Edukacja 2017, 1(140), 7–26
doi: 10.24131/3724.170101
issn: 0239-6858

Konstruktywizm Jeana Piageta i koncepcja zmysłu liczby a edukacja matematyczna

Monika Szczygieł
Instytut Psychologii, Uniwersytet Jagielloński*

Twierdzenie Jeana Piageta, że rozwój poznawczy dziecka jest podstawą nabywania i rozwijania pojęcia liczby oraz umiejętności operowania liczbami, wywarło ogromny wpływ na sposób nauczania matematyki. Od czasu pojawienia się wyników badań wskazujących na istnienie biologicznych podstaw operowania liczbami koncepcja Piageta zaczęła być szeroko krytykowana przez przedstawicieli neuropsychologii poznawczej. Dowody na to, że istnieje wrodzone, niezależne od systemu językowego i edukacji podłoże powstawania i rozwoju reprezentacji liczbowej, wpłynęły na sposób tworzenia programów kształcenia i zaleceń metodycznych w Europie Zachodniej i Stanach Zjednoczonych. Pomimo że dyskusja na temat możliwości nabywania i rozwoju pojęcia liczby przez dzieci toczy się od wielu lat, nadal trudno mówić o jednoznacznych rozstrzygnięciach w tej kwestii. Celem tego artykułu jest krytyczna analiza obu stanowisk teoretycznych oraz formułowanych w ich ramach zaleceń dotyczących praktyki edukacyjnej.

Słowa kluczowe: psychologia edukacji, edukacja matematyczna, pojęcie liczby, koncepcja Piageta, koncepcja zmysłu liczby.

„...teoria jest także czymś najbardziej praktycznym, co można sobie pomyśleć i poniekąd kwintesencją praktyki...”[1]
Ludwig E. Boltzmann (1890)

Kwestia trudności matematycznych u dzieci rozpoczynających edukację szkolną nie jest nowym zagadnieniem. Mimo że zagadnienie osiągnięć matematycznych dzieci jest szeroko dyskutowane, nadal brakuje dobrych rozwiązań w zakresie edukacji matematycznej nie tylko w Polsce, lecz także na świecie. Wydaje się, że rozwiązaniem, które optymalizowałoby proces kształcenia, może być oparcie programu nauczania i metod nauczania na aktualnych doniesieniach z zakresu psychologii. Niestety, nie zawsze da się w sposób bezpośredni przełożyć osiągnięcia z gruntu teoretycznego na grunt praktyki. W obszarze psychologii toczą się dyskusje dotyczące natury reprezentacji liczb i trudno o jednoznaczne ustalenia w tym względzie.

W artykule zostaną przedstawione dwie koncepcje, które w ostatnich latach wywarły ogromny wpływ na system edukacji: koncepcja Jeana Piageta i koncepcja zmysłu liczby[2]. Pierwsza – w Polsce od lat aprobowana – w Europie Zachodniej i Stanach

[1] Cytat ten pochodzi z książki *Populäre Schriften* (s. 57, tłum. J. Wawrzyniak i J. Wawrzyniak). Powiedzenie „Nie ma nic praktyczniejszego, niż dobra teoria” jest przypisywane Kurtowi Lewinowi, ale jak podaje Anne Peters (2013), Boltzmann był prekursorem tego stanowiska.

[2] W artykule angielski termin „number sense” jest tłumaczony jako „zmysł liczby” za: Brożek i Hohol (2014). Pojęcie to jest w polskiej literaturze tłumaczone także jako „zmysł numeryczny” lub „instynkt numeryczny” (Mackiewicz, 2012).

* Adres: ul. Ingardena 6, 30-060 Kraków.
E-mail: monika.szczygiel@doctoral.uj.edu.pl

Zjednoczonych została wyparta przez tę drugą. Przedstawienie licznych tez i wyników badań prowadzonych przez zwolenników obu koncepcji przekroczyłoby zakres objętości tej pracy. Jednak zarysowanie problemów pojawiających się w ramach tych stanowisk (zwłaszcza podejścia do nabywania i rozwoju pojęcia liczby przez dzieci), pozwoli bardziej świadomie spojrzeć na psychologiczne podstawy edukacji matematycznej.

Koncepcja Jeana Piageta

Wiele lat swojej działalności naukowej Piaget poświęcił badaniom empirycznym nad rozwojem myślenia u dzieci. Twierdził, że podstawowe zasady rozwoju poznawczego są takie same jak rozwoju biologicznego. Rozwój intelektualny jest procesem adaptacji do środowiska i stanowi rozszerzenie rozwoju biologicznego (Piaget, 1966; Wadsworth, 1998). Zdaniem Piageta (1966) dzieci w chwili narodzenia mają wyłącznie zestaw prostych odruchów (ssania, chwytania, wodzenia za ruchomym obiektem). Nie mają struktur logicznego myślenia, a powolne tempo rozwoju myślenia logicznego stanowi ograniczenie ich zdolności rozumienia świata i uczenia się.

Stanowisko Piageta (1952, za: Oszwa, 2009) na temat warunków prawidłowego rozwijania umiejętności matematycznych dzieci jest jednoznaczne. Badacz twierdzi, że rozwój poznawczy dziecka jest podstawą nabywania umiejętności operowania liczbami, a samo pojęcie liczby rozwija się równolegle z rozwojem logicznego myślenia. Opanowanie pojęć i procedur matematycznych wymaga stosowania operacji konkretnych i formalnych do rozwiązywania zadań matematycznych. Nie istnieje specjalny typ rozumowania matematycznego. Rozumienie matematyki ma podstawy w rozumowaniu logiczno-matematycznym (Inhelder i Piaget, 1970). Dlatego przyczyn trudności matematycznych u dzieci w wieku szkolnym upatruje się w pozostawaniu w okresie przedoperacyjnym (typowym dla wieku 2–7 lat; Gruszczyk-Kolczyńska, 2012).

Teoria Piageta zakłada, że umiejętności logiczne i matematyczne są konstruowane w umyśle dziecka stopniowo, w ramach obserwowania, internalizowania i abstrahowania prawidłowości dotyczących otoczenia. Wiedza i umiejętności nabywane przez człowieka to wynik doświadczenia i edukacji. Dzieci rodzą się bez wiedzy i założeń na temat arytmetyki, a zrozumienie pojęcia liczby jest możliwe dzięki wieloletnim doświadczeniom. Ukształtowanie pojęcia liczby wymaga, aby dzieci zrozumiały pewne zasady dotyczące operowania liczbami. Nie należy sądzić, że opanowanie pojęcia liczby jest tożsame z liczeniem słownym. Dzieci muszą wyabstrahować liczbę od cech fizycznych obiektów zbioru (ich koloru, kształtu, rozmiaru). Opanowanie zasady stałości liczby obiektów wiąże się ze zrozumieniem, że zmiana miejsca obiektów w zbiorze nie ma wpływu na jego liczebność. Piaget wskazywał, że pojęcie liczby rozwija się dzięki działaniu na obiektach (przyporządkowywanie elementów jednego zbioru obiektom z drugiego zbioru). Szeregowanie liczb według ich wielkości jest możliwe dzięki opanowaniu zasady przechodniości i odwracalności (Piaget i Inhelder, 1993).

Ustalenia Piageta dotyczące nabywania i rozwoju pojęcia liczby opierają się na przeprowadzonych przez niego licznych eksperymentach. Metoda tego badacza składa się z dwóch części: w pierwszej fazie eksperymentu przedstawia się dzieciom dwa równoliczne rzędy szklanych kulek, ułożone w takich samych odległościach od siebie. W drugiej fazie eksperymentator rozsuwa na oczach dziecka jeden z rzędów. Staje się on dłuższy od drugiego, mimo że liczba kulek jest taka sama. W obu warunkach eksperymentator zadaje dziecku to samo pytanie: Czy w rzędach jest tyle samo kulek, czy w którymś rzędzie jest więcej kulek? Dziecko

4–5-letnie, poproszone o dokonanie oceny dwóch rzędów, w drugim warunku zwykle wskazuje dłuższy rząd jako ten, który ma więcej elementów, mimo że w pierwszym warunku udzieliło poprawnej odpowiedzi. Piaget dowodzi, że w okresie przedoperacyjnym ocena percepcyjna przeważa nad oceną poznawczą. Pojawiający się konflikt między percepcją a rozumowaniem jest rozwiązywany na korzyść percepcji (Piaget, 1967; Wadsworth, 1998). Wiąże się to z niezdolnością dziecka do odwracania operacji. Jak podaje Piaget, dzieci do 4.–5. roku życia nie rozumieją pojęcia liczby (popełniają błąd w teście zachowania stałości liczby). Zachowanie stałości oznacza, że liczba (np. kulek) pozostaje taka sama bez względu na zmiany dokonywane np. w wymiarze długości rzędu składającego się z kulek. Dziecko dopiero w wieku 6–7 lat, kiedy opanuje zasadę odwracalności i zaczyna rozumieć istotę przekształceń, jest zdolne do zrozumienia stałości liczby. Wówczas staje się świadome, że zmiana długości rzędu obiektów nie wiąże się ze zmianą liczby elementów w rzędzie (Piaget, 1967; Wadsworth, 1998).

Krytyka koncepcji Piageta

Wyniki badań Piageta wywarły ogromny wpływ na innych badaczy. Zarówno zwolennicy, jak i przeciwnicy jego teorii podejmowali liczne próby prowadzenia badań dotyczących nabywania pojęć matematycznych przez dzieci. Pierwsza fala krytyki, będąca bezpośrednią odpowiedzią na uzyskane przez Piageta wyniki, dotyczyła przede wszystkim metodologii prowadzenia badań oraz alternatywnych sposobów wyjaśniania otrzymanych wyników (Gelman i Baillargeon, 1983; Lourenço i Machado, 1996). Interpretacje badaczy nie wykraczały jednak poza paradygmat badań Piagetowskich (możliwości nabywania pojęcia liczby w kontekście ogólnych zdolności poznawczych).

Ustalenia dotyczące zdolności różnicowania liczebności wśród niemowląt i zwierząt, pojawiające się od lat 80. XX w., które nadal są intensywnie rozwijane, stanowią drugie źródło krytyki postulatów Piageta. Badania te prowadzone są w odmiennym paradygmacie i nie odnoszą się w sposób bezpośredni do teorii Piageta. Niemniej uzyskane wyniki doprowadziły krytyków do przekonania, że Piaget mylił się w kwestii czasu i natury nabywania oraz rozwoju pojęcia liczby u dzieci. Biorąc pod uwagę poglądy przedstawiane przez zwolenników obu koncepcji, trudno jednak mówić o jednoznacznych ustaleniach w tej kwestii.

Orlando Lourenço i Armando Machado (1996) dowiedli, że twierdzenia Piageta były wielokrotnie krytykowane ze względu na brak zrozumienia jego teorii (przede wszystkim zarzuca się jego badaniom błędy metodologiczne i błędne interpretacje uzyskanych wyników). Sami jednak nie twierdzili, że Piaget miał w każdej kwestii rację. Na podstawie zadania Piagetowskiego Jacques Mehler i Thomas Bever (1967) stworzyli własną wersję eksperymentalną zadania. Wyglądało następująco: w pierwszej fazie ułożono cztery szklane kulki w rzędzie, w dużych odstępach; w drugim rzędzie ułożono sześć kulek blisko siebie, w związku z tym rząd złożony z czterech kulek był dłuższy. W drugiej fazie, zamiast szklanych kulek wykorzystano czekoladowe cukierki M&M's oraz poproszono dzieci o wskazanie rzędu, z którego chcą zjeść cukierki. W pierwszej fazie dzieci pytane o to, gdzie jest więcej kulek, zwykle podawały niepoprawną odpowiedź. W drugim, dzieci zwykle wybierały rząd, w którym było więcej cukierków, niezależnie od jego długości. Na podstawie przeprowadzonego badania autorzy wskazali, że dzieci będące w wieku między 2;6 a 3;2 lata prawidłowo różnicują liczbę przedmiotów w rzędach, w wieku między 3;2 a 4;6 lat wskazują dłuższy rząd z mniejszą liczbą obiektów jako ten, w którym jest więcej obiektów, a po 4;6. roku życia znowu prawidłowo wskazują dłuższy rząd.

Konkludując, sytuacja badawcza stworzona przez Piageta nie pozwala dzieciom ujawnić własnych zdolności. Jednak młodsze, gdy zapewni się im odpowiednie warunki, ujawniają występowanie logicznych zdolności poznawczych wcześniej, niż sądzono dotychczas. Mehler i Bever (1967) byli zdania, że niezdolność do rozpoznania, czy mamy do czynienia z tą samą liczbą obiektów, jest tymczasową fazą występującą u rozwijającego się dziecka. Zdolność ta nie rozwija się stopniowo, ale raczej jest nabywana ponownie. Skoro bardzo małe dzieci z powodzeniem rozwiązują zadanie zachowania stałości liczby, to nie mają one zdolności zależnych od struktur logicznych operacji poznawczych. Można także założyć, że rozwijają jawne rozumienie tych operacji: w wieku pięciu lat rozwiązują ten sam problem przez liczenie kulek w każdym rzędzie. Autorzy sądzą, że czasowa niezdolność do rozwiązywania problemów wymagających umiejętności rozpoznawania równoliczności, odzwierciedla okres zależności od strategii percepcyjnych. Istnienie okresu, w którym dzieci nie rozpoznają, czy zbiory są równoliczne, pozwala wnioskować, że nie są one zdolne do uwolnienia się od strategii percepcyjnej. Badacze wskazali, że ten etap jest wyjątkiem w poznawczym rozwoju człowieka.

Wyniki tego badania były szeroko dyskutowane. Mehler i Bever (1967) twierdzili, że zachowanie dziecka w teście zachowania stałości liczby jest wynikiem umiejętności rozpoznawania intencji mówcy, rozumienia wiedzy i przekonań innych osób. Dzieci starsze w standardowej procedurze interpretują pytanie jako podchwytliwe. Słysząc kolejny raz to samo pytanie, dziecko zaczyna się zastanawiać, czy wynika ono z udzielenia błędnej odpowiedzi czy z oczekiwania innej. Sarah-Jane Blakemore i Uta Frith (2008) podały, że zastosowana przez Piageta procedura badawcza jest dla dzieci nienaturalna. Stanislas Dehaene (2011) wskazał natomiast, że rezultaty testu zachowania stałości liczby Mehlera i Bevera, są zależne od kontekstu i poziomu motywacji dziecka.

Piaget (1968) odniósł się do krytyki Mehlera i Bevera (1967), przeprowadzając eksperyment według ich wskazówek. Uzyskane przez niego rezultaty nie potwierdziły wyników tych badaczy. W fazie porównywania dwóch równolicznych rzędów, z których jeden był wydłużony, wszystkie dzieci wskazywały, że jeden z dwóch rzędów ma więcej elementów, a żadne z dzieci nie dało odpowiedzi wskazującej na równoliczność obiektów. W przypadku nierównolicznych rzędów, z których jeden był rozłożony szerzej od drugiego, prawie połowa dzieci wybrała w sposób niepoprawny rząd z mniejszą liczbą elementów jako ten, w którym jest ich „więcej", pozostałe dzieci dokonały poprawnego wyboru. W odniesieniu do fazy, w której rzędy były równoliczne, a elementy ułożone w stosunku 1 : 1 względem siebie, wskazania dzieci były bardzo zróżnicowane, często niekonsekwentne i zależały od rodzaju zadanego pytania. Najmłodsze dziecko, które wskazało na równoliczność, było w wieku 3;4 lat. Piaget (1968) zarzucał autorom badania, że stosowali pojęcie zachowania liczby, mimo że stosowana przez nich technika była skonstruowana na wzór zadania mierzącego zachowanie stałości liczby: ilościowe pojęcie (szczególnie pojęcie równoważności) jest trudne do zwerbalizowania przez małe dzieci.

Zadanie Mehlera i Bevera (1967) polegało na porównaniu dwóch zbiorów bez wprowadzania modyfikacji w rzędach, a istotą zadania zachowania stałości liczby, zdaniem Piageta, jest rozumienie niezmienności charakterystyki obiektów, pomimo ich przekształceń. Piaget wskazywał także, że zadanie Mehlera i Bevera jest pozbawione konfliktu poznawczego, a operowanie pojęciem liczby wiąże się z umiejętnością ignorowania mylących sygnałów nawet w sytuacji konfliktowej. Zdaniem Piageta dzieci nie rozumiały pojęć „więcej" i „mniej" i w sposób systematyczny wybierały rząd, który był bliżej nich. Mehler i Bever

(1968) odrzucili te zarzuty, wskazując, że dzieci reagują, jakby słowa „więcej" i „mniej" rozumiały tak: wybierają rząd w którym jest więcej kulek, gdy jest krótszy, dłuższy lub tej samej długości co rząd odniesienia. Konsekwentnie nie wybierają dłuższego lub gęstszego rzędu, kiedy ma on taką samą liczbę obiektów jak rząd odniesienia. Badacze odrzucili także zarzut, że znaczenie dla uzyskanych wyników miał fakt, że dzieci wybierały bliższy rząd, ponieważ układ przedmiotów w badaniu był randomizowany: większa liczba przedmiotów mogła znaleźć się bliżej lub dalej dziecka. Badacze jednak przyznali słuszność Piagetowi w kwestii nazewnictwa zadania: stwierdzili, że niesłusznie nazwali je zadaniem „zachowania stałości liczby". Ich technika pozwalała dzieciom w sposób niewerbalny wskazać rząd, z którego chcą otrzymać cukierki, co pozwoliło zakwalifikować zadanie jako stworzone na wzór zadania Piagetowskiego. Należy także podkreślić, że interpretacja wykonania zadania stworzonego przez Mehlera i Bevera ma ukryte założenie: dzieci chcą otrzymać więcej cukierków.

Badanie Mehlera i Bevera nie jest jedynym podważającym stosowność procedury Piageta. James McGarrigle i Margaret Donaldson (1974) przedstawili wyniki swojego eksperymentu. Połowa dzieci biorących w nim udział rozwiązywała zadania o standardowej procedurze stosowanej przez Piageta, w której ingerencji w długość rzędu żetonów dokonywał eksperymentator. Drugiej połowie przedstawiono zadanie, w którym ingerencji dokonał w sposób „przypadkowy" miś wykorzystany w procedurze. W tym czasie badacz był odwrócony (szukał czegoś). Gdy badacz odwrócił się w stronę dziecka, komentował, że miś znowu wszystko pomieszał, po czym kolejny raz zadawał pytanie, gdzie jest więcej żetonów. Większość dzieci w tej fazie poprawnie odpowiadało na pytanie o liczbę żetonów. Dzieci podawały jednak błędną odpowiedź, gdy przekształcenie było dokonywane przez eksperymentatora.

McGarrigle i Donaldson (1974) zinterpretowali swoje wyniki w kontekście norm konwersacyjnych. Dzieci interpretują to samo pytanie w sposób zależny od kontekstu, a ponadto przechodzą test zachowania stałości liczby Piageta wtedy, gdy pytanie ma sens. Dzieci wierzą, że eksperymentator robi coś sensownego. Jednak nie ma sensu pytać, czy rzędy mają taką samą liczbę elementów oraz – po intencjonalnym ich rozmieszczeniu – znów zadać to samo pytanie. Jeśli zadajemy to samo pytanie dwa razy, to dzieci mogą myśleć, że coś musiało się zmienić, w przeciwnym wypadku eksperymentator nie zadałby pytania po raz drugi (Gold, 1984).

Na znaczenie kontekstu w interpretacji wyników testu zachowania stałości liczby zwróciła uwagę także Alina Szemińska (1981), wieloletnia współpracownica Piageta, która przeprowadziła serię eksperymentów z wykorzystaniem obiektów znanych dziecku z codzienności. W swoich badaniach wykorzystywała zestaw pasujących do siebie elementów. W dwóch rzędach układała: kwiatki i wazony, domki i dachy, koszyki bez uchwytów i uchwyty, filiżanki i spodki, jajka i kieliszki do jajek. Dzieci w tej procedurze podawały poprawne odpowiedzi już w wieku czterech lat, czyli prawie dwa lata wcześniej niż w klasycznym teście zachowania stałości liczby. Sam Piaget nazywał to zjawisko „pseudokonserwacją" (pozornym zachowaniem stałości liczby; Semadeni, 2016). Zarówno Piaget, jak i Szemińska wskazywali, że wykonanie klasycznego testu zachowania stałości liczby wymaga wyższego poziomu rozwoju poznawczego, niż wykonanie zadania z użyciem konkretnych, znanych dziecku i wzajemnie uzupełniających się przedmiotów. Zbigniew Semadeni (2016) podał jeszcze jedno wyjaśnienie tego zjawiska: cel pytania w zadaniach Szemińskiej był dla dzieci jasny: każdy dom powinien mieć dach, a koszyk uchwyt. Choć kulki czy żetony także są konkretnymi obiektami, to nie mają dla dziecka praktycznego sensu.

Barry Wadsworth (1998) wskazywał, że krytyka Piageta wynika z używania bardzo surowych kryteriów wnioskowania o zdolnościach dzieci. Stosowanie mniej surowych kryteriów pozwala odkryć zdolności dzieci tam, gdzie przy stosowaniu kryteriów Piageta nie jest to możliwe. Brak niezmiennika liczby (według kryteriów Piageta), nie znaczy, że dzieci nie mają w ogóle pojęcia liczby. U tych samych dzieci – w zależności od przyjętych kryteriów – można stwierdzić zdolność do rozpoznania, czy mają do czynienia z tą samą liczbą obiektów lub brak rozumienia równoliczności zbioru (Gelman, 1978, za: Wadsworth, 1998).

Na istnienie zdolności rozpoznawania liczności przez dzieci będące w młodszym wieku wskazały także wyniki badań przeprowadzonych w paradygmacie odmiennym niż Piagetowski. Dehaene (2011) pisał wprost, że nie jest prawdą, że dzieci dopiero w wieku 4–5 lat zaczynają rozumieć pojęcie liczby. Zgodził się z twierdzeniem, że wraz z wiekiem zrozumienie pojęcia liczby się pogłębia, lecz był przeciwny stanowisku, że dzieci, nawet w wieku niemowlęcym, są pozbawione mentalnej reprezentacji liczb. Aby to udowodnić, konieczne byłoby zastosowanie adekwatnych do wieku dziecka narzędzi pomiaru. Adele Diamond i Patricia Goldman-Rakic (1989) postawiły hipotezę, że popełniany przez dzieci błąd zachowania liczby w procedurze Piageta jest wynikiem nie w pełni rozwiniętych funkcji wykonawczych (dla których mózgowym podłożem jest przede wszystkim kora przedczołowa). Jeśli hipoteza ta byłaby słuszna, to test stosowany przez Piageta byłby raczej miarą zdolności do ignorowania dystraktorów, a nie miarą zrozumienia pojęcia liczby (Dehaene, 2011).

Wydaje się, że w pewnym stopniu krytyka ta jest uzasadniona: dowody na istnienie zdolności różnicowania liczebności już w niemowlęctwie pozwalają przypuszczać, że posiadanie intuicji liczby jest biologicznie uwarunkowane. Niemowlęta wykazują zdolność rozróżniania zestawów składających się z jednego, dwóch lub trzech obiektów (Starkey i Cooper, 1980). Niemniej natura mechanizmów odpowiedzialnych za te zdolności oraz rola tych zdolności w rozwijaniu pojęcia liczby do tej pory nie zostałay poznane i budzą wiele kontrowersji (Nunes i Bryant, 1996). Pomimo że od czasu pojawienia się tej opinii minęło ponad 20 lat i przeprowadzono bardzo wiele badań na ten temat, nadal nie można mówić o jednoznacznych rozstrzygnięciach.

Zachowanie niemowląt pozwala wnioskować, że dysponują one taką strukturą poznawczą, która ma już pewne aspekty pojęcia liczby (Dehaene, 2011). Prentice Starkey i Robert Cooper (1980, za: Dehaene, 2011) zbadali 4–7-miesięczne niemowlęta w paradygmacie habituacji. Procedura była następująca: dzieciom prezentowano slajdy, których treść różniła się wyłącznie położeniem dwóch czarnych kropek na białym tle. Gdy zaobserwowano spadek zainteresowania, zmieniono slajdy na takie, które przedstawiały trzy kropki różniące się położeniem. Czas fiksacji wzroku dzieci na nowych obrazkach wydłużył się istotnie. Badacze na tej podstawie wyciągnęli wniosek, że dzieci zauważają zmianę w ilości przedstawionych kropek. Krytyce można w tym badaniu poddać fakt, że być może zadanie mierzy zdolność spostrzegania zmiany kształtu, a nie liczby, ponieważ dwie kropki zawsze układają się w linię, a trzy w trójkąt. Podobne wyniki uzyskali jednak Mark Strauss i Lynne Currtis (1981), którzy korzystali ze slajdów przedstawiających różne przedmioty, o różnej wielkości i rozmieszczeniu.

Wydaje się, że dzieci mają zdolność reprezentowania liczb 2 lub 3 niezależnie od modalności. Na podstawie eksperymentu, w którym wykorzystano bodźce wzrokowe i słuchowe, wskazano, że 6–8-miesięczne dzieci poświęcają więcej uwagi bodźcom wzrokowym, zgodnym z liczbą dźwięków pojawiających się w trakcie badania (Starkey, Spelke i Gelman, 1983). Ranka Bijeljac-Babic, Josiane Bertoncini i Jacques Mehler (1991) przeprowadzili badanie w paradygmacie ssania sprawczego, wśród czterodniowych niemowląt. Procedura była następująca: dzieci słuchały słów o stałej długości sylab (3). Gdy przejawiały brak zainteresowania, który ujawniał się w mniej intensywnym ssaniu, badacze zmieniali bodźce na słowa o innej liczbie sylab (2). Dzieci reagowały natychmiastowym, wzmożonym ssaniem. W grupie kontrolnej prezentowano bodźce o takiej samej długości sylab przy wprowadzeniu nowych słów. Okazało się, że ta zmiana nie wpłynęła na reakcję dzieci. Wydaje się więc, że zachowanie dziecka (wzmożone ssanie) wynika ze zmiany liczby sylab, a nie nowych słów.

Istnienie zdolności różnicowania małych zestawów obiektów to nie jedyna umiejętność, jaką mają niemowlęta. Karen Wynn (1992) przeprowadziła badanie wśród 4–5-miesięcznych dzieci w paradygmacie habituacji. Eksperymentator pokazywał dziecku zabawkę, którą następnie chował za zasłonę, po czym brał kolejną zabawkę, pokazywał ją dziecku i znowu chował za zasłonę. Po kilku sekundach zasłonę rozsuwał i mierzył czas patrzenia dziecka na zabawki. Eksperyment był prowadzony w dwóch warunkach: sytuacja możliwa (schowano dwie zabawki i dzieci po usunięciu zasłony widziały dwie zabawki: 1 + 1 = 2) i sytuacja niemożliwa (schowano dwie zabawki, ale dzieci po usunięciu zasłony widziały tylko jedną zabawkę: 1 + 1 = 1). Pomiar wskazał, że niemowlęta znacznie dłużej patrzyły na sytuację niemożliwą niż możliwą, co sugeruje, że były zaskoczone sytuacją, w której liczba zabawek po odsłonięciu zasłony nie była zgodna z liczbą zabawek umieszczonych za zasłoną. Jeśli twierdzić, że dzieci wyłącznie obserwują zmianę, lecz brak im zdolności liczenia, to należy przypatrzyć się innym wariantom tego eksperymentu. Wynn drugiej grupie eksperymentalnej prezentowała operacje 2 – 1 = 2 i 2 – 1 = 1. Dzieci, którym prezentowano niemożliwe zdarzenie patrzyły dłużej średnio o trzy sekundy niż dzieci, którym prezentowano zdarzenie możliwe. Trzeci eksperyment Wynn był następujący: dzieci widziały dwie chowane zabawki, natomiast po rozsunięciu zasłony widziały trzy zabawki (1 + 1 = 3) oraz oglądały następującą sytuację: najpierw chowano jedną zabawkę, później dokładano kolejną, a po odsłonięciu dzieci widziały dwie zabawki (1 + 1 = 2). Pomiar czasu fiksacji wykazał, że dzieci dłużej patrzyły na wynik niemożliwy.

Pomimo dużej wartości badań Wynn, trudno na ich podstawie jednoznacznie odpowiedzieć na pytanie, jak abstrakcyjna jest wiedza niemowląt na temat liczb. Dehaene (2011) wskazał dwie hipotezy wyjaśniające ujawnioną przez niemowlęta wiedzę: (H_1) dzieci utrzymują realistyczne obrazy obiektów ukrytych za zasłoną – coś na wzór mentalnej fotografii, która pozwala odnotować brak lub nadmiar obiektów; (H_2) dzieci utrzymują w pamięci liczbę przedmiotów dodawanych lub odejmowanych, bez zwracania uwagi na ich umiejscowienie lub identyczność. Fei Xu i Susan Carey (1996) wskazały, że wnioskowanie niemowląt na temat liczb jest zdeterminowane przez czasowo-przestrzenną trajektorię poruszania się przedmiotu. Jeśli obserwowany ruch nie może zostać zainicjowany przez pojedynczy obiekt bez naruszania praw fizyki, to dzieci dochodzą do wniosku, że istnieją przynajmniej dwa obiekty. Dzieci błędnie zakładają, że istnieje tylko jeden obiekt, nawet jeśli jest to przedmiot stale zmieniający swój kształt, kolor, rozmiar. Ciekawych danych dostarczyli Tony Simon, Susan Hespos i Philippe Rochat (1995), replikując wyniki badań Wynn (1992). Wskazali, że 3–5-miesięczne niemowlęta nie wyrażały zdziwienia, gdy zamieniono dwie myszki na dwie kulki, ale były zaskoczone zamianą dwóch myszek na jedna kulkę. Niemowlęta są wrażliwe na liczbę przedmiotów, informacje o trajektorii poruszania się przedmiotów, ich lokalizację, ale nie są wrażliwe na zmianę kształtu, rozmiaru i koloru. Należy jednak mieć na uwadze, że mechanizm leżący u podstaw tych umiejętności jest ograniczony do 3–4 elementów i nie jest tożsamy z mechanizmem odpowiedzialnym za spostrzeganie większych liczebności (Hyde i Spelke, 2010).

Koncepcja zmysłu liczby

Koncepcja stworzona przez Piageta pozwala osadzić rozwój umiejętności matematycznych dziecka w kontekście ogólnego rozwoju poznawczego człowieka. Wiedza na ten temat jest wynikiem licznych badań prowadzonych w jednym paradygmacie, dzięki czemu jest spójna i uporządkowana. Zarówno zwolennicy, jak i przeciwnicy koncepcji Piagetowskiej posługują się wspólnym słownikiem pojęciowym, co umożliwia konstruktywną dyskusję.

Zdecydowanie inny charakter mają badania wskazujące na istnienie pewnej intuicji liczbowej – zmysłu liczby. Koncepcja ta jest niejednorodna i niespójna: wśród badaczy nie ma zgody co do definicji zmysłu liczby, jego natury, związku z rozwojem poznawczym i osiągnięciami matematycznymi wśród dzieci oraz osób dorosłych. Sharon Griffin (2004) zauważyła, że zmysł liczby łatwo rozpoznać, ale trudno zdefiniować. Poszczególne procesy obejmujące zmysł liczby są mierzone z wykorzystaniem zadań wykonaniowych: szacowanie na osi liczbowej (Ramani i Siegler, 2011), porównywanie liczebności symbolicznych (Szűcs, Devine, Soltesz, Nobes i Gabriel, 2014) i niesymbolicznych (Hornung, Schiltz, Brunner i Martin, 2014), oraz zadań kwestionariuszowych (Jordan, Glutting i Ramineni, 2010).

Samo pojęcie zmysłu liczby jest pewnego rodzaju metaforą opisującą różne procesy związane z szacowaniem wielkości (Hornung i in., 2014; Szűcs i in., 2014), przetwarzaniem symbolicznych i niesymbolicznych informacji liczbowych (Pina, Castillo, Cohen Kadosh i Fuentes, 2015) oraz przestrzennym komponentem reprezentacji liczb (Dackermann, Huber, Bahnmueller, Nuerk i Moeller, 2015). W literaturze przedmiotu zmysł liczby jest definiowany jako wiedza na temat znaczenia liczb; znaczenia relacji większe–mniejsze, więcej–mniej; rozumienie zasady, że liczby zajmują stałe pozycje: mniejsze liczby znajdują się przed większymi, a każda następna liczba oznacza liczbę większą; zrozumienie proporcji 1 : 1 (Hassinger-Das, Jordan, Glutting Irwin i Dyson, 2014; Howell i Kemp, 2010).

Pojęcie zmysłu liczby zostało użyte po raz pierwszy w 1954 r. przez Tobiasa Dantziga, który na podstawie obserwacji zdolności rozpoznawania różnicy w zbiorze (gdy zostanie do niego dodany lub z niego usunięty obiekt), stwierdził, że ludzie mają pewną intuicję liczbową. Gdy Dantzig wypowiadał to zdanie, w środowisku naukowym i edukacyjnym panowało przekonanie rozpowszechnione przez Piageta, że dzieci najmłodsze nie mają jakichkolwiek zdolności numerycznych. Pojawienie się wyników badań empirycznych w tej dziedzinie potwierdziło intuicję Dantizga, a twierdzenia Piageta w tej kwestii, zdaniem Dehaene'a (2011) zostały zupełnie obalone.

Skoro już kilka dni po urodzeniu niemowlęta wykazują zdolność rozpoznawania liczby przedmiotów (1–3 elementy), to można wnioskować, że mózg człowieka jest wyposażony w pewnego rodzaju zdolność do kształtowania się pojęcia liczby (Blakemore i Frith, 2008). Dehaene jest zdania, że moduł wyspecjalizowany w identyfikację liczb ma mózgowe podstawy, rozwijające się jeszcze przed urodzeniem. Prawdopodobnie mózg wyposażony jest w swego rodzaju genetycznie zdeterminowany detektor numeryczny, a ludzie od milionów lat dzielą ten protonumeryczny system z różnymi gatunkami zwierząt. Coraz liczniejsze dane potwierdzają te hipotezy.

Dotychczas przeprowadzone badania wśród makaków wykazały istnienie tzw.

neuronów liczbowych (*number neurons*) w obrębie tylnej kory przedczołowej i bruzdy śródciemieniowej, selektywnie reagujących na określone liczebności zbiorów (Nieder, 2005; Nieder i Merten, 2007; Nieder i Miller, 2003; 2004). Wyspecjalizowane neurony liczbowe wykryto także u krukowatych (Ditz i Nieder, 2015). Poszczególne neurony przejawiają szczytową aktywność jedynie w odpowiedzi na określoną wartość. W przypadku spadku lub wzrostu wartości aktywność neuronów stopniowo spada, aż do całkowitego jej zaniku. Podobny efekt u ludzi zaobserwował zespół Manueli Piazzy (Piazza, Pinel, Le Bihan i Dehaene, 2007). Aktywacja tej samej lub sąsiedniej populacji neuronów w horyzontalnej części bruzdy śródciemieniowej i płacie ciemieniowym w odpowiedzi na zapis liczb w sposób symboliczny (cyfry, liczebniki) lub niesymboliczny (liczebności kropek), wskazuje na abstrakcyjne kodowanie wielkości liczbowych.

Dynamicznie rozwijające się badania z wykorzystaniem neuroobrazowania mózgu, potwierdzają istnienie biologicznych podstaw operowania liczbami. Dehaene i współpracownicy dowiedli, że podczas rozwiązywania problemów arytmetycznych, są aktywowane obszary ciemieniowe: obwody neuronalne znajdujące się w horyzontalnej części bruzdy śródciemieniowej, lewy zakręt kątowy (aktywowany podczas wykonywania operacji na reprezentacjach werbalnych), tylny górny płacik ciemieniowy (odpowiedzialny m.in. za procesy uwagowe, angażowane podczas liczenia; Dehaene, Piazza, Pinel i Cohen, 2003) oraz obszary przedczołowe (Dehaene, Molko, Cohen i Wilson, 2004). Znaczenie obszarów ciemieniowych i przedczołowych zostało potwierdzone przez wielu badaczy, lecz samo zjawisko jest zdecydowanie bardziej złożone (Kaufmann, Kucian i von Aster, 2015). Należy mieć na uwadze, że uzyskiwane wyniki mogą się różnić w zależności od wieku osób badanych (niemowlęta, dzieci, dorośli), poziomu kompetencji matematycznych oraz notacji bodźców (symboliczne, niesymboliczne).

Michael von Aster i Ruth Shalev (2007) przedstawili model rozwoju poznania numerycznego uwzględniający: wiek, typowe dla wieku zdolności numeryczne, odpowiadającą im reprezentację poznawczą oraz obszary mózgowe. Badacze wskazali, że niemowlęta są zdolne do subityzowania, szacowania i porównywania liczebności, czego podstaw można upatrywać w aktywacji obustronnych obszarów ciemieniowych. W wieku przedszkolnym wzrasta rola lewostronnych obszarów przedczołowych, co ma związek z opanowaniem liczebników, nabyciem strategii liczenia, umiejętnością odtwarzania faktów liczbowych. Początek wieku szkolnego wiąże się z opanowaniem symboli matematycznych (obliczenia pisemne, dodawanie, odejmowanie) i aktywacją obustronnych obszarów potylicznych, a dalszy rozwój reprezentacji liczbowej (w postaci ukształtowanej mentalnej osi liczb i zdolności szacowania) wiąże się z aktywacją obustronnych obszarów ciemieniowych. Wyniki badań Liane Kaufmann i współpracowników (Kaufmann, Wood, Rubinsten i Henik, 2011; Kaufmann i in., 2015) wskazują, że wraz z wiekiem i doświadczeniem spada rola obszarów czołowych a wzrasta rola regionów czołowo-ciemieniowych. W toku rozwoju i edukacji dochodzi do powiązania „korowej" reprezentacji z innymi systemami poznawczymi (Dehaene, 2011).

Koncepcja zmysłu liczby pozwala wyjaśnić, dlaczego niektóre osoby nie operują pojęciem liczby i nie są w stanie zrozumieć podstawowych problemów matematycznych. Przyczyn braku pojęcia liczby upatruje się właśnie w nieprawidłowościach rozwoju płata ciemieniowego lub genetycznej dezorganizacji układu obwodów nerwowych. Deficyty mogą być także wynikiem niewłaściwego rozwoju połączeń pomiędzy pojęciem ilości a pojęciem liczby (Blakemore i Frith, 2008).

Wiedza na temat mózgowych podstaw pierwotnego zmysłu liczbowego oraz wtórnie wyspecjalizowanych struktur mózgowych, umożliwiających przetwarzanie informacji liczbowych, jest wciąż aktualizowana. Liczne badania pozwalają w sposób bardziej szczegółowy i precyzyjny tworzyć „mapę" aktywności „matematycznego" mózgu (Menon, 2015). Niemniej z pewnością nie jest to wyczerpujący obraz biologicznych podstaw przetwarzania informacji liczbowych i procesów zaangażowanych w rozwiązywanie zadań matematycznych.

Dalszych badań wymaga także natura zmysłu numerycznego, chociaż najogólniej można uznać, że składa się on z dwóch systemów mających charakter przedjęzykowy: systemu śledzenia przedmiotów (*objeckt tracking system*; OTS) i systemu liczb przybliżonych (*approximate numer system*; ANS; tłumaczenie za: Brożek i Hohol, 2014; Dehaene, 2011). Zmysł liczby jest niewerbalny i funkcjonuje odmiennie niż precyzyjne, werbalne mechanizmy reprezentacji liczbowych. Odmienny format dokładnych i szacunkowych reprezentacji liczbowych (Dehaene, 2011) potwierdzają liczne dane: już badania psychofizjologiczne prowadzone wśród niemowląt wskazują na odmienne procesy leżące u podstaw przetwarzania małych i dużych zestawów obiektów (Hyde i Spelke, 2010). Nie wiadomo jednak, co decyduje o aktywacji jednego lub drugiego systemu w przypadku małych liczb, ani w jakim zakresie OTS i ANS współpracują lub konkurują ze sobą.

System śledzenia przedmiotów nie jest ukierunkowany na liczbę, lecz umożliwia jednoczesne utrzymywanie w polu uwagi kilku elementów. Dzięki OTS istnieje możliwość precyzyjnego i bezwysiłkowego określenia liczebności niewielkich zbiorów (maksymalnie 3–4-elementowych). Zdolność ta, określana jest jako subityzowanie (*subitizing*; tłumaczenie za: Reinholz, Rychwalska, Stefańska i Trojan, 2003; Dehaene, 2011). Uważa się, że OTS nie jest systemem, który bezpośrednio wiąże się z nabywanymi w toku edukacji kompetencjami matematycznymi, niemniej to podstawowy mechanizm poznawczy, który umożliwia tworzenie dokładnej reprezentacji liczb (Brożek i Hohol, 2014). Osoby z dyskalkulią mają poprawnie działający system OTS, co zdaniem specjalistów w zakresie badań nad dyskalkulią, Briana Butterwortha (1999) i Manueli Piazzy (2011, za: Brożek i Hohol, 2014), stanowi argument za tym, że system OTS nie wpływa na rozwój zdolności matematycznych.

Drugi z komponentów, mający związek z osiągnięciami matematycznymi u ludzi, to ANS. System ten odpowiada za przybliżone szacowanie liczebności przedmiotów w zbiorze, bez konieczności ich przeliczania. System ANS ulega zmianom rozwojowym między niemowlęctwem a dorosłością. Jennifer Lipton i Elizabeth Spelke (2004) wskazały, że niemowlęta w szóstym miesiącu życia rozróżniają ilości, gdy są w proporcji 1 : 2, a w wieku dziewięciu miesięcy radzą sobie z rozróżnianiem proporcji 2 : 3. Dokładność ANS wzrasta stopniowo, pozwalając na rozróżnianie ilości w proporcji 6 : 7 w wieku sześciu lat (Halberda i Feigenson, 2008). Ostrość ANS osiąga maksymalny poziom ok. 30. roku życia, następnie powoli, ale systematycznie spada do końca życia (Halberda, Ly, Wilmer, Naiman i Germine, 2012).

Przyjęcie założenia o zdeterminowanej biologicznie zdolności do szacowania, porównywania i manipulowania liczebnościami nie wyklucza możliwości rozwoju tych zdolności. W toku edukacji matematycznej jest rozwijana umiejętność rozumienia zasad i relacji matematycznych, umiejętność płynnego wykonywania działań oraz umiejętność rozpoznawania prawidłowości matematycznych (Geary, 1995). Porównywanie ilości lub dokonywanie przybliżonych i dokładnych obliczeń wymaga stworzenia umysłowej reprezentacji, która będzie odpowiadała ilości obiektów danego rodzaju, a nie temu, co w danym momencie jest spostrzegane. Jak konkluduje Robert Mackiewicz (2012), umysł musi mieć zdolność reprezentowania tego, że np. 16 obiektów to więcej niż 8 obiektów, niezależnie od tego, czym te obiekty są, zatem reprezentacja ilości tworzona przez umysł musi mieć charakter abstrakcyjny (Dehaene, Dehaene-Lambartz i Cohen, 1998). Innymi słowy, niezależnie od tego, czy spoglądamy na osiem słoni czy osiem orzechów, w każdej z tych sytuacji umysł człowieka „zapisuje w jakimś kodzie" reprezentację ośmiu obiektów (McCloskey, 1992, za: Mackiewicz, 2012). Sposób, w jaki w umyśle jest przedstawiana następująca informacja: „DWA = 2 = • •", obrazuje trójkodowy model reprezentacji liczb Dehaene'a (1992). Werbalny kod (dwa) oraz kod cyfr arabskich (2) rozwija się w toku edukacji, natomiast kod niewerbalny (• •) jest typowy dla ludzi od urodzenia i dla zwierząt. Mimo że nie wiadomo, jak wygląda reprezentacja liczb, można podejrzewać, że jest to kod analogowy, czyli ilość nie jest kodowana dokładnie jako liczba czegoś, ale jako kod umysłowy, który reprezentuje pewną wielkość (Mackiewicz, 2012). Dehaene (1992) ten umysłowy kod reprezentujący wielkość nazwał osią numeryczną (*number line*). Badacz twierdził, że ludzie mają reprezentację mentalną ilości podobną do tej, jaką mają zwierzęta (np. szczury, małpy, pingwiny). Co więcej, zdolność ta pozwala człowiekowi nie tylko reagować szybko (porównywać, dodawać) na zestaw obiektów, lecz także leży u podstaw zrozumienia symboli (cyfry arabskie) i bardziej zaawansowanych zdolności matematycznych. Zdolności matematyczne zwierząt (badania prowadzono m.in. wśród papug, krukowatych, delfinów, makaków, szympansów), w porównaniu do człowieka, są jednak bardzo ograniczone. Część dzieci spontanicznie liczy do 10 przed ukończeniem trzeciego roku życia (Dehaene, 2011; Slusser, Ditta i Sarnecka, 2013) i stosunkowo szybko rozwija swoje umiejętności operowania na liczbach większych niż 10, szympansy natomiast mogą opanować taką umiejętność tylko w wyniku długotrwałego i intensywnego treningu (Rumbaugh, Savage-Rumbaugh i Hegel, 1987). Zwierzęta mają zdolność rozumienia ilości, pamiętania, porównywania, a nawet dodawania przybliżonych ilości. Ludzie są jednak wyjątkowi ze względu na zdolność rozwijania systemu symbolicznego (a także opanowania symboli matematycznych; Dehaene, 2011).

Krytyka koncepcji zmysłu liczby

Pomimo że istnienie zmysłu liczby zostało potwierdzone, nadal pojawia się wiele niejasności w związku z tą koncepcją. Problemy teoretyczne i metodologiczne są aktualne przede wszystkim w kontekście interpretacji uzyskiwanych przez badaczy wyników badań prowadzonych wśród niemowląt. Xavier Seron i Mauro Pesenti (2001) zwrócili uwagę na ryzyko nadinterpretacji danych uzyskanych w takich badaniach. Natura kompetencji wymaganych do wykonania zadania różnicowania liczebności pozostaje zagadką. Szczególnie ważne jest ustalenie, czy zdolność niemowląt do dyskryminacji małych liczebności w paradygmacie habituacji rzeczywiście wymaga umysłowej reprezentacji wielkości. Możliwe, że zachowanie niemowląt w tych zadaniach nie zależy od aktywacji reprezentacji wielkości, lecz wynika z ich zdolności do postrzegania zindywidualizowanych przedmiotów, zdefiniowanych według indywidualnych cech przestrzenno-czasowych (Uller, Carey, Huntley-Fennera i Klatt, 1999, za: Seron i Pesenti, 2001; Xu i Carey, 1996). Simon (1997) sugeruje, że większość eksperymentów dotyczących liczebności, może faktycznie testować zdolności niemowląt do wyizolowania przedmiotów lub zdarzeń i utrzymania ich istnienia w pamięci krótkotrwałej. Zgodnie z tą interpretacją, nie byłoby podstaw do postulowania (jak czyni to np. Dehaene, 1992), że istnieje specyficzny, wrodzony moduł liczbowy.

Zdolności niemowląt do rozróżniania małych liczebności są dobrze znane, ale obecny stan wiedzy nie daje pewności, że są one wyposażone w zmysł liczby. Zdolność do rozróżniania małych zestawów bodźców i wykrywania pewnych przekształceń liczebności można wytłumaczyć wrażliwością na podstawowe prawidłowości występujące w świecie fizycznym. Sam Dehaene także wskazywał, że przynajmniej trzy prawa fizyki są związane ze zmysłem liczby: (a) przedmiot nie może występować jednocześnie w różnych lokalizacjach, (b) dwa obiekty nie mogą występować w tej samej lokalizacji, (c) trajektoria poruszania się przedmiotu musi być ciągła: przedmiot nie może nagle zniknąć albo pojawić się z miejsca poprzednio pustego (Dehaene, 2011). Seron i Pesenti (2001) twierdzą, że teoria Dehaene'a stanowi ogólne ramy odniesienia dla wszystkich zainteresowanych poznaniem numerycznym, jednak koncepcja zmysłu liczby nadal pozostaje hipotezą – bardzo wiarygodną, lecz jednak hipotezą wymagającą potwierdzenia na podstawie większej liczby dowodów empirycznych.

Mimo że wiele badań prowadzonych wśród niemowląt dostarcza danych wskazujących na zdolność dyskryminacji liczebności oraz abstrahowania liczebności między modalnościami (Koechlin, Dehaene i Mehler, 1997; Starkey i in., 1983; Walden, Kim, McCoy i Karrass, 2007), to istnieje też wiele badań, w których nie udało się uzyskać podobnych rezultatów (Cohen i Marks, 2002; Mix, Levine i Huttenlocher, 1997; Moore, Benenson, Reznick, Peterson i Kagan, 1987; Wakeley, Rivera i Langer, 2000).

Jeśli założyć, że niemowlęta faktycznie wykazują zdolność abstrahowania liczby, to sama zdolność różnicowania liczebności zbiorów i wiedza na temat liczb jest u niemowląt bardzo ograniczona. Zdolność dyskryminacji nie przekracza trzech obiektów (okazjonalnie czterech; Feigenson, Dehaene i Spelke, 2004), a rozróżnianie dużych zestawów obiektów jest możliwe tylko wtedy, gdy liczba bodźców jest w odpowiednim stosunku (1 : 2 u dzieci sześciomiesięcznych; Xu i Spelke, 2000). Rozróżnianie liczebności nie oznacza rozumienia porządkowego aspektu liczby, co jest ważnym kryterium posiadania pojęcia liczby. Świadomość porządkowej relacji między liczebnościami jest rozwijana stopniowo w procesie uczenia się. Dzieci uczą się liczyć już w wieku trzech lat – zaczynają od odnoszenia liczebników do konkretnych przedmiotów lub działań (Blakemore i Frith, 2008). Carey i Spelke (1996) wskazały, że dzieci w tym wieku mają trudności z wykonaniem zadania, w którym muszą porównać dwa (lub więcej) zbiory przedmiotów, ale jeśli zadanie dotyczy jednego zbioru przedmiotów, to radzą sobie z jego wykonaniem i rozumieją, że liczenie ma stały porządek, a o wielkości zbioru decyduje ostatnia policzona wartość. Nie są to jednak zaawansowane zdolności liczenia. Dzieci przed ukończeniem czterech lat nie potrafią zrozumieć w pełni znaczenia liczenia. Rozwijanie tych umiejętności jest możliwe dzięki zadaniom stawianym w nauczaniu formalnym i nieformalnym. Jak wskazał Daniel Berch (2005), nie da się jednak podzielić zmysłu liczby na rozdziały i nauczać o nim w szkołach, jakby tego chciało wielu praktyków. Zmysł liczby to raczej sposób myślenia, który powinien przenikać wszystkie aspekty uczenia się i nauczania matematyki (Berch, 2005; Reys, 1994). Ta zdolność powinna być traktowana jako efekt uczenia się, a nie jego cel (Berch, 2005; Greeno, 1991).

Zmysł liczby uważany jest za bardzo ważny z punktu widzenia edukacji matematycznej. Do tej pory nie ustalono jednak istoty związku między zmysłem liczby a formalnymi zdolnościami matematycznymi. Możliwe, że nabywanie i częste używanie symboli liczb pozwala wyostrzyć system liczb przybliżonych. Potwierdzeniem tej tezy są badania zespołu Pierre'a Pica (Pica, Lemer, Izard i Dehaene, 2004), które wskazują, że dorośli z kultur zachodnich mają bardziej precyzyjny ANS niż dorośli z kultur, w których nie ma symbolicznego zapisu liczb (do podobnych wniosków doszli m.in.: Castronovo i Göbel, 2012; Lindskog, Winman i Juslin, 2014; Piazza, Pica, Izard, Spelke i Dehaene, 2013). Z drugiej strony może być tak, że bardziej dokładny system ANS u dzieci może sprzyjać lepszemu opanowaniu znaczenia liczebników. Istnieją wyniki badań wskazujące na istotny wkład zmysłu liczby w wyjaśnianie osiągnięć matematycznych dzieci (Bonny i Lourenco, 2013; 2015; Halberda, Mazzocco i Feigenson, 2008; Holloway i Ansari, 2009; Hornung, Schiltz, Brunner i Martin, 2014; Gilmore, McCarthy i Spelke, 2010; Jordan, Glutting i Ramineni, 2010; Libertus, Feigenson i Halberda, 2013; Nosworthy, Bugden, Archibald, Evans i Ansari, 2013; Sasanguie, Goebel, Moll, Smets i Reynvoet, 2013) i dorosłych (Halberda i in., 2012; Libertus, Odic i Halberda, 2012).

Nie wszyscy badacze zgadzają się z taką interpretacją wyników. Do przeciwnych wniosków doszły np. Mary Fuhs i Nicole McNeil (2013) czy zespoły Camilli Gilmore (2013), Fruzsiny Soltesz (Soltesz, Szűcs i Szűcs, 2010), Dénesa Szűcsa (2014). Badacze ci wskazali, że zmysł liczby nie jest istotnym predyktorem osiągnięć matematycznych, gdy kontrolowany jest poziom sprawności funkcji wykonawczych u dzieci. Istnieją także wyniki badań przeprowadzonych wśród dorosłych, w których nie znaleziono związku między ANS a osiągnięciami matematycznymi (Inglis, Attridge, Batchelor i Gilmore, 2011; Price, Palmer, Battista i Ansari, 2012). Kaufmann i współpracownicy (2015) podkreślają, że rozwój myślenia numerycznego jest pośredniczony także przez inne czynniki: język (Pixner, Moeller, Nuerk, Hermanova i Kaufmann, 2011), zdolności przestrzenne (Gunderson, Ramirez, Beilock i Levine, 2012), procesy uwagi (Bugden i Ansari, 2011).

Jak wskazały Lisa Feigenson, Melissa Libertus i Justin Halberda (2013) oraz Julia Dietrich, Stefan Huber i Hans-Christoph Nuerk (2015), zgodnie z dominującym poglądem, system liczb przybliżonych jest podstawą symbolicznych zdolności matematycznych. Dlatego wielu badaczy skupia się na badaniu ANS i jego związku z wykonaniem matematycznym. Rezultaty są jednak niespójne ze względów teoretycznych i metodologicznych: różnice w operacjonalizacji zmysłu liczby oraz osiągnięć matematycznych, sposób pomiaru i interpretacji uzyskanych wyników, plan badań, wielkość próby, wiek dzieci, niska rzetelność i trafność zastosowanych zadań wpływają na uzyskiwane wyniki.

Pomimo że koncepcja zmysłu liczby jest obiektem badań naukowych oraz podstawą budowania wielu programów edukacyjnych (Griffin, 2004; McGuire, Kinzie i Berch, 2011; Wilson, Dehaene, Dubois i Fayol, 2009), wśród teoretyków i praktyków brakuje jednoznacznej definicji zmysłu liczby. Sally Howell i Coral Kemp (2010) zwrócili uwagę na fakt, że prawdopodobnie różne komponenty zmysłu liczby korelują z różnymi umiejętnościami matematycznymi, dlatego tak ważne jest zdefiniowanie tego konstruktu. Przyjęcie określonej definicji zmysłu liczby determinuje zastosowanie określonych narzędzi badawczych. Z punktu widzenia edukacji matematycznej brak zgody wśród badaczy w zakresie definiowania oraz pomiaru zmysłu liczby sprawia, że wyniki trudno porównywać i odnosić do praktyki edukacyjnej. Zagadnienie teoretycznych i metodologicznych problemów badania zmysłu liczby jest jednak tematem wykraczającym poza ramy tego artykułu.

Podsumowanie

Programy edukacji matematycznej są tworzone na podstawie wyników badań prowadzonych w paradygmatach Piagetowskim i zmysłu liczby, dlatego porównanie obu koncepcji jest uzasadnione. Główne różnice, mające znaczenie dla efektów uczenia się i nauczania matematyki, dotyczą wskazania czasu opanowania pojęcia liczby przez dzieci. Badania prowadzone w paradygmacie

Piagetowskim wskazują, że dzieci nabywają pojęcie liczby stopniowo, poprzez różnorodne doświadczenia z konkretnymi przedmiotami. Zwolennicy koncepcji zmysłu liczby nie zgadzają się z tym stanowiskiem, twierdząc, że pojęcie abstrakcyjnej liczby jest dostępne dziecku od urodzenia, nawet jeśli nie jest to w pełni ukształtowane pojęcie liczby. Wielu badaczy podziela zdanie, że posiadanie tak rudymentarnego pojęcia liczby i zdolności arytmetycznych nie oznacza, że rozpoczęcie edukacji matematycznej jest konieczne lub korzystne w bardzo wczesnym wieku. Istnienie biologicznych podstaw operowania liczbami nie niweluje znaczenia środowiska w rozwijaniu uzdolnień matematycznych, a nabywanie pojęcia liczby i wiedzy o liczeniu jest wynikiem intensywnego uczenia (Blakemore i Frith, 2008). Uczenie to zdaniem zwolenników koncepcji zmysłu liczby powinno rozpocząć się jednak wcześniej, niż sądzą zwolennicy myśli Piagetowskiej.

Założenia te mają swoje konsekwencje w przypadku zaleceń edukacyjnych. Twierdzenie zwolenników koncepcji Piageta, że dzieci przed ukończeniem szóstego roku życia nie są w stanie zrozumieć pojęć matematycznych, ma odzwierciedlenie w przekonaniu, że nauczanie dzieci liczb w wieku przedszkolnym byłoby mechaniczne i pozbawione sensu, a tym samym mogłoby prowadzić do rozwijania lęku przed matematyką i jej unikania. Myśl postpiagetowska niesie ze sobą założenie, że uczenie dzieci pozostających w okresie przedoperacyjnym zapisu symbolicznego może utrudniać zrozumienie danego zagadnienia (Semadeni, 2016) i prowadzi do niepowodzeń w uczeniu się matematyki (Gruszczyk-Kolczyńska, 2012). W polskiej podstawie programowej edukacji wczesnoszkolnej można znaleźć zalecenia dotyczące ćwiczeń wspomagających proces przechodzenia uczniów na poziom operacyjny (Semadeni, 2016).

Na gruncie polskim konkretnych wskazówek dotyczących nauczania matematyki w nurcie postpiagetowskim, zwłaszcza we wczesnym etapie edukacji, dostarczają liczne prace Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej i jej współpracowników (np. 2005; 2012; 2014). Także Wadsworth (1998) wymienił kilka zasad konstruktywistycznych, które powinny być spełnione w trakcie nauczania matematyki. Struktury psychologiczne muszą zostać rozwinięte, zanim zostaną wprowadzone zagadnienia numeryczne i formalny symbolizm. Zadanie wymagające od dzieci operacji numerycznych przed nabyciem struktur logiczno-matematycznych wymaganych w danym zadaniu będzie pozbawione znaczenia. Opanowanie symboli przez dziecko jest możliwe dopiero wówczas, gdy opanują pojęcie liczby. Nacisk na pamięciowe opanowanie wiedzy matematycznej, zanim dzieci opanują pojęcia matematyczne, nie pomaga w zrozumieniu pojęć i ich konstrukcji, służy jedynie ich „odpamiętaniu".

Odmiennego zdania są zwolennicy koncepcji zmysłu liczby, którzy wskazują, że dzieci powinny od najmłodszych lat opanowywać umiejętność łączenia zapisu symbolicznego i niesymbolicznego (Honoré i Noël, 2016; Wilson, Revkin, Cohen, Cohen i Dehaene, 2006). Już w 1989 r. Krajowa Rada Nauczycieli (National Council of Teachers) w Stanach Zjednoczonych przygotowała zalecenia związane z kształceniem zmysłu liczby dzieci od najmłodszych lat. Na gruncie amerykańskim od dawna są tworzone liczne programy interwencyjne mające na celu wspomaganie zmysłu liczby (Honoré i Noël, 2016; Jordan, 2007; Ramani i Siegler, 2011; Wilson i in., 2006).

Jak już powiedziano, poziom umiejętności szacowania i porównywania symbolicznych i niesymbolicznych liczebności pozwala w wielu przypadkach wyjaśniać różnice między dziećmi w poziomie osiągnięć matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym i wczesnoszkolnym (Hornung i in., 2014). Programy nauczania, które wymuszają nauczanie cyfr począwszy od 1 dopiero na początku edukacji wczesnoszkolnej, nie pozwalają docenić realnych umiejętności dzieci i przyczyniają się do stagnacji ich rozwoju – na co na gruncie polskim wielokrotnie zwracały uwagę Alina Kalinowska (2013) i Dorota Klus-Stańska (2004; Klus-Stańska i Nowicka, 2014).

Między zwolennikami obu koncepcji istnieje zgoda, że należy rozwijać spontaniczną ciekawość i aktywność dziecka. Niemniej w polskiej myśli edukacyjnej często można zaobserwować koncentrację na ograniczeniach rozwoju poznawczego dziecka wskazanych przez Piageta, a nie na zaleceniach swobodnego działania dziecka. Semadeni (2016) zwrócił uwagę, że istnieją zjawiska, wobec których uczniowie przejawiają ciekawość, lecz nauczyciel (słusznie) nie wyjaśnia ich prawidłowości ze względu na brak dojrzałości struktur poznawczych dzieci. W związku z tym lepszym rozwiązaniem byłoby umożliwienie uczniom obserwowania i nabywania własnych doświadczeń. Wśród zwolenników koncepcji zmysłu liczby można zaobserwować tendencję do tworzenia wielu konkretnych zaleceń dla nauczycieli, którzy przekładają je na pytania i zadania stanowiące dla dzieci wyzwanie (Conklin i Sheffield, 2012). Nacisk kładzie się także na rozumienie matematyki przez nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej ze względu na założenie, że wspomaganie zmysłu liczby jest możliwe wyłącznie przez umiejętne kształtowanie wchodzących w jego skład zdolności związanych z wiedzą matematyczną.

Wprawdzie w duchu koncepcji Piagetowskiej nie zaleca się uczenia dzieci operacji arytmetycznych przed osiągnięciem poziomu operacyjnego, ale danie takiej sposobności, z wykorzystaniem konkretnych przedmiotów (liczmanów lub palców), może być dla dziecka rozwojowe, o ile nie opiera się wyłącznie na pamięciowym opanowaniu wyniku (Semadeni, 2016). Pomimo dopuszczenia przez konstruktywistów takiej możliwości, niestety w praktyce polskiej często nauczyciele zabraniają uczniom liczenia na palcach (zwłaszcza w trakcie edukacji wczesnoszkolnej). Pomimo że rola liczenia na palcach w ukształtowaniu dojrzałego systemu liczenia nie jest do końca jasna (Szczygieł, Cipora i Hohol, 2015), wielu badaczy jest zdania, że strategia ta pozwala dzieciom odciążyć pamięć roboczą, w szczególności jeśli jest ona słabo rozwinięta (Gracia-Bafaully i Noël, 2008). Wśród zwolenników koncepcji zmysłu liczby można spotkać się z radą, aby zachęcać dzieci do obliczania wyniku w pamięci, bez wykorzystywania liczmanów lub palców (Parrish, 2010). Zalecenia te są jednak kierowane do starszych dzieci (ok. 5 klasy) i mają na celu ukształtowanie wiedzy na temat liczb i relacji między nimi.

Podsumowując, należy podkreślić, że obie koncepcje, pomimo odmiennych źródeł i zaleceń edukacyjnych, w pewnym stopniu się uzupełniają. Istnienie biologicznych podstaw operowania liczbami nie oznacza, że niemowlęta posiadają w pełni ukształtowane pojęcie liczby. Także wśród zwolenników koncepcji zmysłu liczby istnieje powszechna zgoda, że rozwój umiejętności matematycznych jest wynikiem interakcji między czynnikami biologicznymi a środowiskowymi. Wykorzystanie wiedzy na temat rozwoju reprezentacji numerycznej w dzieciństwie pozwala na stworzenie programów umożliwiających dzieciom we wcześniejszym wieku (niż ma to miejsce w przypadku programów tworzonych w duchu postpiagetowskim) uczenie się symbolicznej notacji liczbowej. Zwolennicy koncepcji liczby kładą bowiem nacisk na opanowanie relacji między niesymbolicznym i symbolicznym zapisem liczebności od najmłodszych lat. Zwolennicy koncepcji konstruktywistycznej skupiają się na wprowadzaniu ćwiczeń wspomagających proces przechodzenia na etap myślenia operacyjnego.

Ocena efektywności nauczania w przypadku jednej i drugiej koncepcji nie jest jednak łatwa. Należy bowiem pamiętać, że uczenie się matematyki to proces złożony, zależny od wielu innych czynników: zarówno indywidualnych (poznawczych, emocjonalnych, motywacyjnych), jak i środowiskowych.

Literatura

Aster, M. G. von i Shalev, R. S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology*, *49*(11), 868–873.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *38*(4), 333–339.

Bijeljac-Babic, R., Bertoncini, J. i Mehler, J. (1991). How do four-day-old infants categorize multisyllabic utterances. *Developmental Psychology*, *29*(4), 711–721.

Blakemore, S-J. i Frith, U. (2008). *Jak uczy się mózg*. Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Boltzmann, L. E. (1890). Über die Bedeutung von Theorien. W: L. E. Boltzmann (red.), (1979), *Populäre Schriften* (s. 54–58). Braunschweig: Vieweg.

Bonny, J. W. i Lourenco, S. F. (2013). The approximate number system and its relation to early math achievement: evidence from the preschool years. *Journal of Experimental Child Psychology*, *114*(3), 375–388.

Bonny, J. W. i Lourenco, S. F. (2015). Individual differences in children's approximations of area correlate with competence in basic geometry. *Learning and Individual Differences*, 44, 16–24.

Brożek, B. i Hohol, M. (2014). *Umysł matematyczny*. Kraków: Copernicus Center Press.

Bugden, S. i Ansari, D. (2011). Individual differences in children's mathematical competencies are related to the intentional but not automatic processing of Arabic numerals. *Cognition*, *118*(1), 32–44.

Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. London: Macmillan.

Carey, S. i Spelke, E. (1996). Science and core knowledge. *Philosophy of Science*, *63*(4), 515–533.

Castronovo, J. i Göbel, S. (2012). Impact of high mathematics education on the number sense. *PLoS One*, *7*(4), e33832.

Cohen, L. B. i Marks, K. S. (2002). How infants process addition and subtraction events. *Developmental Science*, *5*(2), 186–212.

Conklin, M. i Sheffield, S. (2012). *It makes sense! Using the hundreds chart to build number sense*. Sausalito: Math Solutions.

Dackermann, T., Huber, S., Bahnmueller, J., Nuerk, H.-C. i Moeller, K. (2015). An integration of competing accounts on children's number line estimation. *Frontiers in Psychology*, 6. doi: 10.3389/fpsyg.2015.00884

Dantzig, T. (1954). *Number: the language of science.* New York: MacMillan.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, *44*(1–2), 1–42.

Dehaene, S. (2011). *The number sense. How the mind creates mathematics.* New York: Oxford Univeristy Press.

Dehaene, S., Dehaene-Lambartz, G. i Cohen, L. (1998). Abstract representations of numbers in the animal and human brain. *Trends in Neuroscience*, *21*(8), 355–361.

Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L. i Wilson, A. J. (2004). Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*, *14*(2), 218–224.

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P. i Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. W: J. I. D. Campbell (red.), *Handbook of mathematical cognition* (s. 433–453). New York: Psychology Press.

Diamond, A. i Goldman-Rakic, P . S. (1989). Comparison of human infants and rhesus monkeys on Piaget's A-not-B task: evidence for dependence on dorsolateral prefrontal cortex. *Experimental Brain Research*, *74*(1), 24–40.

Dietrich, J., Huber, S. i Nuerk, H.-C. (2015). Methodological aspects to be considered when measuring the approximate number system (ANS) – a research review. *Frontiers in Psychology*, 6. doi: 10.3389/fpsyg.2015.00295

Ditz, H, i Nieder, A. (2015). Neurons selective to the number of visual items in the corvid songbird endbrain. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *112*(25), 7827–7832.

Feigenson, L., Dehaene, S. i Spelke, E. (2004). Core system of number. *Trends in Cognitive Science*, *8*(7), 307–314.

Feigenson, L., Libertus, M. E. i Halberda, J. (2013). Links between the intuitive sense of number and formal mathematics ability. *Child Development Perspectives*, *7*(2), 74–79.

Fuhs, M. W. i McNeil, N. M. (2013). ANS acuity and mathematics ability in preschoolers from low-income homes: contributions of inhibitory control. *Developmental Science*, *16*(1), 136–148. doi: 10.1111/desc.12013

Geary, D. C. (1995). Reflections of evolution and culture in children's cognition: implications for mathematical development and instruction. *American Psychologist*, *50*(1), 24–37.

Gelman, R. i Baillargeon, R. (1983). A review of some Piagetian concepts. W: P. H. Mussen (red.), *Handbook of child psychology* (s. 167–230). New York: John Wiley & Sons.

Gilmore, C. K., McCarthy, S. E. i Spelke, E. S. (2010). Non-symbolic arithmetic abilities and achievement in the first year of formal schooling in mathematics. *Cognition*, *115*(3), 394–406.

Gilmore, C. K., Attridge, N., Clayton, S., Cragg, L., Johnson, S., Marlow, N., Simms, V. i Inglis, M. (2013). Individual differences in inhibitory control, not non-verbal number acuity, correlate with mathematics achievement. *Plos One*, *8*(6), e67374.

Gold, R. (1984). Performance on Donaldson and McGarrigle's "cars and garages" task as evidence about the reasons for failure on Piaget's number-conservation task. *The Journal of Genetic Psychology*, *147*(2), 151–165.

Gracia-Bafaully, M. i Noël, M. P. (2008). Does finger training increase young children's numerical performance? *Cortex*, *44*(4), 368–375.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 170–218.

Griffin, S. (2004). Building number sense with Number Worlds: a mathematics program for young children. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*(1), 173–180.

Gruszczyk-Kolczyńska, E. i Skura, M. (2005). *Skarbiec matematyczny*. Warszawa: Nowa Era.

Gruszczyk-Kolczyńska, E. (2012). *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Gruszczyk-Kolczyńska, E. (red.). (2014). *Edukacja matematyczna w klasie I. Książka dla nauczycieli i rodziców.* Kraków: Wydawnictwo Centrum Edukacyjne Bliżej Przedszkola.

Gunderson, E. A., Ramirez, G., Beilock, S. L. i Levine, S. C. (2012). The relation between spatial skill and early number knowledge: the role of the linear number line. *Developmental Psychology*, *48*(5), 1229–1241.

Halberda, J. i Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the "number sense": the approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, *44*(5), 1457–1465.

Halberda, J., Ly, R., Wilmer, J., Naiman, D. i Germine, L. (2012). Number sense across the lifespan as revealed by a massive internet-based sample. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *109*(28), 11116–11120.

Halberda, J., Mazzocco, M. M. i Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, *445*(2), 665–669.

Hassinger-Das, B., Jordan, N. C., Glutting, J., Irwin, C. i Dyson, N. (2014). Domain-general mediators of the relation between kindergarten number sense and first-grade mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 118, 78–92.

Holloway, I. D. i Ansari, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: the numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *103*(1), 17–29.

Honoré, N. i Noël, M.-P. (2016). Improving preschoolers' arithmetic through number magnitude training: the impact of non-symbolic and symbolic training. *Plos One*, *11*(11). doi: 10.1371/journal.pone.0166685

Hornung, C., Schiltz, C., Brunner, M. i Martin, R. (2014). Predicting first-grade mathematics achievement: the contributions of domain-general cognitive abilities, nonverbal number sense, and early number competence. *Frontiers in Psychology*, 5. doi: 10.3389/fpsyg.2014.00272

Howell, S. C. i Kemp, C. R. (2010). Assessing preschool number sense: skills demonstrated by children prior to school entry. *Educational Psychology*, *30*(4), 411–429.

Hyde, D. C. i Spelke, E. S. (2010). Neural signatures of number processing in human infants: evidence for two core systems underlying numerical cognition. *Developmental Science*, *14*(2). doi: 10.1111/j.1467-7687.2010.00987.x

Inglis, M., Attridge, N., Batchelor, S. i Gilmore, C. (2011). Non-verbal number acuity correlates with symbolic mathematics achievement: but only in children. *Psychonomic Bulletin & Review*, *18*(6), 1222–1229.

Inhelder, B. i Piaget, J. (1970). *Od logiki dziecka do logiki młodzieży.* Warszawa: PWN.

Jordan, N. C. (2007). The need for number sense. *Early Intervention at Every Age*, *65*(2), 63–65.

Jordan, N. C., Glutting, J. i Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, *20*(2), 82–88.

Kalinowska, A. (2013). *Wczesnoszkolna edukacja matematyczna – ograniczenia i ich przełamywanie.*

Olsztyn: Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego.

Kaufmann, L., Wood, G., Rubinsten, O. i Henik, A. (2011). Meta-analysis of developmental fMRI studies investigating typical and atypical trajectories of number processing and calculation. *Developmental Neuropsychology*, *36*(6), 763–787.

Kaufmann, L., Kucian, K. i Aster, M. von (2015). Development of the numerical brain. W: R. Cohen Kadosh i A. Dowker (red.), *The Oxford handbook of numerical cognition* (s. 485–501). Oxford: Oxford University Press.

Koechlin, E., Dehaene, S. i Mehler, J. (1997). Numerical transformations in five-month-old human infants. *Mathematical Cognition*, *3*(2), 89–104.

Klus-Stańska, D. i Kalinowska, A. (2004). *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*. Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak".

Klus-Stańska, D. i Nowicka, M. (2014). *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*. Gdańsk: Harmonia Universalis.

Libertus, M. E., Feigenson, L. i Halberda, J. (2013). Is approximate number precision a stable predictor of math ability? *Learning and Individual Differences*, *25*(1), 126–133.

Libertus, M., Odic, D. i Halberda, J. (2012). Intuitive sense of number correlates with math scores on college-entrance examination. *Acta Psychologica*, *141*(3), 373–379.

Lindskog, M., Winman, A. i Juslin, P. (2014). The association between higher education and approximate number system acuity. *Frontiers in Psychology*, 5. doi: 10.3389/fpsyg.2014.00462

Lipton, J. S. i Spelke, E. S. (2004). Discrimination of large and small numerosities by human infants. *Infancy*, *5*(3), 271–290.

Lourenço, O. i Machado, A. (1996). In defense of Piaget's theory: a reply to 10 common criticisms. *Psychological Review*, *103*(1), 143–164.

Mackiewicz, R. (2012). Liczby w decyzjach ekonomicznych: instynkt numeryczny i wrażliwość cenowa. W: A. Falkowski i T. Zaleśkiewicz (red.), *Psychologia poznawcza w praktyce. Ekonomia, biznes, polityka* (s. 137–185). Warszawa: PWN.

McGuire, P., Kinzie, M. i Berch, D. (2011). Developing number sense in pre-K with five-frames. *Early Childhood Education Journal*, *40*(4), 213–222.

Mehler, J. i Bever, T. G. (1967). Cognitive capacity of very young children. *Science*, *158*(3797), 141–142.

Mehler, J. i Bever, T. G. (1968). Reply by J. Mehler and T. G. Bever. *Science*, *162*(3857), 979–981.

Menon, V. (2015). Arithmetic in the child and adult brain. W: R. Cohen Kadosh i A. Dowker (red.), *The Oxford handbook of numerical cognition* (s. 502–530). Oxford: Oxford University Press.

McGarrigle, J. i Donaldson, M. (1974). Conservation accidents. *Cognition*, *4*(3), 341–350.

Mix, K. S., Levine, S. C. i Huttenlocher, J. (1997). Numerical abstraction in infants: another look. *Developmental Psychology*, *33*(3), 423–428.

Moore, D. S., Benenson, J., Reznick, J. S., Peterson, M. i Kagan, J. (1987). Effect of auditory numerical information on infants' looking behavior: contradictory evidence. *Developmental Psychology*, *23*(5), 665–670.

Nieder, A. (2005). Counting on neurons: the neurobiology of numerical competence. *Nature Reviews Neuroscience*, 6, 177–190.

Nieder, A. i Merten, K. (2007). A labeled-line code for small and large numerosities in the monkey prefrontal cortex. *Journal of Neuroscience*, *27*(22), 5986–5993.

Nieder, A. i Miller, E. K. (2003). Coding of cognitive magnitude. Compressed scaling of numerical information in the primate prefrontal cortex. *Neuron*, *37*(1), 149–157.

Nieder, A. i Miller, E. K. (2004). A parieto-frontal network for visual numerical information in the monkey. *Proceedings of National Academy of Science*, 101, 7457–7462.

Nosworthy, N., Bugden, S., Archibald, L., Evans, B. i Ansari, D. (2013). A two-minute paper-and--pencil test of symbolic and nonsymbolic numerical magnitude processing explains variability in primary school children's arithmetic competence. *Plos One*, *8*(7), e67918.

Nunes, T. i Bryant, P. E. (1996). *Children doing mathematics.* Oxford: Blackwell.

Oszwa, U. (2009). *Psychologiczna analiza procesów operowania liczbami u dzieci z trudnościami w matematyce.* Lublin: Wydawnictwo UMCS.

Parrish, S. (2010). *Number talks: helping children build mental math and computation strategies, grades K-5.* Sausalito: Math Solutions.

Peters, A. (2013). Realizing utopia as a scholarly endeavor. *The European Journal of International Law*, *24*(2), 533–552.

Piaget, J. (1966). *Narodziny inteligencji dziecka*. Warszawa: PWN.

Piaget, J. (1967). *Six psychological studies.* New York: Random House.

Piaget, J. (1968). Quantification, conservation, and nativism. *Science*, *162*(3857), 976–979.

Piaget, J. i Inhelder, B. (1993). *Psychologia dziecka*. Wrocław: Siedmioróg.

Piazza, M., Pica, P., Izard, V., Spelke, E. S. i Dehaene, S. (2013). Education enhance the acuity of the non-verbal approximate number system, *Psychological Science*, *24*(6), 1037–143.

Piazza, M., Pinel, P., Le Bihan, D. i Dehaene, S. (2007). A magnitude code common to numerosities and number symbols in human intraparietal cortex. *Neuron*, *53*(2), 293–305.

Pica, P., Lemer, C., Izard, V. i Dehaene, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group. *Science*, *306*(5695), 499–503.

Pina, V., Castillo, A., Cohen Kadosh, R. i Fuentes, L. J. (2015). Intentional and automatic numerical processing as predictors of mathematical abilities in primary school children. *Frontiers in Psychology*, 6. doi: 10.3389/fpsyg.2015.00375

Pixner, S., Moeller, K., Nuerk, H.-C., Hermanova, V. i Kaufmann, L. (2011). Whorf reloaded: language effects on non-verbal number processing in first grade – a trilingual study. *Journal of Experimental Child Psychology*, *108*(2), 371–382.

Price, G. R., Palmer, D., Battista, C. i Ansari, D. (2012). Nonsymbolic numerical magnitude comparison: reliability and validity of different task variants and outcome measures, and their relationship to arithmetic achievement in adults. *Acta Psychologica*, *140*(1), 50–57.

Ramani, G. B. i Siegler, R. S. (2011). Reducing the gap in numerical knowledge between low- and middle-income preschoolers. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *32*(3), 146–159.

Reinholz, A., Rychwalska, A., Stefańska, J. i Trojan, M. (2003). Wpływ ilości i układu elementów małych zbiorów na jakość subityzowania. *Psychologia–Etologia–Genetyka*, 8, 91–112.

Reys, B. J. (1994). Promoting number sense in middle grades. *Teaching Mathematics in the Middle School*, 1, 114–120.

Rumbaugh, D. M., Savage-Rumbaugh, S. i Hegel, M. T. (1987). Summation in the chimpanzee (Pan troglodytes). *Journal of Experimental Psychology. Animal Behavior Processes*, *13*(2), 107–115.

Sasanguie, D., Göbel, S., Moll, K., Smets, K. i Reynvoet, B. (2013). Approximate number sense, symbolic number processing, or number-space mappings: what underlies mathematics achievement? *Journal of Experimental Child Psychology*, 114, 418–431.

Semadeni, Z. (2016). *Podejście konstruktywistyczne do matematycznej edukacji wczesnoszkolnej*. Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji.

Seron, X. i Pesenti, M. (2001). The number sense theory needs more empirical evidence. *Mind and Language*, *16*(1), 76–88.

Simon, T. J. (1997). Reconceptualizing the origins of number knowledge: a "non numerical" account. *Cognitive Development*, 12, 349–372.

Simon, T. J., Hespos, S. J. i Rochat, P. (1995). Do infants understand simple arithmetic? A replication of Wynn (1992). *Cognitive Development*, 10, 253–269.

Slusser, E., Ditta, A. i Sarnecka, B. (2013). Connecting numbers to discrete quantification: a step in the child's construction of integer concepts. *Cognition*, *129*(1), 31–41.

Soltesz, F., Szűcs, S. i Szűcs, L. (2010). Relationships between magnitude representation, counting and memory in 4-to 7-year-old children: a developmental study. *Behavioral and Brain Functions*, *13*(6), 1–14.

Starkey, P. i Cooper, R. G. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science*, *210*(4473), 1033–1035.

Starkey, P., Spelke, E. S. i Gelman, R. (1983). Detection of intermodal numerical correspondences by human infants. *Science*, *222*(4620), 179–181.

Strauss, M. i Curtis, L. (1981). Infant perception of numerosity. *Child Development*, *52*(4), 1146–1152.

Szczygieł, M., Cipora, K. i Hohol, M. (2015). Liczenie na palcach w ontogenezie i jego znaczenie dla rozwoju kompetencji matematycznych. *Psychologia Rozwojowa*, *20*(3), 23–33.

Szemińska, A. (1981). Rozwój pojęć matematycznych u dziecka, W: Z. Semadeni (red.). *Nauczanie początkowe matematyki. Podręcznik dla nauczyciela* (t. 1, s. 112–250). Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Szűcs, D., Devine, A., Soltesz, F., Nobes, A. i Gabriel, F. (2014). Cognitive components of a mathematical processing network in 9-year-old children. *Developmental Science*, *17*(4), 506–524.

Wadsworth, B. J. (1998). *Teoria Piageta. Poznawczy i emocjonalny rozwój dziecka*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Wakeley, A., Rivera, S. i Langer, J. (2000). Can young infants add and subtract? *Child Development*, *71*(6), 1525–1534.

Walden, T., Kim, G., McCoy, C. i Karrass, J. (2007). Do you believe in magic? Infants' social looking during violations of expectations. *Developmental Science*, *10*(5), 654–663.

Wilson, A. J., Revkin, S. K., Cohen, D., Cohen, L. i Dehaene, S. (2006). An open trial assessment of "The Number Race", an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. *Behavioral and Brain Function*, *20*(2). doi: 10.1186/1744-9081-2-20

Wilson, A, Dehaene, S., Dubois, O. i Fayol, M. (2009). Effects of an adaptive game intervention on accessing number sense in low-socioeconomic-status kindergarten children. *Mind, Brain and Education*, *4*(3), 224–234.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, *358*(6389), 749–750.

Xu, F. i Carey, S. (1996). Infants' metaphysics: the case of numerical identity. *Cognitive Psychology*, *30*(2), 111–153.

Xu, F. i Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, 74, B1–B11.

Podziękowania

Ostateczna wersja artykułu powstała dzięki wnikliwym i konstruktywnym wskazówkom, za które serdecznie dziękuję dwóm anonimowym recenzentom. Odpowiedzialność za jej treść spoczywa na mnie.

Tekst złożony 14 listopada 2016 r., zrecenzowany 14 stycznia 2017 r., przyjęty do druku 1 marca 2017 r.

Jean Piaget's constructivism and the number sense theory vs mathematics education

Piaget's claim that the cognitive development of a child is the basis for acquiring and developing the concept of numbers as well as the ability to work with numbers, had a huge impact on the methods of teaching mathematics in Poland and the world. Since the appearance of research results indicating the existence of a biological basis for the ability to work with numbers, the Piaget's theory has been widely criticized by representatives of cognitive neuropsychology. The evidence that there is an innate foundation for the formation and development of numerical representation, independent of language and education, has influenced the manner of constructing educational curricula and methodological recommendations in Western Europe and the United States. Although the discussion on the possibility of children acquiring and developing number sense has been ongoing for many years, it is still difficult to point to a conclusive resolution of this issue. The aim of this paper is to present a critical analysis of the two theoretical concepts and recommendations for educational practice, formulated within their frameworks.

Keywords: educational psychology, mathematics education, concept of numbers, Piaget's theory, number sense theory.