnego kryterium prawdy motywowane było względami historycznymi. Wydaje mi się, że nawet zwięzły przegląd historii zagadnienia konsensualnego kryterium prawdy, jak choćby ten, który przedstawiłam w rozdziale pierwszym, pokazuje, iż większość zwolenników tego kryterium, z Arystotelesem na czele, traktowała zgodę powszechną jako szczególny przypadek zgody większości.



## SPIS SYMBOLI

W spisie poniższym nie zostały uwzględnione symbole, które były użyte jednokrotnie i w pełni wyjaśnione w kontekście. Pominięte zostały także symbole teoriomnogościowe, których użycie nie odbiega od powszechnie przyjętego. Strona podana obok symbolu odnosi się do miejsca, w którym został on po raz pierwszy użyty lub zdefiniowany.

$U(p, x)$	29	$\exists_X$	36	$\mathfrak{M}_c \models_s \varphi[v]$	71
$L(Q)$	29	$\forall_X$	36	$\mathfrak{M}_c \not\models_s \varphi[v]$	71
$L(M)$	29	$\forall_X^2$	36	$\text{FOR}_{\mathcal{L}}$	78
$A_1, A_2, \dots$	29	$ A $	36	$\Gamma \models_s \psi$	78
$L^*(M)$	29	$M_X$	36	$\varphi \models_s \psi$	78
$\vee$	29	$M_X^2$	36	$\models_s \varphi$	79
$\wedge$	29	$\mathcal{Q}$	37	$L^*(M^2)$	82
$\neg$	29	$\langle 1 \rangle$	38	$M^2$	82
$\forall$	30	$\langle 1, 1 \rangle$	38	$\text{FOR}_{L^*(M^2)}$	83
$x, y, z, x_1, x_2, \dots$	30	$\forall^2$	44	$\mathfrak{M}_{sc}$	90, 102
$M$	30	$\exists^2$	44	$I_{sc}$	90, 102
$\forall$	30	$\wp(E)$	36	$T^*$	93
$\exists$	30	$\mathcal{Q}$	44	$L^*_{AR}(M^2)$	93
$=$	30	$\forall^r$	45	$O(\alpha, x)$	93
$P^n$	30	$\exists^r$	45	$\sim$	94
$P, R, S, P_1, P_2, \dots$	30	$M^r$	45	$\Rightarrow$	94
$\varphi$	30	$\mathcal{L}$	46	$L^{**}(M^2)$	101
$\text{FOR}_{L^*(M)}$	30	$\mathfrak{M}$	53	$B_1, B_2, \dots$	102
$\rightarrow$	30	$I$	53	$L$	102
$ZW(\varphi)$	30, 83, 109	$\text{Id}$	53	$\text{FOR}_{L^{**}(M^2)}$	102
$\varphi(x_1, \dots, x_n)$	31	$\nu$	54	$L_{\omega_1 \omega_1}$	108
$ZD_{L^*(M)}$	31	$\nu(x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n})$	54	$L_{\alpha\beta}$	108
$U(\alpha, x)$	31	$\mathfrak{M} \models \varphi[v]$	54, 110	$L_{\omega_1 \omega}$	108
$m$	31	$\text{wtw}$	55	$\bigwedge_{n < \omega}$	108
$p_1, p_2, \dots$	31	$\mathfrak{M} \models \varphi$	56	$x_\alpha$	108
$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots$	31	$\mathfrak{M}_c$	58, 83	$\text{FOR}_{L_{\omega_1 \omega}}$	109
$x, y, z, x_1, x_2, \dots$	31	$I_c$	58, 83	$\bigvee_{n < \omega}$	109
$T$	31	$p_1$	58	$\Gamma \models \psi$	110
$p, q, r, \dots$	32	$p_2$	58	$\models \varphi$	111
$E, E'$	35	$\mathfrak{M}_c \models \varphi[v]$	59, 84, 111	$\bar{W}$	114
$\mathcal{Q}_{EA}$	35	$\mathfrak{M}_c \not\models \varphi[v]$	59, 84, 111	$\varphi \neg$	122
$Q$	35	$\Gamma \models_c \psi$	66	$\vdash_{L_{\omega_1 \omega}} \varphi$	123
$\langle n_1, \dots, n_k \rangle$	35	$\varphi \models_c \psi$	66	$\Pi^2$	129
$\mathcal{Q}_X$	35	$\nu_s$	69		

# SPIS DEFINICJI

Poniżej przedstawiam spis definicji pojęć użytych w pracy w kolejności alfabetycznej z podaniem strony, na której dane pojęcie zostało zdefiniowane lub wyjaśnione w kontekście, bez wyodrębnienia w formie definicji.

$\varphi \neg$ , definicja 7.22. ....	122
aksjomaty dla TW .....	123
aksjomaty dla $L_{\omega_1, \omega}$ .....	122
definiowalność kwantyfikatora w elementarnej logice pierwszego rzędu .....	46
definiowalność kwantyfikatora w logice $\mathcal{L}$ , definicja 3.15. ....	46
EKST, definicja 3.5. ....	39
FIN. ....	53
formuła $L^*(M)$ , definicja 2.2. ....	30
formuła $L^*(M^2)$ , definicja 5.2. ....	82
formuła $L^{**}(M^2)$ , definicja 6.2. ....	102
formuła $L_{\omega_1, \omega}$ , definicja 7.2. ....	108
formuła $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ .....	109
formuły atomowe .....	30
funkcja $I$ dla wybranych formuł złożonych języka $L^*(M)$ , definicja 4.4. ....	54
funkcja $I_C$ dla wybranych formuł złożonych języka $L^*(M)$ , definicja 4.11. ....	60
funkcja $I_C$ dla wybranych formuł złożonych języka $L^*(M^2)$ , definicja 5.10. ....	85
funkcja $I_{sc}$ dla wybranych formuł złożonych języka $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ , definicja 7.16. ....	114
funkcja tłumacząca zdania o uznawaniu na język $\mathcal{L}$ , definicja 2.6. ....	31
funkcja tłumacząca zdania o uznawaniu na język $L^*_{AR}(M^2)$ , definicja 5.21. ....	93
globalny kwantyfikator uogólniony, definicja 3.1. ....	35
implikacja w $L^*(M)$ , definicja 2.3. ....	30
implikacja w $L^*(M^2)$ , definicja 5.3. ....	83
implikacja w $L^{**}(M^2)$ .....	102
implikacja w $L_{\omega_1, \omega}$ .....	109
implikacja w $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ .....	114
interpretacja totalna, definicja 4.22. ....	70
ISOM, definicja 3.7. ....	40
język $L^*(M)$ , definicja 2.1. ....	29
język $L^*(M^2)$ , definicja 5.1. ....	82
język $L^*_{AR}(M^2)$ .....	93
język $L^{**}(M^2)$ , definicja 6.1. ....	101
język $L_{\omega_1, \omega}$ , definicja 7.1. ....	108
język $L_{\omega_1, \omega}^{**}$ , definicja 7.14. ....	113
klasyczna waluacja związana z modelem .....	69
KONS, definicja 3.6. ....	40
kryterium prawdy przez zgodę większości I, definicja 4.37. ....	80

kryterium prawdy przez zgodę większości II, definicja 5.19.....	91
kryterium prawdy przez zgodę większości III, definicja 6.4.....	103
kryterium prawdy przez zgodę większości IV, definicja 7.18.....	117
kryterium prawdy przez zgodę większości po odrzuceniu „wymogu quorum”, definicja 5.20.....	92
kryterium prawdy przez zgodę większości w modelu standardowym, definicja 4.7.....	56
kryterium prawdy przez zgodę większości zdefiniowane w oparciu o spełnianie w modelach częściowych, definicja 4.19.....	68
kwantyfikator egzystencjalny w $L_{\omega_1\omega}$ , definicja 7.4.....	109
kwantyfikator egzystencjalny w $L_{\omega_1\omega}^{**}$ .....	109
kwantyfikator $M$ w języku $L^*(M^2)$ , definicja 5.4.....	83
kwantyfikator $M$ w języku $L^{**}(M^2)$ .....	102
kwantyfikator pseudowiększości $W$ , definicja 7.15.....	114
kwantyfikatory binarne.....	36
kwantyfikatory dualne, definicja 3.2.....	37
kwantyfikatory monadyczne.....	36
kwantyfikatory relatywizowalne, definicja 3.12.....	45
kwantyfikatory unarne.....	36
kwantyfikatory uogólnione typu $\langle 1, 1 \rangle$ , definicja 3.4.....	38
kwantyfikatory uogólnione typu $\langle 1 \rangle$ , definicja 3.3.....	38
kwantyfikatory uogólnione, definicja 3.1.....	35
lewostronna monotoniczność kwantyfikatorów typu $\langle 1, 1 \rangle$ , definicja 3.9.....	41
logika monotoniczna, definicja 4.27.....	72
lokalny kwantyfikator uogólniony, definicja 3.1.....	35
model częściowy dla $L^*(M)$ , definicja 4.9.....	58
model częściowy dla $L^*(M^2)$ , definicja 5.7.....	83
model częściowy dla $L_{\omega_1\omega}$ .....	110
model totalny, definicja 4.23.....	70
model semiczęściowy dla $L^*(M^2)$ , definicja 5.17.....	90
model semiczęściowy dla $L^{**}(M^2)$ , definicja 6.3.....	102
model semiczęściowy dla $L_{\omega_1\omega}^{**}$ .....	114
model standardowy dla $L^*(M)$ , definicja 4.1.....	53
model standardowy dla $L_{\omega_1\omega}$ .....	109
modele skończone.....	53
monotoniczność kryterium prawdy, definicja 8.4.....	135
monotoniczność kwantyfikatorów typu $\langle 1 \rangle$ , definicja 3.10.....	42
negacja wewnętrzna.....	94
negacja zewnętrzna.....	94
NIEP.....	107
nieskończona alternatywa w $L_{\omega_1\omega}$ , definicja 7.5.....	109
nieskończona alternatywa w $L_{\omega_1\omega}^{**}$ .....	109
określniki.....	38
totalne rozszerzenie modelu częściowego.....	70
PERM.....	39
(PPS) prawie pozytywnie silny kwantyfikator typu $\langle 1, 1 \rangle$ , definicja 3.19.....	48
prawda w modelu.....	54

prawostronna monotoniczność kwantyfikatorów typu $\langle 1, 1 \rangle$ , definicja 3.8.....	41
prawostronna monotoniczność malejąca kwantyfikatorów typu $\langle 1, 1 \rangle$ , definicja 8.6.....	136
(PS) pozytywnie silny kwantyfikator typu $\langle 1, 1 \rangle$ , definicja 3.18.....	48
reguły inferencyjne $L_{\omega_1\omega}$ .....	123
relacja totalna.....	59
relatywizacja kwantyfikatorów, definicja 3.11.....	44
rozszerzenie funkcji interpretującej, definicja 4.20.....	70
rozszerzenie modelu częściowego, definicja 4.21.....	70
spełnianie superwaluacyjne, definicja 4.25.....	70
spełnianie w modelu częściowym dla $L^*(M)$ , definicja 4.10.....	59
spełnianie w modelu częściowym dla $L^*(M^2)$ , definicja 5.8.....	84
spełnianie w modelu częściowym dla $L^{**}(M^2)$ .....	103
spełnianie w modelu częściowym dla $L_{\omega_1\omega}$ , definicja 7.10.....	111
spełnianie w modelu częściowym dla $L_{\omega_1\omega}^{**}$ .....	114
spełnianie w modelu standardowym dla $L^*(M)$ , definicja 4.3.....	54
spełnianie w modelu standardowym dla $L_{\omega_1\omega}$ , definicja 7.6.....	110
spełnianie zdań przez model, definicja 4.6.....	56
superwaluacja związana z modelem.....	69
superwaluacja.....	69
superwartościowanie.....	69
tautologia $L_{\omega_1\omega}$ , definicja 7.9.....	111
tautologia superwaluacyjna, definicja 4.35.....	79
teza $L_{\omega_1\omega}$ , definicja 7.23.....	123
uzupełnienie modelu częściowego, definicja 4.24.....	70
waluacja.....	69
wartościowanie, definicja 4.2.....	54
wynikanie superwaluacyjne, definicja 4.34.....	78
wynikanie w $L_{\omega_1\omega}$ , definicja 7.8.....	110
wynikanie w przypadku modeli częściowych dla $L^*(M)$ , definicja 4.17.....	66
zdanie $L^*(M)$ , definicja 2.5.....	31
zdanie $L^*(M^2)$ , definicja 5.6.....	83
zdanie $L^{**}(M^2)$ .....	102
zdanie $L_{\omega_1\omega}$ .....	109
zdanie $L_{\omega_1\omega}^{**}$ .....	114
zmienna wolna w $L^*(M)$ , definicja 2.4.....	30
zmienna wolna w $L^*(M^2)$ , definicja 5.5.....	83
zmienna wolna w $L^{**}(M^2)$ .....	102
zmienna wolna w $L_{\omega_1\omega}$ , definicja 7.3.....	109
zmienna wolna w $L_{\omega_1\omega}^{**}$ .....	109
zwrotność kwantyfikatorów.....	48

## BIBLIOGRAFIA

- Ajdukiewicz Kazimierz (1985), „Język i znaczenie”, w: *Język i poznanie*, tom I, PWN, Warszawa, s. 145–174.
- Apel Karl-Otto (1991), „Semiotyka transcendentálna a prawda. Znaczenie konsensualnej teorii prawdy Peirce'a we współczesnej dyskusji na temat prawdy”, *Principia* 4, s. 5–22.
- Arystoteles (1982), *Etyka nikomachejska*, PWN, Warszawa.
- Arystoteles (1984), *Metafizyka*, PWN, Warszawa.
- Arystoteles (1990), „Topiki”, w: *Dzieła wszystkie*, tom I, PWN, Warszawa, s. 329–473.
- Baird Davis (1985), „Lehrer/Wagner consensual probabilities do not adequately summarize the available information”, *Synthese* 62, s. 47–62.
- Barwise Jon (1978), „Monotone quantifiers and admissible sets”, w: J. Fenstad, R. Gandy, G. Sacks (red.), *Generalized Recursion Theory*, tom 94, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, s. 1–38.
- Barwise Jon (1985), „Model-theoretic logics: background and aims”, w: J. Barwise, S. Feferman (red.), *Model-Theoretic Logics*, rozdz. I, Springer Verlag, Nowy Jork, Berlin, Heidelberg, Tokio, s. 3–23.
- Barwise Jon, Cooper Robin (1981), „Generalized quantifiers and natural language”, *Linguistics and Philosophy* 4, s. 159–219.
- Blamey Stephen (1986), „Partial logic”, w: D. Gabbay, F. Guenther (red.), *Handbook of Philosophical Logic*, tom III, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, s. 1–70.
- Boedder Bernard (1891), *Natural Theology*, Longmans, Green & Co., Londyn.
- Boolos George (1975), „On second order logic”, *Journal of Philosophy* 72(16), s. 509–527.
- Bryll Grzegorz (1996), *Metody odrzucania wyrażeni*, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa.
- Campbell Norman Robert (1920), *Physics. The Elements*, Cambridge University Press, Londyn.
- Caws Peter (1991), „Committees and consensus: how many heads are better than one?” *The Journal of Medicine and Philosophy* 16, s. 375–391.
- Cicero Marcus Tullius (1960), „O naturze bogów”, w: *Pisma filozoficzne*, tom I, PWN, Warszawa, s. 3–223.
- Cooper Robin (1983), *Quantification and Syntactic Theory*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Doets Kees (1991), „Axiomatizing universal properties of quantifiers”, *The Journal of Symbolic Logic* 56, s. 901–905.
- Ebbinghaus Heinz-Dieter, Flum Jörg (1999), *Finite Model Theory*, 2. wyd., Springer Verlag, Nowy Jork, Berlin, Heidelberg, Tokio.
- Edwards Paul (1967), „Common consent argument for the existence of God”, w: P. Edwards (red.), *The Encyclopedia of Philosophy*, The Macmillan Company & The Free Press, Nowy Jork, s. 147–155.
- Fine Kit (1975), „Vagueness, truth and logic”, *Synthese* 30, s. 265–300.
- Flum J. (1985), „Characterizing logics”, w: J. Barwise, S. Feferman (red.), *Model-Theoretic Logics*, rozdz. I, Springer Verlag, Nowy Jork, Berlin, Heidelberg, Tokio, s. 77–120.
- Gurevich Yuri (1990), „On finite model theory (extended abstract)”, w: S.R. Buss, P.J. Scott (red.), *Feasible Mathematics*, Birkhäuser Verlag, s. 211–219.
- Habermas Jürgen (1973), „Wahrheitstheorien”, w: H. Fahrenbach (red.), *Wirklichkeit und Reflexion*, Günter Neske, Pfullingen, s. 211–265.
- Habermas Jürgen (1975), *Legitimation Crisis*, Beacon Press, Boston.

- Hájek Petr (1977), „Generalized quantifiers and finite sets”, w: J. Waszkiewicz, A. Wojciechowska, A. Zarach (red.), *Set Theory and Hierarchy Theory*, tom 14, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, s. 91–104.
- Hodge Charles (1871–1873), *Systematic Theology*, T. Nelson & Sons, Nowy Jork.
- Hodges Wilfrid (1983), „Elementary predicate logic”, w: D. Gabbay, F. Guenther (red.), *Handbook of Philosophical Logic*, tom I, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, s. 1–131.
- Jennings Bruce (1991), „Possibilities of consensus: toward democratic moral discourse”, *The Journal of Medicine and Philosophy* 16, s. 447–463.
- Joyce G.H. (1923), *The Principles of Natural Theology*, Longman, Green & Co., Londyn.
- Kaplan David (1966), „Rescher’s plurality-quantification”, *The Journal of Symbolic Logic* 31(1), s. 153–154.
- Karp Carol R. (1964), *Languages with Expressions of Infinite Length*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Keenan Edward L., Stavi Jonathan (1986), „A semantic characterization of natural language determiners”, *Linguistics and Philosophy* 9, s. 253–326.
- Keenan Edward L., Westerståhl Dag (1997), „Generalized quantifiers in linguistics and logic”, w: J. van Benthem, A. ter Meulen (red.), *Handbook of Logic and Language*, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, s. 837–893.
- Keisler H. Jerome (1971), *Model Theory for Infinitary Logic*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Kleene Stephen Cole (1967), *Introduction to Metamathematics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Krajewski Stanisław (1987), „Własności metamatematyczne teorii dedukcyjnych”, w: W. Marciszewski (red.), *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, PWN, Warszawa, s. 132–139.
- Kripke Saul (1975), „Outline of a theory of truth”, *Journal of Philosophy* 72, s. 690–716.
- Krynicky Michał, Mostowski Marcin (1995), „Quantifiers, some problems and ideas”, w: M. Krynicky, M. Mostowski, L.W. Szczurba (red.), *Quantifiers: Logics, Models and Computation*, tom I, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, s. 1–19.
- Krynicky Michał, Mostowski Marcin (1999), „Ambiguous quantifiers”, w: E. Orłowska (red.), *Logic at Work. Essays Dedicated to the Memory of Helena Rasiowa*, Physica-Verlag, Heidelberg, s. 548–565.
- Krynicky Michał, Mostowski Marcin, Szczurba Lesław W. (red.) (1995), *Quantifiers: Logics, Models and Computation*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Langholm Tore (1988), *Partiality, Truth and Persistence*, CSLI Publications, Stanford.
- Lehrer Keith (1987), „Personal and social knowledge”, *Synthese* 73, s. 87–107.
- Lehrer Keith, Wagner Carl (1981), *Rational Consensus in Science and Society. A Philosophical and Mathematical Study*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Levi Isaac (1985), „Consensus as shared agreement and outcome of inquiry”, *Synthese* 62, s. 3–11.
- Lindström Per (1966), „On characterizability in  $L_{\omega_1, \omega}$ ”, *Theoria* 32, s. 165–171.
- Lindström Per (1966a), „First order predicate logic with generalized quantifiers”, *Theoria* 32, s. 186–195.
- Locke John (1955), *Rozważania dotyczące rozumu ludzkiego*, PWN, Warszawa.
- Lopez-Escobar E.G.K. (1965), „An interpolation theorem for denumerably long formulas”, *Fundamenta Mathematicae* LVII, s. 251–272.
- Łukasiewicz Jan (1961), „O sylogistyce Arystotelesa”, w: *Z zagadnień logiki i filozofii*, PWN, Warszawa, s. 220–227.
- Makkai M. (1969), „On the model theory of denumerably long formulas with finite strings of quantifiers”, *The Journal of Symbolic Logic* 34(3), s. 437–459.
- McCarthy Thomas (1984), *The Critical Theory of Jürgen Habermas*, Polity Press, Cambridge.
- Mill John Stuart (1874), *Nature, the Utility of Religion, and Theism*, Longmans, Green, Reader, and Dyer, Londyn.



- Mostowski Andrzej (1957), „On a generalization of quantifiers”, *Fundamenta Mathematicae* **XLIV**, s. 12–36.
- Mostowski Marcin (1994), „Kwantyfikatory rozgałęzione a problem formy logicznej”, w: M. Omyła (red.), *Nauka i język*, tom 32, Znak–Język–Rzeczywistość, Warszawa, s. 201–241.
- Nurmi Hannu (1985), „Some properties of the Lehrer/Wagner method for reaching rational consensus”, *Synthese* **62**, s. 13–24.
- Oehler Klaus (1961), „Der Consensus Omnium als Kriterium der Wahrheit in der antiken Philosophie und der Patristik. Eine Studie zur Geschichte des Begriffs der Allgemeinen Meinung”, w: B. Snell, U. Fleischer (red.), *Antike und Abendland. Beiträge zum Verständnis der Griechen und Römer und ihres nachlebens*, Marion von Schröder Verlag, Hamburg, s. 103–123.
- Ogryzko-Wiewiórowski Henryk (1986), *Problem racjonalności wyboru społecznego*, UMCS, Lublin.
- Olszewski Adam (1992), „Próba formalizacji pewnego aspektu kryterium prawdy przez zgodę większości”, praca licencjacka, PAT, Kraków.
- Patryas Wojciech (1987), *Uznawanie zdań*, PWN, Warszawa.
- Peirce, Charles Sanders (1934), *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Harvard University Press, Cambridge.
- Peirce, Charles Sanders (1997), *Wybór pism semiotycznych*, Znak – Język – Rzeczywistość, Warszawa.
- Peterson Philip L. (1979), „On the logic of ‘few’, ‘many’, and ‘most’”, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **20(1)**, s. 155–179.
- Pogorzelski Witold A. (1981), *Klasyczny rachunek kwantyfikatorów*, PWN, Warszawa.
- Poznański Edward, Wundheiler Aleksander (1934), „Pojęcie prawdy na terenie fizyki”, w: E. Geblewicz, et al. (red.), *Fragmenty filozoficzne. I. Księga pamiątkowa ku uczczeniu piętnastolecia pracy nauczycielskiej w Uniwersytecie Warszawskim Profesora T. Kotarbińskiego*, Nakładem uczniów, Warszawa, s. 97–143.
- Quine Willard van Orman (1976), „A logistical approach to the ontological problem”, w: *The Ways of Paradox and Other Essays*, Harvard UP, Harvard, s. 197–202.
- Quine Willard van Orman (1977), „Teoria mnogości w owczej skórze”, w: *Filozofia logiki*, PWN, Warszawa, s. 99–102.
- Rescher Nicholas (1962), „Plurality-quantification”, *The Journal of Symbolic Logic* **27(3)**, s. 373–374.
- Scott Dana (1965), „Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers”, w: J. Addison, L. Henkin, A. Tarski (red.), *The Theory of Models. Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, s. 329–341.
- Seneka (1998), *Listy moralne do Lucylusza*, Alfa, Warszawa.
- Sher Gila (1991), *The Bounds of Logic. A Generalized Viewpoint*, The MIT Press, Cambridge, MA.
- Sher Gila (1997), „Być terminem logicznym”, w: J. Woleński (red.), *Filozofia logiki*, Spacja, Warszawa, s. 143–181.
- Śłupecki Jerzy (1959), „Funkcja Łukasiewicza”, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Wrocławskiego. Mat.-Fiz.-Astr.* **3(2)**, s. 33–40.
- Śłupecki Jerzy, Bryll Grzegorz, Wybraniec-Skardowska Urszula (1971), „Theory of rejected propositions”, *Studia Logica* **29**, s. 75–123.
- Śłupecki Jerzy, Bryll Grzegorz, Wybraniec-Skardowska Urszula (1972), „Theory of rejected propositions”, *Studia Logica* **30**, s. 97–145.
- Spasowski Maciej (1983), „Własności dualnych odpowiedników operacji konsekwencji”, *Acta Universitatis Wratislaviensis 605, Prace Filozoficzne XXXIV, Logika* **10**, s. 71–116.
- Strong Augustus Hopkins (1907), *Systematic Theology*, American Baptist Publication Society, Filadelfia.
- Tarski Alfred (1958), „Remarks on predicate logic with infinitely long formulas”, *Colloquium Mathematicum* **VI**, s. 171–176.
- Tharp Leslie H. (1975), „Which logic is the right logic?” *Synthese* **33**, s. 1–21.
- Trahtenbrot Boris A. (1950), „Niemożność algoritmu dla problemu rozróżnienia na koniecznych klasach”, *Doklady Akademii Nauk CCCP* **LXX(4)**, s. 569–572.

- Turner Raymond (1990), *Truth and Modality for Knowledge Representation*, Pitman Publishing, Londyn.
- van Benthem Johan (1983), „Determiners and logic”, *Linguistics and Philosophy* 6, s. 447–478.
- van Benthem Johan (1984), „The logic of semantics”, w: F. Landman, F. Veltman (red.), *Varieties of Formal Semantics*, Foris Publications, Dordrecht, s. 55–80.
- van Benthem Johan (1984a), „Questions about quantifiers”, *The Journal of Symbolic Logic* 49(2), s. 443–466.
- van Benthem Johan (1984b), *Partiality and Nonmonotonicity in Classical Logic*, Report No. CSLI-84-12, Stanford.
- van Benthem Johan (1986), „A linguistic turn: new directions in logic”, w: R. Barcan Marcus, G. Dorn, P. Weingartner (red.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science VII*, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, s. 205–240.
- van Benthem Johan (1986a), *Essays in Logical Semantics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- van Benthem Johan (1995), „Quantifiers and inference”, w: M. Krynicki, M. Mostowski, L.W. Szerzba (red.), *Quantifiers: Logics, Models and Computation*, tom II, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, s. 1–20.
- van Benthem Johan, Doets Kees (1983), „Higher-order logic”, w: D. Gabbay, F. Guentner (red.), *Handbook of Philosophical Logic*, tom I, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, s. 275–329.
- van Benthem Johan, ter Meulen Alice (red.) (1985), *Generalized Quantifiers in Natural Language*, Foris Publications, Dordrecht.
- van Benthem Johan, Westerståhl Dag (1995), „Directions in generalized quantifier theory”, *Studia Logica* 55(3), s. 389–419.
- van Deemter Kees (1985), „Generalized: Finite versus infinite”, w: J. van Benthem, A. ter Meulen (red.), *Generalized Quantifiers in Natural Language*, Foris Publications, Dordrecht, s. 145–159.
- van der Does Jaap, van Eijck Jan (red.) (1996), *Quantifiers, Logic, and Language*, CSLI Publications, Stanford.
- van der Does Jaap, van Eijck Jan (1996a), „Basic quantifier theory”, w: J. van der Does, J. van Eijck (red.), *Quantifiers, Logic, and Language*, CSLI Publications, Stanford, s. 1–45.
- van Eijck Jan (1991), „Quantification”, w: A. von Stechow, D. Wunderlich (red.), *Semantics. An International Handbook of Contemporary Research*, rozdz. Semantics of functional words, Walter de Gruyter, Berlin, s. 465–487.
- van Eijck Jan (1996), „Quantifiers and partiality”, w: J. van der Does, J. van Eijck (red.), *Quantifiers, Logic, and Language*, CSLI Publications, Stanford, s. 105–144.
- van Fraassen Bas (1966), „Singular terms, truth-value gaps, and free logic”, *Journal of Philosophy* 68, s. 481–495.
- van Fraassen Bas (1966a), „The completeness of free logic”, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 12, s. 219–234.
- van Fraassen Bas (1968), „Presupposition, implication, and self-reference”, *Journal of Philosophy* 65, s. 136–152.
- van Fraassen Bas (1969), „Presuppositions, supervaluations and free logic”, w: K. Lambert (red.), *The Logical Ways of Doing Things*, Yale University Press, s. 67–91.
- Wagner Carl (1985), „On the formal properties of weighted averaging as a method of aggregation”, *Synthese* 62, s. 97–108.
- Westerståhl Dag (1984), „Some results on quantifiers”, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 25(2), s. 152–170.
- Westerståhl Dag (1985), „Logical constants in quantifier languages”, *Linguistics and Philosophy* 8, s. 387–413.
- Westerståhl Dag (1985a), „Determiners and context sets”, w: J. van Benthem, A. ter Meulen (red.), *Generalized Quantifiers in Natural Language*, Foris Publications, Dordrecht, s. 45–71.
- Westerståhl Dag (1989), „Quantifiers in formal and natural languages”, w: D. Gabbay, F. Guentner (red.), *Handbook of Philosophical Logic*, tom IV, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, s. 1–131.

- Westerståhl Dag (1995), „Quantifiers in natural language: a survey of some recent work”, w: M. Krynicki, M. Mostowski, L.W. Szczerba (red.), *Quantifiers: Logics, Models and Computation*, tom 1, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, s. 359–408.
- Westerståhl Dag (1996), „Relativisation of quantifiers in finite models”, w: J. van der Does, J. van Eijck (red.), *Quantifiers, Logic, and Language*, CSLI Publications, Stanford, s. 375–383.
- Woleński Jan (1992), „Konsekwencje odrzuceniowe a porównywanie teorii”, *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej im. Powstańców Śląskich w Opolu, Matematyka*, s. 105–111.
- Woleński Jan (1993), „Samozwrotność i odrzucanie”, *Filozofia Nauki* 1, s. 89–102.
- Woleński Jan (1994), „Logika i fałsz”, w: J. Perzanowski, A. Pietruszczak, C. Gorzka (red.), *Filozofia/Logika: Filozofia logiczna 1994*, Wyd. UMK, Toruń, s. 161–176.
- Woleński Jan (1994a), „In defence of the first-order thesis”, w: P. Kolář, V. Svoboda (red.), *Logica 93*, Filosofia, Praga, s. 1–11.
- Woleński Jan (1995), „Logic and mathematics”, w: W. DePauli-Schimanovich (red.), *The Foundational Debate*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, s. 197–210.
- Wójcicki Ryszard (1973), „Dual counterparts of consequence operations”, *Bulletin of the Section of Logic* 2(1), s. 55–57.
- Wybraniec-Skardowska Urszula (1969), „Teoria zdań odrzuconych”, w: U. Wybraniec-Skardowska, G. Bryll (red.), *Z badań nad teorią zdań odrzuconych*, WSP, Opole, s. 5–131.



# INDEKS NAZWISK

Pochylone numery stron odnoszą do przypisów na tych stronach.

- Ajdukiewicz, K., 33  
Apel, O., 20  
Arystoteles, 12, 17–18, 27, 128, 135, 151
- Baird, D., 26  
Barwise, J., 35, 37, 37, 38, 38, 41, 42, 42, 46,  
47, 48, 48, 49, 49, 50, 53, 100  
Blamey, S., 65, 66, 72, 79  
Boedder, B., 13, 18–20, 151  
Boolos, G., 49  
Brown, M., 129  
Bryll, G., 33
- Campbell, N.R., 21, 22  
Caws, P., 12  
Cooper, R., 35, 37, 38, 38, 41, 42, 46, 47, 48,  
48, 49, 50, 53, 64, 64, 100  
Cyceron, M.T., 12, 18–19, 151
- Doets, K., 37, 39, 47, 97, 108
- Ebbinghaus, H.-D., 108  
Edwards, P., 18
- Fine, K., 72  
Flum, J., 37, 46, 108
- Gurevich, Y., 35
- Habermas, J., 13, 23–24, 151  
Hodge, Ch., 13, 18–19, 151  
Hodges, W., 54  
Homer, 17
- Jennings, B., 12  
Joyce, G.H., 13, 18–19, 151
- Kaplan, D., 46, 96  
Karp, C., 108, 108, 123  
Keenan, E.L., 35, 37, 39–41, 50  
Keisler, H.J., 108, 108, 122, 122
- Kleene, S.C., 67  
Krajewski, S., 107  
Kripke, S., 63  
Krynicky, M., 35, 36, 100
- Langholm, T., 70, 72, 74, 74, 93, 93, 94, 95  
Lehrer, K., 13, 25, 24–26, 151  
Levi, I., 11, 26  
Linström, P., 35, 36, 38, 39, 49, 108  
Locke, J., 19  
Lopez-Escobar, E.G.K., 108
- Łukasiewicz, J., 33
- Makkai, M., 108  
McCarthy, T., 24  
Mill, J.S., 19  
Montague, R., 38  
Mostowski, A., 35, 36, 39, 47  
Mostowski, M., 35, 36, 36, 97, 100
- Nurmi, H., 26
- Oehler, K., 17, 17, 18  
Olszewski, A., 100
- Patryas, W., 32, 67  
Peirce, Ch.S., 13, 20, 151  
Peterson, P., 44, 48  
Popper, K., 67  
Poznański, E., 13, 20–23, 27, 151  
Protagoras, 18
- Quine, W.V.N., 49
- Rescher, N., 44, 46, 46, 47, 48, 79
- Scott, D., 108, 108  
Seneka, 12, 18, 151  
Sher, G., 49  
Stupeccki, J., 33

- Spasowski, M., 33  
Stavi, J., 35, 37, 39, 50  
Strong, A.H., 18
- Tarski, A., 108, 130  
ter Meulen, A., 35  
Tharp, L., 49  
Trahtenbrot, B., 96, 96  
Turnau, P., 93  
Turner, R., 75
- van Benthem, J., 35, 39, 39, 41, 42, 47, 50, 53,  
97, 100, 108
- van Deemter, K., 39, 42, 99  
van der Does, J., 35, 41, 47  
van Eijck, J., 35, 37, 39, 41, 47, 48, 50, 70  
van Fraassen, B., 67–69, 93
- Wagner, C., 13, 25, 24–26, 151  
Westerståhl, D., 35, 37, 37, 38, 39, 39, 40, 40,  
41, 41, 43, 44, 46, 46, 48, 48, 50,  
53, 96, 96, 97, 134
- Woleński, J., 33, 49  
Wójcicki, R., 33  
Wundheiler, A., 13, 20–23, 151  
Wybraniec-Skardowska, U., 33

## SUMMARY

The objective of this book is to provide a logical analysis of the consensus criterion of truth, i.e. the criterion stating that a sentence is true if and only if everybody in a population accepts it. Common agreement is treated as a special case of majority agreement, the later being analyzed in the framework of first order predicate logic extended by the addition of the majority quantifier. The logical analysis of majority agreement is preceded by a historical introduction to the subject.

The substantial part of the book consists of chapters 4.-7. In chapter 4. majority is analysed with the help of a unary quantifier and in chapter 5. – a binary quantifier. Both are interpreted in the framework of generalized quantifiers. It is argued that it is the binary quantifier that should be treated as more adequately formalizing the natural language majority quantifier. In chapters 4. and 5. it is assumed that we are taking into consideration only models of finite domains. This restriction is withdrawn in chapters 6. and 7. where it is shown how with the help of the notion of semipartial models we can account for the fact that the populations considered are always finite without the limitations of the theory of finite models. Additional assumptions, concerning the number of people in considered populations, enable a definition of a (pseudo)-majority quantifier in the language  $L_{\omega_1\omega}$ . This leads to a formulation of a theory of majority based on  $L_{\omega_1\omega}$ , which is complete with respect to semipartial models of the theory.

Several definitions of the consensus criterion of truth are proposed. the final one is formulated in terms of supervaluational satisfaction in semipartial models. It is argued that the criterion defined according to the final proposal fulfills intuitive constraints concerning assertions, majority, and truth that any formal account of majority agreement is supposed to fulfill.

The last chapter concerns questions of bivalence, monotonicity, the scope of application of the criterion, and the matter of treating consensus as a special case of majority agreement. The majority criterion turns out to be nonmonotonic and not bivalent. It is argued that the scope of application of the criterion depends upon our philosophical theories concerning truth, with one exception: the logic of majority agreement demands that this criterion should not be applied to the very sentences stating the agreement.

# DIALOGIKON

Seria wydawnicza „Dialogikon” uruchomiona została w roku 1995, staraniem krakowskiego środowiska filozoficzno-logicznego. Ukazujące się w niej tytuły (polskie i angielskie) poświęcone są historycznym i ogólnopoznawczym zagadnieniom logiki i filozofii, zwłaszcza filozofii praktycznej. Niektóre tytuły zamierzone są jako opracowania o charakterze podręcznikowym; redaktorzy są bowiem przekonani, że nie istnieje ścisła granica oddzielająca badania od upowszechniania ich wyników. Chcieliby przy tym, aby o charakterze serii decydowała nie tylko problematyka poszczególnych tytułów, lecz także styl argumentacji uprawianej przez autorów: styl przyjazny logice i czytelnikowi.

Dotychczas ukazały się:

- Vol. I: Ewa Żarnecka-Biały, *Noises in the History of Logic* 1995
- Vol. II: Ewa Żarnecka-Biały, *Historia logiki dawniejszej: Teksty i komentarze* 1995
- Vol. III: Czesław Porębski, *Polish Value Theory* 1996
- Vol. IV: Jacek Widomski, *Ontologia liczby: Wybrane zagadnienia z ontologii liczby w starożytności i średniowieczu* 1996
- Vol. V: Wojciech Suchoń, *Sylogistyka: Interpretacja zakresowa* 1996
- Vol. VI: Ewa Żarnecka-Biały (red.), *Między prawdą i normą a błędem* 1998
- Vol. VII: Krzysztof Gurba & Ewa Żarnecka-Biały (red.), *Philosophy and Error* 1998
- Vol. VIII: Jan Woleński, *Essays in the History of Logic and Logical Philosophy* 1999

W przygotowaniu:

**Bibl. Jag**

- Vol. X: Aldona Litwiniszyn *O przesądzie. Studium filozoficzne*

Autorski udział w kolejnych tomach zadeklarowali między innymi: Wojciech Gasparski, Ewa Grabska, Krzysztof Gurba i Jan Szrednicki. Planowana jest także kolejna praca zbiorowa poświęcona filozoficzno-logicznej problematyce błędów.

Redaktorzy serii serdecznie zapraszają nowych autorów do współpracy. Krótkie informacje i polemiki mogą ukazać się na stronie www pod adresem:

<http://www.jetta.if.uj.edu.pl/UJ/WFLZ/JF/ZFNP/~Dialog>

Dystrybucja:

Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego  
31-044 Kraków, ul. Grodzka 26  
tel. (012) 636 80 00 w. 2022, 2023, 0604 41 45 68, fax (012) 430 19 95  
e-mail: [wydaw@adm.uj.edu.pl](mailto:wydaw@adm.uj.edu.pl)  
Konto: BPH SA IV/O Kraków; numer: 10601389-320000478769









**PRAWDA** i jej kryteria: kategorie filozoficzne stanowiące odwieczny przedmiot dociekań i niekończących się polemik. Autorka, dr Katarzyna Kijania-Placek, podejmuje problematykę konsensualnego kryterium prawdy. W dyskusjach nad kryteriami prawdy kryterium to jest przywoływane rzadziej od innych, gdyż nieracjonalne wydają się próby przydawania mu waloru uniwersalnego. Autorka zwraca jednak uwagę na stosowalność tego kryterium w odniesieniu do pewnych wybranych rodzajów zdań, na przykład – zdań wyrażających oceny etyczne, czy też od takich ocen pośrednio zależnych. Nie chce przy tym sama zajmować stanowiska co do granic stosowalności kryterium powszechnej zgody, uwagę koncentruje na zbudowaniu odpowiedniej formalno-logicznej aparatury, pomocnej w zrozumieniu mechanizmu wiązania kategorii *prawdziwości* z kategorią *konsensusu*.

Podejmowanie tego rodzaju analiz – to rzecz wielkiej wagi dla każdego, kto **FILOZOFUJĄC** – chce to robić w sposób **ODPOWIEDZIALNY**.

**Katarzyna Kijania-Placek**: absolwentka filozofii Uniwersytetu Jagiellońskiego, młoda wiekiem, w pełni dojrzałe uprawiająca filozoficzną profesję.

Jest uczennicą profesora Jana Woleńskiego, pod jego też kierunkiem przygotowała i obroniła na Uniwersytecie Jagiellońskim w roku 1999 pracę doktorską, której wyniki przedstawione są w tej właśnie książce.



**ISBN 83-233-1320-2**  
**ISSN 1505-4594**