Uniwersytet Jagielloński
w Krakowie
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki

Krzysztof Wesołowski

Punkty stałe odwzorowań w przestrzeniach metrycznych i SF-przestrzeniach

Rozprawa doktorska

przygotowana pod kierunkiem
prof. zw. dr hab. Grzegorza Lewickiego

Kraków 2014

Składam serdeczne podziękowania
Panu Profesorowi Grzegorzowi Lewickiemu
za wspaniałą współpracę, nieocenioną pomoc, życzliwość i opiekę naukową
podczas przygotowywania niniejszej rozprawy.

Mojej Żonie Kamili

Spis treści

Wstęp **5**

1 Metryczna teoria punktu stałego **8**

2 Uogólnione twierdzenie Banacha o punkcie stałym **14**

2.1 Przegląd istniejących wyników dotyczących *Uogólnionego Twierdzenia Banacha o Punkcie Stałym* 15

2.2 Definicje 16

2.3 Dowód uogólnionego twierdzenia Banacha o punkcie stałym (Tw. 2.2) 17

2.4 Przypadki szczególne 34

3 Odwzorowania α - nierozszerzające **49**

3.1 Definicje i własności odwzorowań α-nierozszerzających 49

3.2 Pewne nowe wyniki dotyczące odwzorowań α-nierozszerzających . . 50

4 SF-przestrzenie **58**

4.1 Definicje 58

4.2 Uogólnione twierdzenie Banacha o punkcie stałym w SF-przestrzeniach 62

Bibliografia **67**

Wstęp

Teoria punktu stałego to jedno z najbardziej użytecznych narzędzi matematyki współczesnej. Znajduje zastosowanie w wielu gałęziach matematyki, między innymi w badaniu istnienia i jedyności rozwiązań nieliniowych równań różniczkowych i całkowych, a także w inżynierii, fizyce, ekonomii, teorii gier, biologii, chemii i innych naukach. Zajmuje się ona przede wszystkim odpowiedzią na pytanie, przy jakich warunkach nałożonych na niepusty zbiór X i na odwzorowanie $T : X \to X$ istnieje element $x \in X$ taki, że $T(x) = x$ (jest on nazywany punktem stałym T).

Korzenie tej teorii sięgają pracy Poincare'a ([P]) z roku 1886, jednak początek wyodrębniania się jej jako samodzielnego działu matematyki to wiek XX, wraz z ukształtowaniem się języka i metod topologii i analizy funkcjonalnej.

W 1910 r. Brouwer udowodnił, że odwzorowanie ciągłe domkniętej kuli w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ w siebie ma punkt stały ([Brou1]). Rok później Hadamard przedstawił pierwszy dowód uogólnienia tego twierdzenia na przestrzeń $\mathbb{R}^n$, zaś w 1912 r. Brouwer przedstawił własny dowód. W 1930 r. wynik Brouwera uogólnił Schauder na niepuste, wypukłe i zwarte podzbiory przestrzeni Banacha, a po nim w 1941 r. Kakutani ([Kak]) na multifunkcje.

Z drugiej strony w roku 1922 r. Banach udowodnił słynne twierdzenie, mówiące o jedyności punktu stałego, gdy T jest kontrakcją, zaś X przestrzenią metryczną zupełną ([Ba]). Wynik ten uogólnili między innymi Kirk na odwzorowania nierozszerzające i Kannan ([BK], [Kan]).

Twierdzenia Brouwera i Banacha wyznaczają dwa różne nurty teorii punktu stałego - topologiczny i metryczny. Jednak, formalnie rzecz biorąc, punkty stałe można badać, mając do dyspozycji znacznie uboższą strukturę - zbiór i odwzorowanie na nim określone. Takie podejście - dyskretne - ukierunkowane jest przez twierdzenie Tarskiego ([T]), w którym odwzorowanie określone jest na kracie zupełnej. W rozdziale 1 zostaną przedstawione szerzej pewne wyniki dotyczące metrycznej teorii punktu stałego.

Dynamiczny rozwój teorii punktu stałego nastąpił w drugiej połowie XX wieku i wiązał się z nowymi wynikami dotyczącymi m.in. odwzorowań nierozszerzających, multifunkcji, jedności punktu stałego, jego przybliżania, czy stuktury zbioru punktów stałych.

Przez dłuższy czas otwarty był następujący problem, związany z klasycznym twierdzeniem Banacha o punkcie stałym:

Problem 1. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech $T : X \to X$ będzie takie, że przy pewnych $N \geqslant 1$ oraz $0 < M < 1$ zachodzi*

$$\min\{d(T^j x, T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant N\} \leqslant M d(x, y)\ \forall x, y \in X.$$

Wtedy T ma dokładnie jeden punkt stały.

Częściowe rezultaty dotyczące tego problemu można znaleźć między innymi w [JSS], [G2], [JS], [S], [MRS]. Przegląd tych wyników przedstawiamy w rozdziale 2.

Powyższa hipoteza została pozytywnie rozstrzygnięta w pracach *A generalization of the Banach contraction principle* autorstwa Jamesa Merryfelda i Jamesa D. Steina ([MS]) oraz *A proof of the generalized Banach contraction conjecture* autorstwa Alexandra D. Arvanitakisa ([A]).

Niniejsza rozprawa nawiązuje do tego wyniku. Głównym jej celem jest udowodnienie następującego rezultatu:

Twierdzenie 1. *Niech* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech* $T : X \to X$ *będzie takie, że*

$$\min\{d(T^j x, T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant N\} \leqslant \varphi(d(x,y)) \cdot d(x,y) \qquad \forall x, y \in X$$

przy pewnym $N \geqslant 1$ *(niezależnym od* x *i* y*) oraz przy pewnej ciągłej funkcji* $\varphi : [0,\infty) \to [0,1]$ *takiej, że* $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$ *oraz* $\exists t_0 > 0,\ \lambda < 1\ \forall t \geqslant t_0 \quad \varphi(t) \leqslant \lambda$. *Wtedy* T *ma dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód tego twierdzenia, przedstawiony w rozdziale 2, bazuje na lematach kombinatorycznych i pochodzącym od H. Furstenberga rezultacie ([F, Tw. 1.24]). Podajemy również przy silniejszych założeniach na odwzorowanie T prostsze dowody Tw. 1 (tw. 2.12, 2.11, 2.13).

W rozdziale 3. podajemy zastosowania Tw. 1 do badania punktów stałych odwzorowań α-nierozszerzających, wprowadzonych przez K. Goebela (def. 3.1, 3.2).

W rozdziale 4. pokazujemy, że wcześniej udowodnione rezultaty pozostają prawdziwe, gdy metrykę zastąpimy przez wprowadzoną przez G. Lewickiego w pracy [L] SF-normę. SF-norma jest pewnym uogólnieniem F-normy oraz modularu.

Badania zostały wykonane przy finansowym wsparciu Narodowego Centrum Nauki w ramach projektu nr N N201 609640.

Rozdział 1

Metryczna teoria punktu stałego

Przedstawimy teraz kilka istotnych własności i przykładów związanych z metryczną teorią punktu stałego.

Twierdzenie 1.1 (Twierdzenie Banacha o punkcie stałym)**.** *Niech X będzie przestrzenią metryczną zupełną, zaś $T : X \to X$ kontrakcją. Wtedy T posiada dokładnie jeden punkt stały x_0. Jest on granicą ciągu $\{T^n x\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie x jest wybrany dowolnie.*

Oczywiście założenie zupełności X jest istotne, o czym świadczy poniższy

Przykład 1.1. *Niech $X = (0, 1)$ oraz $T : X \ni x \mapsto \frac{1}{2}x \in X$. Wtedy T jest kontrakcją, choć nie ma punktu stałego.*

W powyższym twierdzeniu nie da się osłabić założenia kontrakcyjności poprzez szacowanie $d(Tx, Ty) < d(x, y)$, co pokazuje poniższy

Przykład 1.2. *Niech $T : [1, \infty) =: X \ni x \mapsto Tx := x + \frac{1}{x} \in [1, \infty)$. Wtedy T nie ma punktu stałego.*

Można osłabić założenie o kontrakcyjności, jednocześnie więcej wymagając od samej przestrzeni.

Twierdzenie 1.2 (Twierdzenie Schaudera o punkcie stałym)**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha, zaś $C \subset X$ wypukły i zwarty oraz $T : C \to C$ ciągłe. Wtedy T ma punkt stały.*

O tym, że nie można pominąć założenia zwartości, świadczą przykłady 1.1 i 1.2, zaś że istotna jest wypukłość pokazuje

Przykład 1.3. *Niech $X := l_2^2$, $X \supset C := S((0,0),1)$ oraz $T : C \ni (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1) \in C$. Wtedy oczywiście $\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$, $x, y \in C$, zatem T jest ciągłe, jednak nie ma punktu stałego, a nawet minimalne przesunięcie jest większe od* 0.

Twierdzenie 1.3 ([Kl])**.** *Dla każdej przestrzeni Banacha X, dowolnego niepustego, domkniętego, wypukłego, ale nie zwartego podzbioru $C \subset X$ istnieje odwzorowanie ciągłe $T : C \to C$ nie mające punktu stałego.*

Twierdzenie 1.4 ([Brow], [Ki], [G1])**.** *Niech X będzie jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha, niech także $C \subset X$ będzie niepusty, domknięty, wypukły i ograniczony, zaś $T : C \to C$ nierozszerzające. Wtedy T ma punkt stały.*

Założenie ograniczoności C jest istotnie, co pokazuje

Przykład 1.4. *Niech $C := X := [0, \infty)$ z normą euklidesową, zaś $T : C \ni x \to x + 1 \in C$. Wtedy T nie ma punktu stałego.*

Punkt stały, o którym mowa w powyższym twierdzeniu, nie musi być jedyny, o czym świadczy

Przykład 1.5. *Wystarczy wziąć* $C := X := [0,1]$ *z normą euklidesową, oraz* $Tx := x$.

Nawet, jeśli punkt stały jest jedyny, to nie musi być wyznaczony jako granica ciągu iteracji T. Zresztą, granica ta nie musi wcale istnieć.

Przykład 1.6. *Niech* $C := X := [0,1]$ *oraz* $Tx = 1 - x$ *dla* $x \in C$. *Biorąc* $x_0 = 0$ *ciąg* $\{T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$ *nie ma granicy.*

Założenia, że T jest nierozszerzające nie da się w twierdzeniu 1.4 osłabić, co pokazuje

Przykład 1.7 ([CG, Prz. 1])**.** *Niech* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ *oraz*

$$T : l^2 \supset B \ni x = (x_1, x_2, x_3, ...) \to Tx := (\varepsilon(1 - \|x\|), x_1, x_2, x_3, ...) \in S \subset B \subset l^2.$$

Wtedy $\|Tx - Ty\| \leqslant \sqrt{1 + \varepsilon^2}\,\|x - y\|$ *oraz* T *nie ma punktu stałego, choć* T *jest lipschitzowskie ze stałą dowolnie bliską* 1, *zaś* $d(T) = 0$.

Bez założenia jednostajnej wypukłości w 1.4 możemy uzyskać mniej.

Twierdzenie 1.5. *Niech* X *będzie przestrzenią Banacha,* $C \subset X$ *niepusty, domknięty, ograniczony i wypukły. Jeśli* $T : C \to C$ *jest nierozszerzające, to* $d(T) = 0$.

O tym, że nie można wymagać istnienia punktu stałego, świadczą poniższe przykłady.

Przykład 1.8. *Niech*

$$C[0,1] =: X \supset C := \{x : \; 0 = x(0) \leqslant x(t) \leqslant x(1) = 1\}$$

oraz $T : C \to C$ *niech będzie dana następująco* $(Tx)(t) := x(\min\{2t, 1\})$ *. Wtedy* T *jest izometrią, zatem jest nierozszerzające,* $d(T) = 0$*, jednakże* T *nie ma punktu stałego.*

O tym, że wypukłość jest istotna, świadczy przykład 1.3.

Przykład 1.9 (shift w prawo)**.** *Niech* $X := c_0$ *oraz* $T : X \to X$ *niech będzie dana następująco*

$$(Tx)_i := \begin{cases} x_{i-1}, & i \geqslant 1 \\ 1 & i = 0 \end{cases} .$$

Wtedy T *również jest izometrią, bez punktu stałego.*

Przykład 1.7 pokazuje, że klasa odwzorowań, dla których $d(T) = 0$, jest szersza, niż tylko odwzorowania nierozszerzające, co jest intuicyjne.

Ponadto zachodzi następujące

Twierdzenie 1.6 ([LS])**.** *Dla każdej przestrzeni Banacha* X*, dowolnego niepustego, domkniętego, ograniczonego, wypukłego, ale niezwartego podzbioru* $C \subset X$ *oraz dowolnej* $k > 1$ *istnieje odwzorowanie* $T : C \to C$ *klasy* $L(k)$ *takie, że* $d(T) > 0$.

Przykład 1.10 ([CG, Prz. 5])**.** *Niech* $X = c_0$*,* $k \geqslant 1$ *oraz* $\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto \alpha(t) := \min\{|t|, 1\} \in \mathbb{R}$*. Niech*

$$T : X \supset B \ni x = (x_1, x_2, x_3, ...) \mapsto Tx := (1, \alpha(k|x_1|), \alpha(k|x_2|), \alpha(k|x_3|), ...) \in B$$

Wtedy $T \in L(k)$ *oraz* $\|x - Tx\| \geqslant 1 - \frac{1}{k}$.

Przykład 1.11 ([CG, Prz. 9])**.** *Niech*

$$C[0, 1] =: X \supset C := \{x : 0 = x(0) \leqslant x(t) \leqslant x(1) = 1\} .$$

Niech $C \ni \alpha \neq id_{[0,1]}$. *Niech* $T_\alpha : C \to C$ *będzie dana następująco:*

$$T_\alpha x(t) := (\alpha \circ x)(t).$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \|x - T_\alpha x\| &= \max\{|x(t) - \alpha(x(t))|\,,\ t \in [0,1]\} \\ &= \max\{|s - \alpha(s)|\,,\ s \in [0,1]\} \\ &= \left\| id_{[0,1]} - \alpha \right\| = const > 0. \end{aligned}$$

Dla $\alpha(t) := \min\{kt, 1\}$ *jest* $\|x - T_\alpha x\| \geqslant 1 - \frac{1}{k}$.

Przykład 1.12 ([G4, Prz. 1]). *Niech*

$$C[0,1] \supset C := \{x :\ 0 = x(0) \leqslant x(t) \leqslant x(1) = 1\}$$

oraz $T : C \to C$ *będzie dana następująco*

$$(Tx)(t) := k \cdot \max\left\{x(t) + \frac{1}{k} - 1, 0\right\}.$$

Wtedy $T \in L(k)$ *oraz* $\|x - Tx\| \geqslant 1 - \frac{1}{k}$.

Przykład 1.13 ([G4, Prz. 2]). *Niech*

$$L^1(0,1) \supset C := \left\{x \in L^1 : 0 \leqslant x(t),\ \|x\|_{L^1} = 1\right\}$$

i niech $t_x := \sup\left\{t :\ \int_0^t x(s)ds = 1 - \frac{1}{k}\right\}$. *Określmy*

$$(Tx)(t) := \begin{cases} 0, & t \leqslant t_x \\ kx(t), & t > t_x \end{cases}.$$

Wtedy $T \in L(k)$ *oraz* $\|x - Tx\| \geqslant 1 - \frac{1}{k}$.

Przykład 1.14 ([G4, Prz. 3]). *Niech* $c_0 \supset C := \{(x_i)_{i=1}^\infty :\ x_1 = 1,\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$. *Niech*

$$(Tx)_i := \begin{cases} 1, & i = 1 \\ \min\{1, kx_{i-1}\}, & i > 1 \end{cases}.$$

Wtedy $T \in L(k)$ *oraz* $\|x - Tx\| \geqslant 1 - \frac{1}{k}$.

Przykład 1.15. *Ustalmy $k > 1$. Niech*

$$\alpha : [-1.1] \ni t \mapsto \alpha(t) := \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t \leqslant -\frac{1}{k} \\ kt, & -\frac{1}{k} \leqslant t \leqslant \frac{1}{k} \\ 1, & \frac{1}{k} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \in [-1, 1]$$

oraz $T : C[-1, 1] \to C[-1, 1]$ będzie dana następująco

$$(Tx)(t) := \alpha(\max\{-1, \min\{1, x(t) + 2t\}\} .$$

Wtedy $\|x - Tx\| \geqslant 1 - \frac{1}{k}$.

Przykład 1.16. *Niech $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \supset C := \{x : 0 = x(0) \leqslant x(t) \leqslant x(1) = 1\}$ oraz $T : C \to C$ niech będzie określona następująco*

$$(Tx)(t) := (\frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2})x\,(t)\,.$$

Wtedy $\|x - Tx\| \geqslant \frac{1}{8}$

Twierdzenie 1.7 ([GSz])**.** *Niech $T : C \to C$ będzie odwzorowaniem lipschitzowskim z $d := d(T) > 0$. Wtedy $\tilde{T} : C \ni x \mapsto x + d \cdot \frac{Tx-x}{\|Tx-x\|} \in C$ jest odwzorowaniem lipschitzowskim, dla którego $\left\|x - \tilde{T}x\right\| = d$ dla dowolnego $x \in C$.*

Twierdzenie 1.8 ([G4, Tw. 1])**.** *Niech X będzie przestrzenią Banacha, $C \subset X$ niepusty, domknięty, ograniczony i wypukły, $k \geqslant 1$. Niech teraz $r(x, C) := \sup\{\|x - y\|, y \in C\}$ oraz $r(C) := \inf\{r(x, C),\ x \in C\}$. Niech $T \in L(k, C)$. Wtedy*

$$d(T) \leqslant r(C)\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

W kolejnych rozdziałach przytoczone będą istniejące i przedstawione nowe wyniki dotyczące osłabienia założeń niektórych wyżej wymienionych twierdzeń.

Rozdział 2

Uogólnione twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Jak już wspomnieliśmy we wstępie, w tym rozdziale przedstawimy pewne uogólnienie poniższego rezultatu:

Twierdzenie 2.1 (Uogólnione twierdzenie Banacha o punkcie stałym)**.** *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech $T : X \to X$ będzie takie, że przy pewnych $N \geqslant 1$ oraz $0 < M < 1$ zachodzi*

$$\min\{d(T^j x, T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant N\} \leqslant M d(x, y)\ \forall x, y \in X.$$

Wtedy T ma dokładnie jeden punkt stały.

Motywację do rozważania stanowiły uwagi dotyczące Twierdzenia 2.1 z [G2, str. 21].

Głównym rezultatem niniejszej rozprawy jest następujące

Twierdzenie 2.2. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech $T : X \to X$ będzie takie, że*

$$\min\{d(T^j x, T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant N\} \leqslant \varphi(d(x, y)) \cdot d(x, y) \qquad \forall x, y \in X$$

przy pewnym $N \geqslant 1$ *(niezależnym od* x *i* y*) oraz przy pewnej ciągłej funkcji* $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1]$ *takiej, że*

- $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$
- $\exists t_0 > 0,\ \lambda < 1\ \forall t \geqslant t_0 \quad \varphi(t) \leqslant \lambda.$

Wtedy T *ma dokładnie jeden punkt stały.*

2.1 Przegląd istniejących wyników dotyczących *Uogólnionego Twierdzenia Banacha o Punkcie Stałym*

Przytoczmy najpierw kilka faktów dotyczących etapów dowodu Tw. 2.1. W literaturze anglojęzycznej przyjęło się używać dla niego nazwy *Generalized Banach Contraction Principle.*

Dla $N = 1$ sprowadza się ono do klasycznego twierdzenia Banacha o punkcie stałym, w którym odwzorowanie T jest jednostajnie ciągłe.

W [JSS] udowodniono, że twierdzenie zachodzi w szczególnym przypadku, gdy $N = 2$, a także dla $N = 3$ przy dodatkowym założeniu, że T jest ciągłe. Wskazano także przykłady nieciągłych odwzorowań, które spełniają założenia twierdzenia przy $N = 3$.

W [G2, str. 22] oraz [JS] pokazano, że twierdzenie zachodzi przy dowolnym $N \geqslant 1$, przy dodatkowym założeniu, że T jest jednostajnie ciągłe.

W [S] udowodniono, że twierdzenie zachodzi przy dowolnym $N \geqslant 1$, o ile T jest silnie ciągłe.

W [MRS] pokazano, że twierdzenie zachodzi przy dowolnym $N \geqslant 1$, o ile T jest ciągłe, a także przy $N = 3$ bez dodatkowych założeń o T.

Ostatecznie w [A] oraz [MS] udowodniono Tw. 2.1 przy dowolnym $N \geqslant 1$ i ustalonym $0 < M < 1$.

2.2 Definicje

W dalszej części rozdziału przydatne będą następujące definicje:

Definicja 2.1. *Skończony zbiór $A = \{n_1 < n_2 < ... < n_k\} \subset \mathbb{N}$ nazywamy S - syndetycznym przy pewnej stałej $S \in \mathbb{N}$, jeśli $n_{i+1} - n_i \leqslant S$ dla $1 \leqslant i \leqslant k-1$.*

Definicja 2.2. *Nieskończony zbiór $A \subset \mathbb{N}$ nazywamy S - syndetycznym przy pewnej stałej $S \in \mathbb{N}$, jeśli dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$ zachodzi $\{i \in \mathbb{N} : l+1 \leqslant i \leqslant l+S\} := [l+1, l+S] \cap A \neq \varnothing$.*

Definicja 2.3. *Zbiór A nazywamy syndetycznym, jeśli A jest S - syndetyczny przy pewnej stałej $S \in \mathbb{N}$.*

Definicja 2.4. *Nieskończony zbiór $A \subset \mathbb{N}$ nazywamy kawałkami S - syndetycznym przy pewnej stałej $S \in \mathbb{N}$, jeśli dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ istnieje $B \subset A$ taki, że $\#B \geqslant N$ oraz B jest S - syndetyczny.*

Definicja 2.5. *Zbiór A nazywamy kawałkami syndetycznym, jeśli A jest kawałkami S - syndetyczny przy pewnej stałej $S \in \mathbb{N}$.*

2.3 Dowód uogólnionego twierdzenia Banacha o punkcie stałym (Tw. 2.2)

Przytoczmy najpierw następujący istotny dla naszych rozważań rezultat

Twierdzenie 2.3 ([F, Tw. 1.24]). *Jeśli $\mathbb{N} \supset B = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$ jest kawałkami syndetyczny, to istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że B_i jest kawałkami syndetyczny.*

Następnie przejdźmy dowodu Tw. 2.2. W tym celu udowodnimy trzy rezultaty. Zacznijmy od:

Twierdzenie 2.4. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Niech $T : X \to X$ będzie takie, że*

$$\min\{d(T^j x, T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant N\} \leqslant \varphi(d(x, y)) \cdot d(x, y) \qquad \forall x, y \in X$$

przy pewnym $N \geqslant 1$ oraz przy pewnej ciągłej funkcji $\varphi :\ [0, \infty) \to [0, 1]$ takiej, że

- $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$
- $\exists t_0 > 0,\ \lambda < 1\ \forall t \geqslant t_0 \quad \varphi(t) \leqslant \lambda.$

Wtedy dla dowolnego $x_0 \in X$ istnieje $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ - ciąg N-syndetyczny i rosnący taki, że ciąg $\{T^{b_n} x_0\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony oraz $b_1 = 0$.

Dowód. Ustalmy $x_0 \in X$. Niech $C := \max\{d(x_0, T^k x_0),\ 1 \leqslant k \leqslant N\}$. Jeśli $C = 0$, to x_0 jest punktem stałym T i wystarczy wziąć $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \mathbb{N}$. W przeciwnym wypadku niech t_0 oraz λ będą ustalone na mocy założenia. Określmy

$$M := \max\{\frac{1}{2}, \sup_{t \geqslant C} \varphi(t)\}.$$

Oczywiście

$$\sup_{t\geqslant C}\varphi(t)=\max\{\sup\{\varphi(t),\ t\in[C,\max\{t_0,C{+}1\}]\},\sup\{\varphi(t),\ t\geqslant\max\{t_0,C{+}1\}\}\}.$$

Jednakże z twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu przez funkcję ciągłą kresów na zbiorze zwartym wynika, że

$$\sup\{\varphi(t),\ t\in[C,\max\{t_0,C+1\}]\}=\varphi(a)<1$$

przy pewnym $a\in[C,\max\{t_0,C+1\}]$.

Z drugiej strony z założenia $\sup\{\varphi(t),\ t\geqslant\max\{t_0,C+1\}\}\leqslant\lambda<1$, a zatem ostatecznie $\frac{1}{2}\leqslant M<1$.

Wybierzemy taki ciąg $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, że $d(x_0,T^{b_n}x_0)\leqslant\frac{C}{1-M}$. Niech $b_1:=0$. Zauważmy, że $d(x_0,T^Nx_0)\leqslant C<\frac{C}{1-M}$. Określmy zatem $b_2:=N$.

Mając już określony wyraz b_n taki, że $d(x_0,T^{b_n}x_0)\leqslant\frac{C}{1-M}$ określimy wyraz b_{n+1}. Z założenia istnieje $j_n\in\{1,...,N\}$ takie, że

$$d(T^{j_n}x_0,T^{b_n+j_n}x_0)\leqslant\varphi(d(x_0,T^{b_n}x_0))\cdot d(x_0,T^{b_n}x_0).$$

Zatem

$$\begin{aligned}d(x_0,T^{b_n+j_n}x_0)&\leqslant d(x_0,T^{j_n}x_0)+d(T^{j_n}x_0,T^{b_n+j_n}x_0)\\&\leqslant C+\varphi(d(x_0,T^{b_n}x_0))\cdot d(x_0,T^{b_n}x_0)=:P_n\end{aligned}$$

Jeśli $d(x_0,T^{b_n}x_0)<M\frac{C}{1-M}$, to $P_n\leqslant C+1\cdot M\frac{C}{1-M}=\frac{C}{1-M}$. Przeciwnie, jeśli $d(x_0,T^{b_n}x_0)\geqslant M\frac{C}{1-M}$, to $d(x_0,T^{b_n}x_0)\geqslant C$, gdyż $\frac{M}{1-M}C\geqslant C$ dla $\frac{1}{2}\leqslant M<1$, zatem $\varphi(d(x_0,T^{b_n}x_0))\leqslant\sup_{t\geqslant C}\varphi(t)\leqslant M$. Z tego wynika, że $P_n\leqslant C+M\cdot\frac{C}{1-M}=\frac{C}{1-M}$. Określmy teraz $b_{n+1}:=b_n+j_n$. Oczywiście $d(x_0,T^{b_{n+1}}x_0)\leqslant\frac{C}{1-M}$. □

Udowodnimy teraz twierdzenie, mówiące o istnieniu podorbity T, będącej ciągiem Cauchy'ego. Pomysł na konstrukcję tej podorbity został zaczerpnięty z [A] i dostosowany na potrzeby odwzorowania T, spełniającego słabsze założenie, niż warunek ze stałą M w Twierdzeniu 2.1. Następne twierdzenie stanowi kluczowy fragment dowodu Tw. 2.2.

Twierdzenie 2.5. *Niech* (X,d) *będzie przestrzenią metryczną. Niech* $T: X \to X$ *będzie takie, że przy pewnym* $N \geqslant 1$ *oraz przy pewnej funkcji ciągłej* $\varphi: [0,\infty) \to [0,1]$ *takiej, że*

- $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0,$
- $\exists t_0 > 0,\ \lambda < 1\ \forall t \geqslant t_0 \quad \varphi(t) \leqslant \lambda$

zachodzi

$$\min\{d(T^j x, T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant N\} \leqslant \varphi(d(x,y))d(x,y)\ \forall x,y \in X. \tag{2.1}$$

Wtedy $\forall x_0 \in X\ \exists \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ *takie, że*

- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jest ciągiem kawałkami syndetycznym i różnowartościowym,*
- $\{T^{b_n} x_0\}_{n=1}^{\infty}$ *jest ciągiem Cauchy'ego*

Dowód. Ustalmy dowolne $x_0 \in X$. Na mocy twierdzenia (2.4) istnieje $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ - rosnący, N-syndetyczny, taki, że $\{T^{k_n} x_0\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony oraz $k_1 = 0$. Niech $C := \sup\{d(x_0, T^{k_n} x_0),\ n \in \mathbb{N}_1\} < \infty$.

Dla $j \in \mathbb{N}_1$ definiujemy $i_n^{k_j}$ następująco: $i_0^{k_j} := 0$. Mając $i_0^{k_j}, ..., i_n^{k_j}$ definiujemy

$$\begin{aligned} i_{n+1}^{k_j} := i_n^{k_j} + \min\{l \in \{1,...,N\} :\ & d(T^{i_n^{k_j}+l} x_0, T^{i_n^{k_j}+k_j+l} x_0) \leqslant \\ & \varphi(d(T^{i_n^{k_j}} x_0, T^{i_n^{k_j}+k_j} x_0))d(T^{i_n^{k_j}} x_0, T^{i_n^{k_j}+k_j} x_0)\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Określmy również $z_n^{k_j} := d(T^{i_n^{k_j}} x_0, T^{i_n^{k_j}+k_j} x_0),\ n \in \mathbb{N}_1,\ j \in \mathbb{N}_1$.

Łatwo widać, że ciągi $\{i_n^{k_j}\}_{n=0}^{\infty},\ j \in \mathbb{N}_1$ mają następujące własności:

- $i_1^{k_j} \leqslant N,\ i_2^{k_j} \leqslant 2N,\ ...,\ i_n^{k_j} \leqslant nN,\ n \in \mathbb{N}_1,\ j \in \mathbb{N}_1$
- $\{i_n^{k_j}\}_{n=0}^{\infty}$ jest rosnący, różnowartościowy i N-syndetyczny

- $z_n^{k_j} \leqslant \varphi(z_{n-1}^{k_j}) z_{n-1}^{k_j} \leqslant ... \leqslant \varphi(z_{n-1}^{k_j}) \cdot ... \cdot \varphi(z_0^{k_j}) z_0^{k_j}, \ n \in \mathbb{N}_1, \ j \in \mathbb{N}_1$

Przedstawmy $\mathbb{N}_1$ w postaci nastąpującego rozbicia$\mathbb{N}_1 = \cup_{l=0}^{\infty} \cup_{s=1}^{N} \{l \cdot N + s\}$. Oznaczmy

$$\{k\}^R := \Big\{0 \leqslant r \leqslant k-1 : \ k-r \in \{k_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ oraz } r \in \{i_n^{k-r}\}_{n=0}^{\infty}\Big\}$$

Bez straty ogólności uporządkujmy $\{k\}^R$ rosnąco. Warunek $k - r \in \{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ gwarantuje, że ciąg $\{i_n^{k-r}\}_{n=0}^{\infty}$ istnieje. W praktyce więc $\{k\}^R$ jest niepuste, gdy $k \in \{k_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Dla liczb postaci $l \cdot N$ ($l \in \mathbb{N}$) oznaczmy $\{l \cdot N\}^{SR} := \cup_{s=1}^{N} \{l \cdot N + s\}^R$.

W dalszej części dowodu skorzystamy z następujących faktów.

Fakt 2.5.1. $\forall l \in \mathbb{N} \quad \min\{l \cdot N\}^{SR} = 0.$

Dowód. Ponieważ $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ jest N-syndetyczny, zatem dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$ zachodzi $\{k_j\}_{j=1}^{\infty} \cap \{lN+1, ..., lN+N\} \neq \varnothing$, czyli dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$ istnieje $s_l \in \{1, ..., N\}$ takie, że $l \cdot N + s_l \in \{k_j\}_{j=1}^{\infty}$, zatem $l \cdot N + s_l = k_{j_0}$ przy pewnym $j_0 \in \mathbb{N}_1$. Zauważmy, że $\min\{k_{j_0}\}^R = 0$, gdyż $k_{j_0} - 0 \in \{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ oraz $0 \in \{i_n^{k_{j_0}}\}_{n=0}^{\infty}$, zatem $r = 0 \in \{k_{j_0}\}^R$. Oczywiście $\{k_{j_0}\}^R = \{l \cdot N + s_l\}^R \subset \cup_{s=1}^{N} \{l \cdot N + s\}^R = \{l \cdot N\}^{SR}$, a z tego $0 \leqslant \min\{l \cdot N\}^{SR} \leqslant \min\{l \cdot N + s_l\}^R = \min\{k_{j_0}\}^R = 0$. □

Fakt 2.5.2. *$\{l \cdot N\}^{SR}$ jest $2N$-syndetyczny dla $l \geqslant 1$.*

Dowód. Niech $m := \max\{l \cdot N\}^{SR}$. Załóżmy dla dowodu niewprost, że istnieje $p \in \mathbb{N}$ takie, że $\{p+1, ..., p+2N\} \subset \{1, ..., m\}$ oraz $\{p+1, ..., p+2N\} \cap \{l \cdot N\}^{SR} = \varnothing$. Ponieważ $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ jest N-syndetyczny, zatem $\{lN-p-N, ..., lN-p-1\} \cap \{k_j\}_{j=1}^{\infty} \neq \varnothing$ (zauważmy tutaj, że $lN - p - N \geqslant k_1$. Istotnie, skoro $p + 2N \leqslant m \leqslant lN + N$, to $p \leqslant (l-1)N$, a z tego $lN - p - N \geqslant lN - (l-1)N - N = 0 = k_1$). Zatem istnieje $q \in \{1, ..., N\}$ takie, że $lN - (p+q) \in \{k_j\}_{j=1}^{\infty}$. Ponieważ $\{i_n^{lN-(p+q)}\}_{n=0}^{\infty}$ jest N-syndetyczny i $i_0^{lN-(p+q)} = 0$, więc $\{p+q+1, ..., p+q+N\} \cap \{i_n^{lN-(p+q)}\}_{n=0}^{\infty} \neq \varnothing$, a z tego istnieje $r \in \{1, ..., N\}$ takie, że $p + q + r \in \{i_n^{lN-(p+q)}\}_{n=0}^{\infty}$, a to oznacza, że $p + q + r \in \{(lN - (p + q)) + (p + q + r)\}^R = \{l \cdot N + r\}^R \subset \{l \cdot N\}^R$. Ale z drugiej strony $p + q + r \in \{p + 2, ..., p + 2N\}$, co prowadzi do sprzeczności. $\square$

Fakt 2.5.3. $\max\{l \cdot N\}^{SR} \geqslant (l - 1)N$.

Dowód. Ponieważ $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ jest N-syndetyczny oraz $k_1 = 0$, zatem $\{1, ..., N\} \cap \{k_j\}_{j=1}^{\infty} \neq \varnothing$, a z tego istnieje $p \in \{1, ..., N\}$ takie, że $p \in \{k_j\}_{j=1}^{\infty}$. Ponieważ $\{i_n^p\}_{n=0}^{\infty}$ jest N-syndetyczny, zatem $\{lN - p + 1, ..., lN - p + N\} \cap \{i_n^p\}_{n=0}^{\infty} \neq \varnothing$, a z tego istnieje $q \in \{1, ..., N\}$ takie, że $lN - p + q \in \{i_n^p\}_{n=0}^{\infty}$. Z tego wynika, że $lN - p + q \in \{(lN - p + q) + (p)\}^R = \{lN + q\}^R \subset \{l \cdot N\}^{SR}$. Z drugiej strony skoro $p \leqslant N$, zaś $q \geqslant 1$, to $lN - p + q \geqslant lN - N + 1 \geqslant lN - N$. $\square$

Kontynuacja dowodu Twierdzenia 2.5. Określmy dla $1 \leqslant s \leqslant N,\ 0 \leqslant l$ ciągi

$$\{0, 1\} \supset \{b_n^{l,s}\}_{n=0}^{\infty} := \begin{cases} 1, & n \in \{lN + s\}^R \\ 0, & n \notin \{lN + s\}^R \end{cases},$$

czyli $\{lN + s\}^R = \{n \in \mathbb{N} :\ b_n^{l,s} = 1\}$.

Zatem $\{b_n^{l,s}\}_{n=0}^{\infty}$ jest $0, 1$ - kową reprezentacją ciągu $\{lN + s\}$, np. jeśli $\{lN + s\}^R = \{3, 7\}$, to $\{b_n^{l,s}\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 0, 0, \underbrace{1}_{3}, 0, 0, 0, \underbrace{1}_{7}, 0, 0, ...\}$.

Dla ustalonego $1 \leqslant s \leqslant N$ stabilizując ciągi

$$\begin{array}{lllll} \{b_n^{0,s}\}_{n=0}^{\infty} & = \{b_0^{0,s}, & b_1^{0,s}, & b_2^{0,s}, & ...\} \\ \{b_n^{1,s}\}_{n=0}^{\infty} & = \{b_0^{1,s}, & b_1^{1,s}, & b_2^{1,s}, & ...\} \\ \{b_n^{2,s}\}_{n=0}^{\infty} & = \{b_0^{2,s}, & b_1^{2,s}, & b_2^{2,s}, & ...\} \\ \quad \cdots & \quad \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

na podciągach względem kolejnych współrzędnych istnieje $l_1 < l_2 < ...$ oraz istnieje $\{b_n^{\infty,s}\}_{n=0}^{\infty}$ takie, że $\{b_n^{l_m,s}\}_{n=0}^{\infty} \to \{b_n^{\infty,s}\}_{n=0}^{\infty},\ m \to \infty$, przy czym $b_n^{\infty,s}$ wybieramy równe 1, jeśli $\#\{l : b_n^{l,s} = 1\} = \infty$, w przeciwnym razie kładziemy $b_n^{\infty,s} := 0$. Mamy tutaj na myśli zbieżność punktową, tzn. w następującym sensie

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geqslant m_0 :\ b_n^{l_m,s} = b_n^{\infty,s}. \tag{2.3}$$

Określmy $\{\infty \cdot N + s\}^R := \{n \in \mathbb{N} :\ b_n^{\infty,s} = 1\}$ i uporządkujmy rosnąco. Określmy $\{\infty \cdot N\}^{SR} := \cup_{s=1}^N \{\infty \cdot N + s\}^R$.

Fakt 2.5.4. *$\{\infty \cdot N\}^{SR}$ jest $2N$-syndetycznym podzbiorem $\mathbb{N}$.*

Dowód. Dla dowodu niewprost załóżmy, że istnieje $p \in \mathbb{N}$ takie, że $\{p+1, ..., p+2N\} \cap \{\infty \cdot N\}^{SR} = \varnothing$. Z (2.3) wynika, że

$$\forall n \leqslant p + 2N\ \exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geqslant m_0 :\ b_n^{l_m,s} = b_n^{\infty,s},$$

zatem

$$\exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \leqslant p + 2N\ \forall m \geqslant m_0 :\ b_n^{l_m,s} = b_n^{\infty,s},$$

a z tego wynika, że

$$\exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \leqslant p + 2N\ \forall m \geqslant m_0 \qquad n \in \{l_m \cdot N + s\}^R \Leftrightarrow n \in \{\infty \cdot N + s\}^R.$$

Możemy tutaj wybrać $m_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $l_{m_0} \geqslant p+3N$ oraz takie, które jest wspólne dla wszystkich $1 \leqslant s \leqslant N$, to znaczy:

- $l_{m_0} \geqslant p + 3N$,
- $\forall n \in \{1, ..., p + 2N\}\ \forall m \geqslant m_0\ \forall s \in \{1, ..., N\}$ zachodzi
$$n \in \{l_m \cdot N + s\}^R \Leftrightarrow n \in \{\infty \cdot N + s\}^R, \tag{2.4}$$

Zauważmy, że na mocy poprzednich uwag:

- $\max\{l_{m_0}\}^{SR} \geqslant l_{m_0}N - N \geqslant p + 2N$,
- $\min\{l_{m_0}N\}^{SR} = 0$,

- $\{l_{m_0}N\}^{SR}$ jest ciągiem $2N$ syndetycznym.

Z $2N$-syndetyczności ciągu $\{l_{m_0}N\}^{SR}$ wynika, że $\{p+1,...,p+2N\}\cap\{l_{m_0}N\}^{SR}\neq\varnothing$, zatem istnieje $q\in\{p+1,...,p+2N\}$ takie, że $q\in\{l_{m_0}N\}^{SR}$. Stąd istnieje $s\in\{1,...,N\}$ takie, że $q\in\{l_{m_0}N+s\}^R$. Z (2.4) wynika, że $q\in\{\infty\cdot N+s\}^R\subset\{\infty\cdot N\}^{SR}$, czyli $\{p+1,...,p+2N\}\cap\{\infty\cdot N\}^{SR}\neq\varnothing$, co prowadzi do sprzeczności. □

Fakt 2.5.5. *$\{\infty\cdot N\}^{SR}$ jest nieskończony.*

Dowód. Dla dowodu niewprost załóżmy, że $\{\infty\cdot N\}^{SR}$ jest skończony. Niech $L:=\max\{\infty\cdot N\}^{SR}$. Zatem dla dowolnego $1\leqslant s\leqslant N$ zachodzi szacowanie $\max\{\infty\cdot N+s\}^R\leqslant L$. Z tego

$$\forall\, 1\leqslant s\leqslant N\ \exists m_0\in\mathbb{N}\ \forall m\geqslant m_0:\quad \{b_n^{l_m,s}\}_{n=L+1}^{\infty}=\{0\}_{n=L+1}^{\infty}.$$

Bez straty ogólności możemy wybrać m_0 tak, aby $l_{m_0}N-N>L$. Zatem

$$\exists m_0\in\mathbb{N}:\quad l_{m_0}N-N>L \text{ oraz } \forall\, 1\leqslant s\leqslant N\quad \{b_n^{l_{m_0},s}\}_{n=L+1}^{\infty}=\{0\}_{n=L+1}^{\infty}.$$

Z tego

$$\begin{aligned}&\forall 1\leqslant s\leqslant N \max\{l_{m_0}\cdot N+s\}^R\leqslant L\\ \Rightarrow &\max\{l_{m_0}\cdot N\}^{SR}\leqslant L.\end{aligned}$$

Ale z drugiej strony $\max\{l_{m_0}\cdot N\}^{SR}\geqslant l_{m_0}N-N>L$, co prowadzi do sprzeczności. □

Kontynuacja dowodu Twierdzenia 2.5. Na mocy Twierdzenia (2.3) skoro $\{\infty\cdot N\}^{SR}$ jest nieskończony i $2N$-syndetyczny, to któraś jego składowa jest kawałkami syndetyczna, tzn. istnieje $1\leqslant s\leqslant N:\ \{\infty\cdot N+s\}^R\subset\mathbb{N}$-kawałkami syndetyczny. Ponieważ $\{\infty\cdot N+s\}^R$ jest rosnący, niech więc $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\infty\cdot N+s\}^R$.

Wykażemy teraz, że $\{T^{b_n}x_0\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Dla dowodu niewprost załóżmy, że $\{T^{b_n}x_0\}_{n=1}^{\infty}$ nie jest ciągiem Cauchy'ego. Zatem

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall q \in \mathbb{N}\ \exists m_q > n_q \geqslant q : \quad d(T^{b_{n_q}}x_0, T^{b_{m_q}}x_0) \geqslant \varepsilon. \tag{2.5}$$

Niech dla $q \in \mathbb{N}$ kolejno n_q, m_q będą wybierane w ten sposób, że ciągi $\{m_q\}_{q=1}^{\infty}$ oraz $\{n_q\}_{q=1}^{\infty}$ są rosnące.

Możemy to zrobić na przykład następująco: mając dla pewnego $q \in \mathbb{N}$ wybrane n_q oraz m_q, dla liczby $\max\{n_q, m_q\}$ istnieją $m > n \geqslant \max\{n_q, m_q\}$ takie, że zachodzi (2.5). Kolejno n i m wybierzmy jako najmniejsze spośród wszystkich możliwych i określmy $m_{q+1} := m$ oraz $n_{q+1} := n$.

Dla b_{m_q}, b_{n_q} istnieje $m_0^q \in \mathbb{N}$ takie, że $b_{m_q}, b_{n_q} \in \{l_{m_0^q} \cdot N + s\}^R$. Niech m_0^q będzie wybrane jako najmniejsze możliwe. Wtedy dla dowolnego $q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon \leqslant d(T^{b_{m_q}}x_0, T^{b_{n_q}}x_0) &\leqslant d(T^{b_{m_q}}x_0, T^{l_{m_0^q}\cdot N+s}x_0) + d(T^{l_{m_0^q}\cdot N+s}x_0, T^{b_{n_q}}x_0) \\ &= d(T^{b_{m_q}}x_0, T^{b_{m_q}+(l_{m_0^q}\cdot N+s-b_{m_q})}x_0) + d(T^{b_{n_q}}x_0, T^{b_{n_q}+(l_{m_0^q}\cdot N+s-b_{n_q})}x_0) \end{aligned}$$

Wobec tego dla każdego $q \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$d(T^{b_{m_q}}x_0, T^{b_{m_q}+(l_{m_0^q}\cdot N+s-b_{m_q})}x_0) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ lub } d(T^{b_{n_q}}x_0, T^{b_{n_q}+(l_{m_0^q}\cdot N+s-b_{n_q})}x_0) \geqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

a z tego istnieje $\{q_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ - ciąg rosnący taki, że

$$\forall l \in \mathbb{N}_1 \quad d(T^{b_{m_{q_l}}}x_0, T^{b_{m_{q_l}}+(l_{m_0^{q_l}}\cdot N+s-b_{m_{q_l}})}x_0) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.6}$$

lub

$$\forall l \in \mathbb{N}_1 \quad d(T^{b_{n_{q_l}}}x_0, T^{b_{n_{q_l}}+(l_{m_0^{q_l}}\cdot N+s-b_{n_{q_l}})}x_0) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Bez straty ogólności załóżmy, że zachodzi (2.6).

Ale $b_{m_{q_l}} \in \{l_{m_0^{q_l}} \cdot N + s\}^R$, więc z definicji $\{k\}^R$ zachodzi

$$l_{m_0^{q_l}} \cdot N + s - b_{m_{q_l}} \in \{k_j\}_{j=1}^{\infty} \tag{2.7}$$

oraz $b_{m_{q_l}} \in \{i_n^{l_{m_0^{q_l}}\cdot N+s-b_{m_{q_l}}}\}_{n=0}^{\infty}$, a to oznacza, że dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$ istnieje $n_l \in \mathbb{N}$ takie, że

$$b_{m_{q_l}} = i_{n_l}^{l_{m_0^{q_l}}\cdot N+s-b_{m_{q_l}}}. \tag{2.8}$$

Zauważmy, że zachodzi

Fakt 2.5.6. $\lim_{l\to\infty} n_l = \infty$.

Dowód. Istotnie, zauważmy najpierw, że dla $j \in \mathbb{N}$

$$i_1^{k_j} \leqslant N,\ \ ..., i_n^{k_j} \leqslant n \cdot N,\ \ ...,$$

zatem

$$n \geqslant \frac{{i_n}^{k_j}}{N} \text{ dla } j \in \mathbb{N} \text{ i } n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Ponadto

- Ciąg $\{b_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ jest rosnący, zatem $b_m \geqslant m$ dla $m \in \mathbb{N}$,
- $\{m_q\}_{q=1}^{\infty}$ był tak utworzony, że $m_q \geqslant q$ dla $q \in \mathbb{N}$,
- $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$ jest ciągiem rosnącym, zatem $q_l \geqslant l$ dla $l \in \mathbb{N}$.

Z tego oraz (2.8) i (2.9) wynika, że

$$n_l \geqslant \frac{i_{n_l}^{l_{m_0^{q_l}} \cdot N + s - b_{m_{q_l}}}}{N} = \frac{b_{m_{q_l}}}{N} \geqslant \frac{m_{q_l}}{N} \geqslant \frac{m_l}{N} \geqslant \frac{l}{N},$$

co kończy dowód uwagi. $\square$

Kontynuacja dowodu Twierdzenia 2.5. Wobec tego z (2.6) dla $l \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqslant d(T^{i_{n_l}^{l_{m_0^{q_l}} \cdot N + s - b_{m_{q_l}}}} x_0, T^{i_{n_l}^{l_{m_0^{q_l}} \cdot N + s - b_{m_{q_l}}} + (l_{m_0^{q_l}} \cdot N + s - b_{m_{q_l}})} x_0)$$

Oznaczmy

$$c_l := l_{m_0^{q_l}} \cdot N + s - b_{m_{q_l}},\ \ l \in \mathbb{N}$$

oraz

$$d_p^l := d(T^{i_p^{c_l}} x_0, T^{i_p^{c_l} + c_l} x_0),\ \ p = 0, ..., n_l.$$

Przy tych oznaczeniach $\frac{\varepsilon}{2} \leqslant d(T^{i_{n_l}^{c_l}} x_0, T^{i_{n_l}^{c_l}+c_l} x_0) = d_{n_l}^l$.

Z (2.7) wynika, że $c_l \in \{k_j\}_{j=1}^{\infty},\ l \in \mathbb{N}$.

Mamy ponadto

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqslant d_{n_l}^l \leqslant \varphi(d_{n_l-1}^l) \cdot d_{n_l-1}^l \leqslant ... \leqslant \varphi(d_{n_l-1}^l) \cdot ... \cdot \varphi(d_0^l) \cdot d_0^l. \tag{2.10}$$

Z drugiej zaś strony dla każdego $l \in \mathbb{N}$ zachodzi szacowanie

$$d_0^l = d(x_0, T^{l_{m_0^{q_l}} \cdot N + s - b_{m_{q_l}}} x_0) \leqslant C,$$

gdyż $l_{m_0^{q_l}} \cdot N + s - b_{m_{q_l}} \in \{k_j\}_{j=0}^{\infty}$, zaś stała C wybrana była na mocy ograniczoności ciągu $\{T^{k_j} x_0\}_{j=1}^{\infty}$.

Z powyższych nierówności oraz faktu, że $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$ wynika szacowanie

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqslant d_p^l \leqslant d_0^l \leqslant C,\ p = 0, ..., n_l, \tag{2.11}$$

a z tego oraz z twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu przez funkcję ciągłą kresów na zbiorze zwartym wynika

$$\varphi(d_p^l) \leqslant \sup_{t \in [\frac{\varepsilon}{2}, C]} \varphi(t) = \varphi(a) < 1 \tag{2.12}$$

przy pewnym $a \in [\frac{\varepsilon}{2}, C]$ zależnym tylko od ε.

Z kolei z (2.10) oraz (2.12) wynika, że dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$

$$d_{n_l}^l \leqslant [\varphi(a)]^{n_l} \cdot d_0^l \leqslant C \cdot [\varphi(a)]^{n_l}$$

Ponieważ $\lim_{l \to \infty} n_l = \infty$, więc biorąc $l \in \mathbb{N}$ takie, że $[\varphi(a)]^{n_l} < \frac{\varepsilon}{4C}$ otrzymujemy $d_{n_l}^l \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, co przeczy (2.11) i kończy dowód. □

Twierdzenie 2.6. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech $T : X \to X$ będzie takie, że przy pewnych $N \geqslant 1$ oraz $M \in \mathbb{R}$ zachodzi*

$$\min\{d(T^j x, T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant N\} \leqslant M d(x, y)\ \forall x, y \in X. \tag{2.13}$$

Jeśli ponadto $\exists x_0 \in X\ \exists \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ takie, że

- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jest ciągiem kawałkami syndetycznym i różnowartościowym,*
- $\{T^{b_n}x_0\}_{n=1}^{\infty}$ *jest ciągiem Cauchy'ego,*

to T^r *ma punkt stały przy pewnym* $r \in \mathbb{N}$.

Główną trudność w przeprowadzeniu dowodu stanowi brak założenia o ciągłości operatora T. Prostszy dowód przy założeniu ciągłości T będzie przedstawiony w następnym rozdziale.

Dowód. Niech, na podstawie twierdzenia 2.5, $y_0 := \lim_{n\to\infty} T^{b_n}x_0$ oraz niech $K := \max\{3, N, S\}$, gdzie S jest najmniejszą stałą syndetyczności ciągu $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ponieważ $K \geqslant N$, więc T spełnia założenie (2.13) także ze stałą K zamiast N. Ponieważ $K \geqslant S$, więc $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest kawałkami syndetyczny ze stałą K. Dla $n \in \mathbb{N}$ określmy $i_n^0 := 0$. Dla $k = 1, ..., K$ wybierzmy $i_n^k \in \{1, ..., K\}$ takie, że

$$d(T^{b_n+i_n^0+...+i_n^k}x_0, T^{i_n^0+...+i_n^k}y_0) \leqslant Md(T^{b_n+i_n^0+...+i_n^{k-1}}x_0, T^{i_n^0+...+i_n^{k-1}}y_0)$$

Możemy dobrać takie i_n^k z założenia (2.13), przyjmując za x i y odpowiednio $T^{b_n+i_n^0+...+i_n^{k-1}}x_0$ oraz $T^{i_n^0+...+i_n^{k-1}}y_0$.

Określmy $B^k := \{b_n + i_n^0 + ... + i_n^k\}_{n=1}^{\infty}$.

Fakt 2.6.1. *Jeśli* $\exists k \in \{0, ..., K\}$ *takie, że* $\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists m, n \in \mathbb{N}$ *takie, że* $n_0 \leqslant n < m$ *oraz*

$$b_n + i_n^0 + ... + i_n^k = b_m + i_m^0 + ... + i_m^k,$$

to otrzymujemy tezę.

Dowód. Określmy $P := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ m > n,\ b_n + i_n^0 + ... + i_n^k = b_m + i_m^0 + ... + i_m^k\}$ oraz $R := \{n \in \mathbb{N} :\ (n, m) \in P \textit{ przy pewnym } m > n\}$. Z założenia uwagi $\#P = +\infty$, a zatem $\#R = +\infty$. Dla $n \in R$ niech $g(n)$ oznacza najmniejsze spośród $\{m \in \mathbb{N} :\ m > n,\ (n, m) \in P\}$. Zatem dla $n \in R$ jest $(n, g(n)) \in P$ oraz

$$b_n + i_n^0 + ... + i_n^k = b_{g(n)} + i_{g(n)}^0 + ... + i_{g(n)}^k \tag{2.14}$$

Ponieważ $g(n) > n$, więc $b_n \neq b_{g(n)}$, a z tego dla $n \in R$ jest

$$i_n^0 + ... + i_n^k \neq i_{g(n)}^0 + ... + i_{g(n)}^k \tag{2.15}$$

Ciąg $\{i_n^0 + ... + i_n^k\}_{n \in R}$ posiada podciąg stały $\{i_{n_m}^0 + ... + i_{n_m}^k\}_{m=1}^{\infty} = \{a\}_{m=1}^{\infty}$ przy pewnym $a \in \{k, ..., k \cdot K\}$.

Ciąg $\{i_{g(n_m)}^0 + ... + i_{g(n_m)}^k\}_{m=1}^{\infty}$ posiada podciąg stały $\{i_{g(n_{m_p})}^0 + ... + i_{g(n_{m_p})}^k\}_{p=1}^{\infty} = \{b\}_{p=1}^{\infty}$ przy pewnym $b \in \{k, ..., k \cdot K\}$.

Z (2.15) wynika, że $a \neq b$.

Z drugiej strony $T^{b_{n_m} + i_{n_m}^0 + ... + i_{n_m}^k} \to T^a y_0,\ m \to \infty$, gdyż

$$\begin{aligned} d(T^{b_{n_m} + i_{n_m}^0 + ... + i_{n_m}^k} x_0, T^a y_0) &= d(T^{b_{n_m} + i_{n_m}^0 + ... + i_{n_m}^k} x_0, T^{i_{n_m}^0 + ... + i_{n_m}^k} y_0) \\ &\leqslant ... \leqslant M^k d(T^{b_{n_m}} x_0, y_0) \to 0,\ m \to \infty \end{aligned}$$

oraz $T^{b_{g(n_{m_p})} + i_{g(n_{m_p})}^0 + ... + i_{g(n_{m_p})}^k} \to T^b y_0,\ p \to \infty$, gdyż

$$\begin{aligned} & d(T^{b_{g(n_{m_p})} + i_{g(n_{m_p})}^0 + ... + i_{g(n_{m_p})}^k} x_0, T^b y_0) \\ & = d(T^{b_{g(n_{m_p})} + i_{g(n_{m_p})}^0 + ... + i_{g(n_{m_p})}^k} x_0, T^{i_{g(n_{m_p})}^0 + ... + i_{g(n_{m_p})}^k} y_0) \\ & \leqslant ... \leqslant M^k d(T^{b_{g(n_{m_p})}} x_0, y_0) \to 0,\ p \to \infty \end{aligned}$$

Z (2.14) wynika, że $T^a y_0 = T^b y_0$, gdyż $b_{g(n_{m_p})} + i_{g(n_{m_p})}^0 + ... + i_{g(n_{m_p})}^k = b_{n_{m_p}} + i_{n_{m_p}}^0 + ... + i_{n_{m_p}}^k$. Ponieważ $a \neq b$, więc bez straty ogólności niech $a < b$. Zatem $T^a = T^{b-a}(T^a y_0)$, a z tego $T^a \in Fix(T^{b-a})$. $\square$

Fakt 2.6.2. *Jeśli $\exists\ 0 \leqslant k < l \leqslant K$ takie, że $\#(B^k \cap B^l) = +\infty$, to otrzymujemy tezę.*

Dowód. Ponieważ $\#\{b_n + i_n^0 + ... + i_n^k\}_{n=1}^{\infty} \cap \{b_n + i_n^0 + ... + i_n^l\}_{n=1}^{\infty} = +\infty$, zatem $\exists \{n_p\}_{p=1}^{\infty},\ \{m_q\}_{q=1}^{\infty}$ takie, że $\{b_{n_p} + i_{n_p}^0 + ... + i_{n_p}^k\}_{p=1}^{\infty} = \{b_{m_q} + i_{m_q}^0 + ... + i_{m_q}^l\}_{q=1}^{\infty}$.

Możemy ustalić wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość $g : \{n_m\}_{m=1}^{\infty} \to \{m_q\}_{q=1}^{\infty}$, aby

$$b_{n_p}+i^0_{n_p}+...+i^k_{n_p} = b_{g(n_p)}+i^0_{g(n_p)}+...+i^k_{g(n_p)}+i^{k+1}_{g(n_p)}+...+i^l_{g(n_p)},\ p = 1, 2, ... \quad (2.16)$$

Oczywiście $g(n_p) \neq n_p$. W przeciwnym wypadku

$$b_{n_p} + i^0_{n_p} + ... + i^k_{n_p} = b_{n_p} + i^0_{n_p} + ... + i^k_{n_p} + i^{k+1}_{n_p} + ... + i^l_{n_p},\ p = 1, 2, ...,$$

a z tego $i^{k+1}_{n_p} + ... + i^l_{n_p} = 0$, co prowadziłoby do sprzeczności.

Skoro $g(n_p) \neq n_p$, zaś $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest różnowartościowy, to $b_{n_p} \neq b_{g(n_p)}$, a z tego oraz z (2.16) wynika, że

$$i^0_{n_p} + ... + i^k_{n_p} \neq i^0_{g(n_p)} + ... + i^k_{g(n_p)} + i^{k+1}_{g(n_p)} + ... + i^l_{g(n_p)},\ p = 1, 2, ... \quad (2.17)$$

Ciąg $\{i^0_{n_p}+...+i^k_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$ przyjmuje skończoną liczbę wartości, zatem posiada podciąg stały $\{i^0_{n_{p_q}} + ... + i^k_{n_{p_q}}\}_{q=1}^{\infty} = \{a\}_{q=1}^{\infty}$ przy pewnym $a \in \{k, ..., k \cdot K\}$.

Następnie ciąg $\{i^0_{g(n_{p_q})} + ... + i^l_{g(n_{p_q})}\}_{q=1}^{\infty}$ posiada podciąg stały $\{i^0_{g(n_{p_{q_r}})} + ... + i^l_{g(n_{p_{q_r}})}\}_{r=1}^{\infty} = \{b\}_{r=1}^{\infty}$ przy pewnym $b \in \{l, ..., l \cdot K\}$.

Z (2.17) wynika, że $a \neq b$.

Z drugiej strony $T^{b_{n_{p_{q_r}}}+i^0_{n_{p_{q_r}}}+...+i^k_{n_{p_{q_r}}}} \to T^a y_0,\ r \to \infty$, gdyż

$$\begin{aligned} d(T^{b_{n_{p_{q_r}}}+i^0_{n_{p_{q_r}}}+...+i^k_{n_{p_{q_r}}}} x_0, T^a y_0) &= d(T^{b_{n_{p_{q_r}}}+i^0_{n_{p_{q_r}}}+...+i^k_{n_{p_{q_r}}}} x_0, T^{i^0_{n_{p_{q_r}}}+...+i^k_{n_{p_{q_r}}}} y_0) \\ &\leqslant ... \leqslant M^k d(T^{b_{n_{p_{q_r}}}} x_0, y_0) \to 0,\ r \to \infty \end{aligned}$$

oraz $T^{b_{g(n_{p_{q_r}})}+i^0_{g(n_{p_{q_r}})}+...+i^l_{g(n_{p_{q_r}})}} \to T^b y_0,\ r \to \infty$, gdyż

$$\begin{aligned} & d(T^{b_{g(n_{p_{q_r}})}+i^0_{g(n_{p_{q_r}})}+...+i^l_{g(n_{p_{q_r}})}} x_0, T^b y_0) \\ &= d(T^{b_{g(n_{p_{q_r}})}+i^0_{g(n_{p_{q_r}})}+...+i^l_{g(n_{p_{q_r}})}} x_0, T^{i^0_{g(n_{p_{q_r}})}+...+i^l_{g(n_{p_{q_r}})}} y_0) \\ &\leqslant ... \leqslant M^l d(T^{b_{g(n_{p_{q_r}})}} x_0, y_0) \to 0,\ r \to \infty \end{aligned}$$

Z (2.16) wynika, że $T^a y_0 = T^b y_0$, gdyż

$$b_{g(n_{p_{q_r}})}+i^0_{g(n_{p_{q_r}})}+...+i^k_{g(n_{p_{q_r}})} = b_{n_{p_{q_r}}}+i^0_{n_{p_{q_r}}}+...+i^k_{n_{p_{q_r}}}+i^{k+1}_{n_{p_{q_r}}}+...+i^l_{n_{p_{q_r}}},\ r = 1, 2, ...$$

Ponieważ $a \neq b$, więc bez straty ogólności niech $a < b$. Zatem $T^a = T^{b-a}(T^a y_0)$, a z tego $T^a \in Fix(T^{b-a})$. □

Ciąg dalszy dowodu Twierdzenia 2.6. Twierdzimy, że spełnione są założenia przynajmniej jednej z powyższych uwag. Istotnie, załóżmy, że nie zachodzą jednocześnie założenia żadnej z nich.

Ponieważ $\forall k \in \{0, ..., K\}\ \#\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ m > n,\ b_n + i_n^0 + ... + i_n^k = b_m + i_m^0 + ... + i_m^k\} < +\infty$, zatem B^k jest ciągiem różnowartościowym z dokładnością do conajwyżej skończonej liczby początkowych elementów.

Ponieważ $\forall 0 \leqslant k < l \leqslant K\ \#(B^k \cap B^l) < +\infty$, zatem B^k oraz B^l są wzajemnie rozłączne (jako zbiory) z dokładnością do conajwyżej skończonej liczby początkowych elementów.

Skoro ponadto zbiorów B^k jest skończona ilość, więc istnieje - wspólne dla nich wszystkich - $p \in \mathbb{N}$ takie, że $\hat{B}^k := \{b_n + i_n^0 + ... + i_n^k\}_{n=p}^{\infty},\ 0 \leqslant k \leqslant K$ są ciągami różnowartościowymi i (jako zbiory) wzajemnie rozłącznymi.

Fakt 2.6.3. *Jeśli dowolny ciąg $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest kawałkami syndetyczny ze pewną stałą $K \in \mathbb{N}_1$, to $\forall p \in \mathbb{N}_1$ jego podciąg $\{b_n\}_{n=p}^{\infty}$ jest kawałkami syndetyczny ze stałą K.*

Dowód. Załóżmy dla dowodu niewprost, że $\exists p \in \mathbb{N}_1 :\ \{b_n\}_{n=p}^{\infty}$ nie jest kawałkami syndetyczny ze stałą K. Zatem nie jest prawdą, że dla dowolnego $q \in \mathbb{N}_1$ istnieje K-syndetyczny podciąg ciągu $\{b_n\}_{n=p}^{\infty}$ o mocy q, a z tego wynika, że istnieje $q \in \mathbb{N}_1$ takie, że

$$\forall A \subset \{b_n\}_{n=p}^{\infty} :\ A - K - syndetyczny => \#A < q. \tag{2.18}$$

Z drugiej strony z tego, że $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest kawałkami syndetyczny ze stałą K wynika, że dla liczebności $(p+q)$ istnieje $\{n_m\}_{m=1}^{p+q} \subset \mathbb{N}_1$ - rosnący taki, że $\{b_{n_m}\}_{m=1}^{p+q}$ - K-syndetyczny, tzn.

$$|b_{n_{m+1}} - b_{n_m}| \leqslant K,\ m = 1, ..., p + q - 1. \tag{2.19}$$

Oczywiście $\{b_{n_m}\}_{m=1}^{p+q} \subset \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ oraz $\#\{b_{n_m}\}_{m=1}^{p+q} = p+q$.

Określmy $A := \{b_{n_m}\}_{m=1}^{p+q} \cap \{b_n\}_{n=p}^{\infty}$ oraz niech $k := \min\{j \in \{1,...,p\} : n_j \geqslant p\}$. Ponieważ $\{n_m\}_{m=1}^{p+q}$ jest rosnący, zatem $n_p \geqslant p$, czyli minimum jest brane po niepustym zbiorze. Zauważmy, że w takim razie

$$A = \{b_{n_1}, ..., b_{n_{k-1}}, b_{n_k}, ..., b_{n_p}\} \cap \{b_p, b_{p+1}, ...\} = \{b_{n_k}, ..., b_{n_{p+q}}\}.$$

Oczywiście $A \subset \{b_n\}_{n=p}^{\infty}$ oraz A jest K-syndetyczny, gdyż $|b_{n_{m+1}} - b_{n_m}| \leqslant K,\ m = k, ..., p+q-1$, co wynika z (2.19). Ale ponieważ $k \leqslant p$, zatem $\#A = p+q-k+1 \geqslant p+q-p+1 = q+1$, co prowadzi do sprzeczności z (2.18). □

Ciąg dalszy dowodu Twierdzenia 2.6. Na mocy poprzedniej uwagi $\hat{B}^0$ jest kawałkami syndetyczny ze stałą K, zatem dla liczebności K^2 istnieje $\{n_m\}_{m=1}^{K^2} \subset \{p, p+1, ...\}$ taki, że $\{b_{n_m}\}_{m=1}^{K^2}$ jest K-syndetyczny.

Określmy $\widetilde{B}^k := \{b_{n_m} + i_{n_m}^0 + ... + i_{n_m}^k\}_{m=1}^{K^2},\ 0 \leqslant k \leqslant K$. Oczywiście $\widetilde{B}^k \subset \hat{B}^k \subset B^k$, zatem $\widetilde{B}^k,\ 0 \leqslant k \leqslant K$ są wzajemnie rozłączne (jako zbiory) i różnowartościowe (jako ciągi). Określmy $b := \min \widetilde{B}^0$. Z K-syndetyczności $\widetilde{B}^0$ wynika, że

$$\begin{array}{ll}
\#\widetilde{B}^0 \cap \{b, ..., b+K\} \geqslant 1 & \\
\#\widetilde{B}^0 \cap \{b, ..., b+2K\} \geqslant 2 & \#\widetilde{B}^1 \cap \{b, ..., b+2K\} \geqslant 1 \\
\cdots & \cdots \\
\#\widetilde{B}^0 \cap \{b, ..., b+K^2 \cdot K\} \geqslant K^2 & \#\widetilde{B}^1 \cap \{b, ..., b+K^2 \cdot K\} \geqslant K^2 - 1 \quad \cdots
\end{array}$$

Kontynuując szacowania otrzymujemy $\#\widetilde{B}^k \cap \{b, ..., b+K^2 \cdot K\} \geqslant K^2 - k$. Mamy zatem

$$\# \cup_{k=0}^{K} (\tilde{B}^k \cap \{b, ..., b+K^2 \cdot K\}) \ \geqslant\ \textstyle\sum_{k=0}^{K} (K^2 - k) = (K+1)K^2 - \frac{K(K+1)}{2}$$

Z drugiej jednak strony

$$\begin{aligned}
\# \cup_{k=0}^{K} (\tilde{B}^k \cap \{b, ..., b+K^2 \cdot K\}) &= \#(\cup_{k=0}^{K} \tilde{B}^k) \cap \{b, ..., b+K^2 \cdot K\} \\
&\leqslant \#\{b, ..., b+K^2 \cdot K\} = K^3 + 1 \\
&< (K+1)K^2 - \tfrac{K(K+1)}{2},
\end{aligned}$$

co prowadzi do sprzeczności. □

Wnioskiem z Twierdzeń 2.4, 2.5, 2.6 jest główny rezultat tego rozdziału.

Twierdzenie 2.7. *Przy założeniach Twierdzenia 2.2 T ma dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. Na mocy Twierdzenia 2.6 istnieje $r \in \mathbb{N}$ takie, że T^r ma punkt stały Niech r_0 będzie najmniejsze spośród wszystkich $r \in \mathbb{N}$ takich, że T^r ma punkt stały. Pokażemy, że $r_0 = 1$.

Dla dowodu niewprost załóżmy, że $r_0 > 1$. Niech y_0 będzie punktem stałym T^r. Rozważmy $\{T^n y_0\}_{n=1}^{\infty}$. Oczywiście $\{T^n y_0\}_{n=1}^{\infty} = \{y_0, Ty_0, ..., T^{r_0-1}y_0\}$. Zdefiniujmy $\varepsilon := \min\{d(T^i y_0, T^j y_0),\ i \neq j,\ 0 \leqslant i, j \leqslant r_0 - 1\} > 0$. Niech $i_0, j_0 \in \{0, ..., r_0 - 1\}$ będą takie, że $d(T^{i_0}y_0, T^{j_0}y_0) = \varepsilon$. Z założenia o odwzorowaniu T istnieje $k \in \{1, ..., N\}$ takie, że

$$\varepsilon \leqslant d(T^{i_0+k}y_0, T^{j_0+k}y_0) \leqslant \varphi(d(T^{i_0}y_0, T^{j_0}y_0))d(T^{i_0}y_0, T^{j_0}y_0) = \varphi(\varepsilon)\varepsilon < \varepsilon,$$

co prowadzi do sprzeczności.

Aby pokazać jedyność załóżmy, że istnieją $y_0 \neq z_0 \in X$ - punkty stałe T. Określmy $\varepsilon := d(y_0, z_0)$. Z założenia istnieje $k \in \{1, ..., N\}$ takie, że

$$\varepsilon = d(y_0, z_0) = d(T^k y_0, T^k z_0) \leqslant \varphi(d(y_0, z_0))d(y_0, z_0) = \varphi(\varepsilon)\varepsilon < \varepsilon,$$

co daje sprzeczność. ☐

Uwaga 2.1. *W Twierdzeniu 2.7 jeśli T^r ma punkt stały przy pewnym $r \in \mathbb{N}$, to wystarczy założyć o odwzorowaniu T, że*

$$\min\{d(T^j x, T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant N\} < d(x, y)\ \forall x, y \in X.$$

Warto podkreślić, że twierdzenie 2.5 mówi jedynie o istnieniu podorbity Cauchy'ego, zaś nie wskazuje jej explicite. Nie jest zatem możliwe szacowanie szybkości zbieżności elementów tej podorbity do punktu stałego T, jak ma to miejsce w klasycznym twierdzeniu Banacha o punkcie stałym (czyli, gdy $N = 1$).

Można zapytać, jak daleko można osłabić założenia twierdzenia 2.1.

Problem 2. *Niech* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną,* $0 < M < 1$ *oraz niech* $T_1, ..., T_N : X \to X$ *mają własność* $\min\{d(T_j x, T_j y), 1 \leqslant j \leqslant N\} \leqslant M d(x, y)$*. Czy któreś spośród* $T_1, ..., T_N$ *ma punkt stały?*

Okazuje się, że nie, o czym świadczy poniższy

Przykład 2.1. *Niech* $X := (\mathbb{R}, |\cdot|)$ *i określmy* $T_1, T_2 : X \to X$ *następująco*

$$T_1 x := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{x}{2}, & x \neq 0 \end{cases},$$

$$T_2 x := \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

Wtedy oczywiście $\min\{d(T_1 x, T_1 y), d(T_2 x, T_2 y)\} \leqslant \frac{1}{2} d(x, y)$, $x, y \in X$, *jednakże ani* T_1 *ani* T_2 *nie posiada punktu stałego.*

W twierdzeniu 2.1 nie wystarczy również przyjąć, że $\min\{d(T^j x, T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant N\} \leqslant d(x, y)\ \forall x, y \in X$, co pokazuje poniższy

Przykład 2.2 ([GP, Prz. 1])**.** *Niech* $X = [0, 1]$ *z normą euklidesową,* $\varphi : [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \to [\frac{3}{4}, 1]$ *będzie bijekcją. Niech* $T : [0, 1] \to [0, 1]$ *będzie określone następująco*

$$Tx := \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{1}{4}) \\ \varphi(x), & x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ x - \frac{1}{2}, & x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ \varphi^{-1}(x), & x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}.$$

Wtedy $T^2 x = x$ *dla* $x \in [0, 1]$*, zatem* $\min\{d(T^j x, T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant 2\} \leqslant d(T^2 x, T^2 y) = d(x, y)$*, ale* T *nie jest ciągłe i* $d(T) \geqslant \frac{1}{4}$*.*

2.4 Przypadki szczególne

W rozdziale tym udowodnimy w prostszy sposób pewne przypadki szczególne twierdzenia 2.2.

Jeśli T jest odwzorowaniem ciągłym, to można znacznie uprościć dowód Twierdzenia 2.6. Mówi o tym następujące

Twierdzenie 2.8. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech $T : X \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że*

- $\forall y \neq z \in X\ \exists n \in \mathbb{N}_1 :\ d(T^n y, T^n z) < d(y, z)$
- $\exists x \in X\ \exists N \in \mathbb{N}_1\ \exists \{n_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ - *rosnący, N-syndetyczny i taki, że $\{T^{n_j} x\}_{j=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego.*

Wtedy T ma dokładnie jeden punkt stały.

Dowód. Niech $x_0 := \lim_{n\to\infty} T^{n_j} x$. Ponieważ $1 \leqslant n_{j+1} - n_j \leqslant N$, zatem $\exists b \in \{1, ..., N\}\ \exists \{n_{j_l}\} \subset \{n_j\}$ takie, że $n_{j_l+1} - n_{j_l} = b$. Z drugiej strony $T^{j_l+1} x = T^b(T^{n_{j_l}} x)$. Z definicji x_0 jest $T^{j_l+1} x \to x_0, l \to \infty$, zaś z ciągłości T wynika, że $T^b(T^{n_{j_l}} x) \to T^b(x_0), l \to \infty$. Zatem T^b ma punkt stały x_0.

Niech $c := \min\{b \in \mathbb{N}_1 :\ T^b \text{ ma punkt stały}\}$. Załóżmy dla dowodu niewprost, że $c > 1$.

Niech $r := \min\{d(T^j x_0, T^k x_0),\ 0 \leqslant j < k \leqslant c - 1\}$. Oczywiście $r > 0$ - przypadek przeciwny przeczyłby wyborowi c. Ponieważ minimum brane jest po skończonym zbiorze, zatem $\exists j_0, k_0 \in \{0, ..., c-1\}$ takie, że $j_0 < k_0$ oraz $d(T^{j_0} x_0, T^{k_0} x_0) = r$.

Z założenia $\exists n \in \mathbb{N}$ takie, że $d(T^{n+j_0} x_0, T^{n+k_0} x_0) < d(T^{j_0} x_0, T^{k_0} x_0)$. Ale $n + j_0 = p \cdot c + \tilde{j_0}$, zaś $n + k_0 = q \cdot c + \tilde{k_0}$ przy pewnych $\tilde{j_0}, \tilde{k_0} \in \{0, ..., c-1\}$. Oczywiście $\tilde{j_0} \neq \tilde{k_0}$. Ponadto $T^{q \cdot c} x_0 = T^c(...(T^c x_0)...) = x_0 = T^c(...(T^c x_0)...) = T^{p \cdot c} x_0$. Zatem

$$d(T^{\tilde{j_0}}x_0, T^{\tilde{k_0}}x_0) = d(T^{p\cdot c+\tilde{j_0}}x_0, T^{q\cdot c+\tilde{k_0}}x_0) = d(T^{n+j_0}x_0, T^{n+k_0}x_0)$$
$$< d(T^{j_0}x_0, T^{k_0}x_0),$$

co prowadzi do sprzeczności z wyborem $j_0,\ k_0$.

Pokażemy teraz, że istnieje dokładnie jeden punkt stały. Załóżmy dla dowodu niewprost, że $\exists x_0 \neq y_0 :\ Tx_0 = x_0,\quad Ty_0 = y_0$. Z założenia $\exists n \in \mathbb{N} :\ d(x_0, y_0) > d(T^n x_0, T^n y_0) = d(x_0, y_0)$, co prowadzi do sprzeczności. □

Uwaga 2.2. *Można pokazać, że gdy $\{n_j\}_{j=1}^{\infty} = \mathbb{N}$ (cała orbita jest ciągiem Cauchy'ego), to ciągłość T nie jest potrzebna.*

W przypadku szczególnym, gdy odległość między kolejnymi iteracjami T w danym punkcie zbiega do zera przy dowolnym N lub bez dodatkowych założeń dla $N = 2{,}3$ możemy dokładnie wskazać podorbitę spełniającą warunek Cauchy'ego.

Twierdzenie 2.9. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech $T : X \to X$ będzie odwzorowaniem takim, że*

- $\exists N \in \mathbb{N}_1\ \forall x, y \in X \quad \min\{d(T^j x, T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant N\} \leqslant \varphi(d(x, y))d(x, y)$ *przy pewnej funkcji ciągłej $\varphi :\ \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$ takiej, że $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$*
- $d(T^{n+1}x, T^n x) \to 0,\ n \to \infty$ *przy pewnym $x \in X$.*

Wtedy $\{T^n x\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Dowód. Niech $x_n := T^n x$. Dla dowodu niewprost załóżmy, że $\{T^n x\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie jest ciągiem Cauchy'ego. Zatem $\exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k_n,\ l_n > n$ takie, że zachodzi $d(x_{k_n}, x_{l_n}) \geqslant \varepsilon$. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $k_n > n$ będzie najmniejsze takie, że $\exists l_n > k_n :$ $d(x_{k_n}, x_{l_n}) \geqslant \varepsilon$. Dla $k_n > n$ niech l_n będzie najmniejsze takie, że $d(x_{k_n}, x_{l_n}) \geqslant \varepsilon$.

Ustalmy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\forall n \geqslant n_0 \; d(T^{n+1}x, T^n x) = d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Zauważmy, że dla $n \geqslant n_0$ jest $l_n \geqslant k_n + 2$. Wtedy $d(x_{k_n}, x_{l_n}) \leqslant d(x_{k_n}, x_{l_n-1}) + d(x_{l_n-1}, x_{l_n}) < \varepsilon + d(x_{l_n-1}, x_{l_n}) \to \varepsilon$ przy $n \to \infty$. Zatem $\limsup_{n\to\infty} d(x_{k_n}, x_{l_n}) \leqslant \varepsilon$. Ale $d(x_{k_n}, x_{l_n}) \geqslant \varepsilon$, zatem $d(x_{k_n}, x_{l_n}) \to \varepsilon, \; n \to \infty$.

Z drugiej strony $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists j_n \in \{1, ..., N\}$ takie, że

$$d(x_{k_n+j_n}, x_{l_n+j_n}) \leqslant \varphi(d(x_{k_n}, x_{l_n}))d(x_{k_n}, x_{l_n}).$$

Określmy $c_n^i := i \cdot \chi_{\{0,\dots,j_n-1\}}(i) \in \{0, ..., N-1\}$

Oszacujmy

$$\begin{aligned}
& d(x_{k_n}, x_{l_n}) \leqslant d(x_{k_n}, x_{k_n+1}) + d(x_{k_n+1}, x_{l_n+1}) + d(x_{l_n+1}, x_{l_n}) \\
& \leqslant ... \\
& \leqslant \sum_{i=1}^{j_n-1} d(x_{k_n+i}, x_{k_n+i+1}) + d(x_{k_n+j_n}, x_{l_n+j_n}) + \sum_{i=1}^{j_n-1} d(x_{l_n+i+1}, x_{l_n+i}) \\
& = \sum_{i=1}^{N-1} d(x_{k_n+c_n^i}, x_{k_n+c_n^i+1}) + d(x_{k_n+j_n}, x_{l_n+j_n}) + \sum_{i=1}^{N-1} d(x_{l_n+c_n^i+1}, x_{l_n+c_n^i}) \\
& \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} d(x_{k_n+c_n^i}, x_{k_n+c_n^i+1}) + \varphi(d(x_{k_n}, x_{l_n}))d(x_{k_n}, x_{l_n}) + \sum_{i=1}^{N-1} d(x_{l_n+c_n^i+1}, x_{l_n+c_n^i})
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Zauważmy, że z założeń twierdzenia wynika, że

$$d(x_{k_n+c_n^i}, x_{k_n+c_n^i+1}) \to 0 \text{ oraz } d(x_{l_n+c_n^i}, x_{l_n+c_n^i+1}) \to 0 \text{ przy } n \to \infty$$

dla $i \in \{0, ..., N-1\}$. Zatem przechodząc z $n \to \infty$ w powyższych szacowaniach otrzymujemy dzięki ciągłości φ, że $\varepsilon \leqslant 0 + \varphi(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 0$. Stąd wynika, że $\varphi(\varepsilon) \geqslant 1$, a zatem $\varepsilon = 0$, co prowadzi do sprzeczności. □

Twierdzenie 2.10. *Przy założeniach twierdzenia 2.9 odwzorowanie T ma dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. Teza wynika natychmiast z twierdzeń 2.6 i 2.7, mimo to podamy również prostszy dowód w tym szczególnym przypadku. Mianowicie, stosując oznaczenia poprzedniego twierdzenia niech $z_0 := \lim_{n\to\infty} T^n x_0$. Z własności T wynika, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $j_n \in \{1, ..., N\}$ takie, że $d(T^{n+j_n}x_0, T^{j_n}z_0) \leqslant \varphi(d(T^n x_0, z_0))d(T^n x_0, z_0)$. Zatem istnieją $j \in \{1, ..., N\}$ oraz $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ takie, że $d(T^{n_k+j}x_0, T^j z_0) \leqslant \varphi(d(T^{n_k}x_0, z_0))d(T^{n_k}x_0, z_0)$ dla $k \in \mathbb{N}$. Z tego wynika, że $T^{n_k+j}x_0 \to T^j z_0$ przy $k \to \infty$. Ale z drugiej strony $T^{n_k+j}x_0 \to z_0$, zatem $T^j z_0 = z_0$. Niech $Z := \{T^n x_0\}_{x=1}^{\infty} \cup \{z_0\}$. Zauważmy, że $T^j(Z) \subset Z$.

Pokażemy, że z_0 jest jedynym punktem stałym odwzorowania $T^j|_Z$. Istotnie, jeśli istnieje $z_0 \neq w_0 \in Z$ - inny punkt stały T^j, to $w_0 = T^n x_0$ przy pewnym $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$w_0 = T^j w_0 = ... = T^{k \cdot j} w_0 = T^{k \cdot j}(T^n x_0) = T^{k \cdot j + n} x_0 \to z_0, k \to \infty,$$

co prowadzi do sprzeczności.

Pokażemy, że z_0 jest punktem stałym T. Istotnie, $T^j(Tz_0) = T(T^j z_0) = Tz_0$. Ale jedynym punktem stałym $T^j|_Z$ jest z_0, zatem $Tz_0 = z_0$.

Pokażemy, że z_0 jest jedynym punktem stałym T. Istotnie, jeśli istnieje $z_0 \neq w_0 \in X$ - inny punkt stały T, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $T^n z_0 = z_0$ oraz $T^n w_0 = w_0$. Dla punktów z_0, w_0 istnieje $j \in \{1, ..., N\}$ takie, że $d(z_0, w_0) = d(T^j z_0, T^j w_0) \leqslant \varphi(d(z_0, w_0)) \cdot d(z_0, w_0)$. Z tej nierówności wynika, że $d(z_0, w_0) = 0$ lub $\varphi(d(z_0, w_0))$. Z własności φ w obydwu przypadkach $d(z_0, w_0) = 0$, co prowadzi do sprzeczności z tym że $z_0 \neq w_0$. $\square$

Lemat 2.1. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Niech $T : X \to X$ będzie takie, że*

$$\min\{d(T^j x, T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant N\} \leqslant \varphi(d(x, y)) \cdot d(x, y) \qquad \forall x, y \in X$$

przy pewnym $N \geqslant 1$ oraz przy pewnej ciągłej funkcji $\varphi :\ [0, \infty) \to [0, 1]$ takiej, że $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$. Niech ponadto dla ustalonych $x, y \in X$ ciąg $\{j_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{1, ..., N\}$ wybrany będzie na mocy założenia o T w ten sposób, że dla $n \geqslant 2$ zachodzi

$$\begin{aligned} &d(T^{j_1+...+j_n}x, T^{j_1+...+j_n}y) \\ &\leqslant \varphi(d(T^{j_1+...+j_{n-1}}x, T^{j_1+...+j_{n-1}}y)) \cdot d(T^{j_1+...+j_{n-1}}x, T^{j_1+...+j_{n-1}}y) \end{aligned}$$

Niech $z_n := d(T^{j_1+\ldots+j_n}x, T^{j_1+\ldots+j_n}y)$.

Wtedy $z_n \to 0$ *przy* $n \to \infty$.

Dowód. Oczywiście $z_n \geqslant 0$. Ponieważ $z_n \leqslant \varphi(z_{n-1})z_{n-1}$ oraz $\varphi(t) \leqslant 1$, zatem $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest nierosnący.

Jeśli istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $z_n = z_{n+1}$, to $z_n = z_{n+1} \leqslant \varphi(z_n)z_n$, a z tego $z_n = 0$ lub $\varphi(z_n) \geqslant 1$. Z własności funkcji φ wynika, że w obydwu przypadkach $z_n = 0$, co uzasadnia tezę.

W przeciwnym wypadku (gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $z_n \neq z_{n+1}$) ciąg $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest malejący i ograniczony od dołu, zatem posiada granicę. Niech $g := \lim_{n\to\infty} z_n$. Pokażemy, że jest ona równa 0. Dla dowodu niewprost załóżmy, że $g > 0$. Ponieważ $\varphi(g) < 1$ oraz $\varphi(z_n) \to \varphi(g)$ z ciągłości φ, zatem $\forall \delta > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 :$ $\varphi(z_n) \leqslant \varphi(g)+\delta$. Wybierzmy δ tak, aby $\varphi(g)+\delta < 1$. Zatem $\varphi(z_n) \leqslant \varphi(g)+\delta < 1$ przy $n \geqslant n_0$. Z drugiej strony $0 \leqslant z_n \leqslant \varphi(z_{n-1})z_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant \varphi(z_{n-1})\cdots\varphi(z_{n_0})z_{n_0} \leqslant [\varphi(g)+\delta]^{n-n_0}z_{n_0} \to 0$ przy $n \to \infty$. Zatem $z_n \to 0$ przy $n \to \infty$. □

Pokażemy teraz prostszy dowód twiedzenia 2.2 w przypadku, gdy $N = 2$.

Twierdzenie 2.11. *Niech* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną, zaś* $T : X \to X$ *będzie odwzorowaniem takim, że*

$$\forall x, y \in X \quad \min\{d(T^j x, T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant 2\} \leqslant \varphi(d(x,y))d(x,y)$$

przy pewnej funkcji ciągłej $\varphi :\ \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ *takiej, że* $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$.

Wtedy $d(T^{n+1}x_0, T^n x_0) \to 0$, $n \to \infty$ *dla dowolnego* $x_0 \in X$, *a więc na mocy twierdzenia 2.10, jeśli ponadto* X *jest zupełna, to odwzorowanie* T *ma dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. Dla dowodu niewprost załóżmy, że $\exists x_0 \in X :\ d(T^{n+1}x_0, T^n x_0) \nrightarrow 0$. Zatem $\exists x_0 \in X\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} :\ d(T^{k_n}x_0, T^{k_n+1}x_0) \geqslant \varepsilon$.

Dla $k = 1, 2$ określmy ciągi $\{n_m^k\}_{m=1}^{\infty}$ następująco: niech $n_0^k := 0$; mając $n_0^k, ..., n_m^k$ określmy $z_m^k := d(T^{n_m^k} x_0, T^{n_m^k + k} x_0)$ oraz

$$n_{m+1}^k := \begin{cases} n_m^k + 1, & \text{gdy } d(T^{n_m^k+1} x_0, T^{n_m^k+1+k} x_0) \leqslant \varphi(z_m^k) \cdot z_m^k \\ n_m^k + 2, & \text{gdy } d(T^{n_m^k+2} x_0, T^{n_m^k+2+k} x_0) \leqslant \varphi(z_m^k) \cdot z_m^k \end{cases}$$

Ciągi $\{n_m\}_{m=0}^{\infty},\ k = 1, 2$ są rosnące i 2-syndetyczne. Ponadto na mocy 2.1 $z_m^k \to 0,\ m \to \infty,\ k = 1, 2$.

Zauważmy, że $\forall m_0 \in \mathbb{N}\ \exists m \geqslant m_0 :\ k_m \notin \{n_p^1\}_{p=0}^{\infty}$. W przeciwnym wypadku $\exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geqslant m_0 :\ k_m \in \{n_p^1\}_{p=0}^{\infty}$, zatem $k_m = n_{p(m)}^1$. Biorąc ewentualnie podciąg $\{k_m\}_{m=0}^{\infty}$ i przenumerowując go, bez straty ogólności możemy założyć, że $m \leqslant p(m)$. Wtedy $d(T^{k_m} x_0, T^{k_m+1} x_0) = d(T^{n_{p(m)}^1} x_0, T^{n_{p(m)}^1+1} x_0) \to 0,\ m \to \infty$, co prowadzi do sprzeczności.

Zatem $\forall m_0 \in \mathbb{N}\ \exists m \geqslant m_0 :\ k_m \notin \{n_p^1\}_{p=0}^{\infty}$. Dla takiego m $\exists p(m) \in \mathbb{N} :\ n_{p(m)}^1 < k_m < n_{p(m)+1}^1$. Bez straty ogólności $m \leqslant p(m)$. Oczywiście $n_{p(m)}^1 + 1 = k_m = n_{p(m)+1}^1 - 1$.

Ponieważ $\{n_q^2\}_{q=0}^{\infty}$ jest 2-syndetyczny, zatem $\exists q(m) \in \mathbb{N} :\ k_m = n_{q(m)}^2$ lub $k_m - 1 = n_{q(m)}^2$, bo $\{k_m - 1, k_m\} \cap \{n_q^2\}_{q=0}^{\infty} \neq \varnothing$. Bez straty ogólności $m \leqslant q(m)$.

Jeśli $k_m - 1 = n_{q(m)}^2$, to

$$\begin{aligned} d(T^{k_m} x_0, T^{k_m+1} x_0) &\leqslant d(T^{k_m} x_0, T^{k_m-1} x_0) + d(T^{k_m-1} x_0, T^{k_m+1} x_0) \\ &\leqslant d(T^{n_{p(m)}^1} x_0, T^{n_{p(m)}^1+1} x_0) + d(T^{n_{q(m)}^2} x_0, T^{n_{q(m)}^2+2} x_0) \to 0, \end{aligned}$$

przy $m \to \infty$, co wynika z lematu 2.1 i prowadzi do sprzeczności.

Jeśli $k_m = n_{q(m)}^2$, to

$$\begin{aligned} d(T^{k_m} x_0, T^{k_m+1} x_0) &\leqslant d(T^{k_m} x_0, T^{k_m+2} x_0) + d(T^{k_m+2} x_0, T^{k_m+1} x_0) \\ &\leqslant d(T^{n_{q(m)}^2} x_0, T^{n_{q(m)}^2+2} x_0) + d(T^{n_{p(m)+1}^1} x_0, T^{n_{p(m)+1}^1+1} x_0) \to 0, \end{aligned}$$

przy $m \to \infty$, co również prowadzi do sprzeczności.

Zatem $d(T^{n+1} x_0, T^n x_0) \to 0$ przy $n \to \infty$. $\square$

Przedstawimy teraz prostszy dowód twiedzenia 2.2 w przypadku odwzorowań jednostajnie ciągłych.

Twierdzenie 2.12. *Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną, zaś $T : X \to X$ będzie odwzorowaniem jednostajnie ciągłym i takim, że*

$$\forall x,y \in X \quad \min\{d(T^j x, T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant N\} \leqslant \varphi(d(x,y))d(x,y) \tag{2.21}$$

przy pewnym $N \geqslant 1$ i pewnej funkcji ciągłej $\varphi :\ \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ takiej, że $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$.

Wtedy $d(T^{n+1}x_0, T^n x_0) \to 0,\ n \to \infty$ dla dowolnego $x_0 \in X$, a więc na mocy twierdzenia 2.10, jeśli ponadto X jest zupełna, to odwzorowanie T ma dokładnie jeden punkt stały.

Dowód. Dla dowodu niewprost załóżmy, że $d(T^n x, , T^{n+1}x) \nrightarrow 0$ przy pewnym $x_0 \in X$. Zatem istnieją $x_0 \in X,\ \varepsilon > 0,\ \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ takie, że

$$d(T^{n_k}x_0, T^{n_k+1}x_0) > \varepsilon,\ k \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Z jednostajnej ciągłości odwzorowania T, dla wyżej wybranego ε

$$\begin{array}{lll}
\exists \delta_N > 0 : & d(x,y) < \delta_N & \Rightarrow\ d(Tx,Ty) < \varepsilon,\ x,y \in X \\
\exists \delta_{N-1} > 0 : & d(x,y) < \delta_{N-1} & \Rightarrow\ d(Tx,Ty) < \min\{\varepsilon, \delta_N\},\ x,y \in X \\
... & & \\
\exists \delta_1 > 0 : & d(x,y) < \delta_1 & \Rightarrow\ d(Tx,Ty) < \min\{\varepsilon, \delta_2\},\ x,y \in X \\
\exists \delta > 0 : & d(x,y) < \delta & \Rightarrow\ d(Tx,Ty) < \min\{\varepsilon, \delta_1\},\ x,y \in X.
\end{array}$$

Z tego wynika, że

$$\begin{aligned}
d(x,y) < \delta \ &\Rightarrow\ d(Tx,Ty) < \min\{\varepsilon, \delta_1\} \\
&\Rightarrow\ ... \\
&\Rightarrow\ d(T^N x, T^N y) < \min\{\varepsilon, \delta_N\},\ x,y \in X,
\end{aligned}$$

a zatem

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(T^j x, T^j y) < \varepsilon,\ 1 \leqslant j \leqslant N,\ x,y \in X. \tag{2.23}$$

Z założenia (2.21) dla $x_0 \in X$ wybranego w (2.22)

$$\begin{aligned} \exists j_1 \in \{1, ..., N\} : d(T^{j_1}x_0, T^{j_1+1}x_0) &\leqslant \varphi(d(x_0, Tx_0))d(x_0, Tx_0) \\ \exists j_2 \in \{1, ..., N\} : d(T^{j_1+j_2}x_0, T^{j_1+j_2+1}x_0) &\leqslant \varphi(d(T^{j_1}x_0, T^{j_1+1}x_0))d(T^{j_1}x_0, T^{j_1+1}x_0). \end{aligned}$$

Kontynuując tę procedurę otrzymamy ciąg $\{j_1 + ... + j_l\}_{l=1}^{\infty}$ rosnący, N-syndetyczny, który spełnia założenia lematu 2.1 dla pary (x_0, Tx_0). Zatem

$$d(T^{j_1+...+j_l}x_0, T^{j_1+...+j_l+1}x_0) \to 0$$

przy $l \to \infty$. Oznaczmy $m_l := j_1 + ... + j_l$, $l \in \mathbb{N}$. Niech $\widetilde{l_0} \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $d(T^{m_l}x_0, T^{m_l+1}x_0) < \delta$ dla $l \geqslant \widetilde{l_0}$. Ponieważ ciąg $\{m_l\}_{l=\widetilde{l_0}}^{\infty}$ jest N-syndetyczny (gdyż $\{m_l\}_{l=1}^{\infty}$ jest rosnący), zatem niech $l_0 \geqslant \widetilde{l_0}$ będzie tak dobrane, że

$$\{m_{l_0} + 1, ..., m_{l_0} + N\} \cap \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \neq \varnothing.$$

Zatem istnieją $j_0 \in \{1, ..., N\}$ i $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$m_{l_0} + j_0 = n_{k_0}. \tag{2.24}$$

Z (2.22) wynika, że $d(T^{n_{k_0}}x_0, T^{n_{k_0}+1}x_0) > \varepsilon$, ale także $d(T^{m_{l_0}}x_0, T^{m_{l_0}+1}x_0) < \delta$, zatem z (2.23) zachodzi $d(T^{m_{l_0}+j_0}x_0, T^{m_{l_0}+j_0+1}x_0) < \varepsilon$, co wobec (2.24) prowadzi do sprzeczności. □

W przypadku szczególnym, gdy $N = 3$ oraz T spełnia założenia twierdzenia 2.1 (uogólnione twierdzenie Banacha o punkcie stałym w wersji ze stałą M) możemy dokładnie wskazać podorbitę spełniającą warunek Cauchy'ego.

Twierdzenie 2.13. *Jeśli T spełnia założenia twierdzenia 2.1 przy $N = 3$, to $\exists \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ - ciąg różnowartościowy taki, że $1 \leqslant |a_{n+1} - a_n| \leqslant N$ oraz $\{T^{a_n}x_0\}$ - Cauchy'ego.*

Dowód. Zdefiniujmy najpierw ciągi $\{i_n^1\}_{n=1}^{\infty}, ..., \{i_n^N\}_{n=1}^{\infty}$. Niech dla $k = 1, ..., N$

$$i_1^k := 1$$

oraz mając zdefiniowane $i_1^k, ..., i_n^k$

$$i_{n+1}^k := \min\left\{j \in \{i_n^k + 1, ..., i_n^k + N\} : \quad d(T^{j+k}x_0, T^j x_0) \leqslant Md(T^{i_n^k + k}x_0, T^{i_n^k}x_0)\right\}.$$

Z założenia twierdzenia 2.1 powyższy zbiór jest niepusty, a zatem utworzone ciągi są nieskończone, a ponadto rosnące (a zatem różnowartościowe) oraz $1 \leqslant i_{n+1}^k - i_n^k \leqslant N$ dla $k = 1, ..., N$. Oznaczmy $\mathcal{I}^k := \{i_n^k\}_{n=1}^{\infty}$. łatwo także zauważyć, że $n \geqslant \frac{i_n^k}{N}$ dla $n \in \mathbb{N}_1$.

Zdefiniujmy

$$a_n := n \quad (n = 1, ..., N).$$

Mając określone $a_1, ..., a_m$ niech $a := \max\{a_1, ..., a_m\}$. Definiujemy a_{m+1} następująco. Jeśli $\exists j \in \{a - N, ..., a\}$ takie, że

$$\begin{cases} j \notin \{a_n\}_{n=1}^m \\ \exists k \in \{1, ..., N\} : j \in \{i_n^k\}_{n=1}^{\infty} \\ j + k \in \{a_n\}_{n=1}^m, \end{cases}$$

to bierzemy najmniejsze takie k oraz najmniejsze takie j i definiujemy $a_{m+1} := j$.

W przeciwnym wypadku, jeśli $\exists j \in \{a - N, ..., a\}$ takie, że

$$\begin{cases} j \in \{a_n\}_{n=1}^m \\ \exists k \in \{1, ..., N\} : j \in \{i_n^k\}_{n=1}^{\infty} \\ j + k \notin \{a_n\}_{n=1}^m, \end{cases}$$

to bierzemy najmniejsze takie k oraz najmniejsze takie j i definiujemy $a_{m+1} := j + k$.

Zauważmy, że:

1. Mając określony n-ty wyraz powyższego ciągu, możemy znaleźć wyraz $(n+1)$-wszy, zatem możemy utworzyć ciąg nieskończony $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem różnowartościowym,

3. Kolejne wyrazy ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ są ze sobą "połączonećo najmniej jednym z ciągów $\{i_n^k\}_{n=1}^{\infty}(k = 1, ..., N)$ w tym sensie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ istnieje $k \in \{1, ..., N\}$ takie, że

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + k \\ a_n \in \{i_n^k\}_{n=1}^{\infty} \end{cases} \quad lub \quad \begin{cases} a_n = a_{n+1} + k \\ a_{n+1} \in \{i_n^k\}_{n=1}^{\infty} \end{cases},$$

4. $a_n \geqslant n - N$,
5. $d(T^{i_n^k+k}x_0, T^{i_n^k}x_0) \leqslant M^n d(T^k x_0, x_0)$ dla $k \in \{1, ..., N\}$ oraz $n \in \mathbb{N}_1$,
6. $1 \leqslant |a_{n+1} - a_n| \leqslant N$ dla $n \in \mathbb{N}_1$,
7. $\{T^{a_n}x_0\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Ad 1. Własność pokażemy dla $N = 3$. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że nie jesteśmy w stanie znaleźć a_{n_0+1} zgodnie z powyższym algorytmem (a zatem jest to największy możliwy indeks tworzonego ciągu, zaś utworzyliśmy możliwie największy ciąg). W takim wypadku, ponieważ ciąg jest rosnący, zatem n_0 jest jego największym indeksem. Niech $\mathcal{A} := \{a_n\}_{n=1}^{m_0}$. Oczywiście $a_{n_0} \in \mathcal{A}$, zaś wobec monotoniczności ciągu $\mathcal{A}$ zachodzi $\{a_{n_0} + 1, a_{n_0} + 2, ...\} \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

Rozważmy następujące przypadki:

I. Dla dowodu nie wprost załóżmy najpierw, że $n_0 - 2 \in \mathcal{A}$ oraz $n_0 - 1 \in \mathcal{A}$. Ponieważ $n_0 - 2 \in \mathcal{I}^3$ lub $n_0 - 1 \in \mathcal{I}^3$ lub $n_0 \in \mathcal{I}^3$, zatem $n_0 + 1 \in \mathcal{A}$ lub $n_0 + 2 \in \mathcal{A}$ lub $n_0 + 3 \in \mathcal{A}$ spełniaja warunki algorytmu, a tym samym należy do $\mathcal{A}$ (skoro $\mathcal{A}$ jest największym ciągiem, jaki mogliśmy utworzyć). Prowadzi to do sprzeczności z wyborem n_0 jako największego indeksu $\mathcal{A}$.

II. Załóżmy teraz, że $n_0 - 2 \notin \mathcal{A}$ oraz $n_0 - 1 \in \mathcal{A}$. Zauważmy najpierw, że $n_0 - 2 \notin \mathcal{I}^2$ (w przeciwnym wypadku skoro $n_0 \in \mathcal{A}$, to $n_0 - 2 \in \mathcal{A}$, co prowadziłoby do sprzeczności z założeniem). Zatem $n_0 - 1 \in \mathcal{I}^2$ lub $n_0 \in \mathcal{I}^2$. A z tego wynika (z tego samego powodu co powyżej), że $n_0 + 1 \in \mathcal{A}$ lub $n_0 + 2 \in \mathcal{A}$, co prowadzi do sprzeczności.

III. Następnie przyjmijmy, że $n_0 - 2 \in \mathcal{A}$ oraz $n_0 - 1 \notin \mathcal{A}$. Zauważmy, że $n_0 - 2 \notin \mathcal{I}^1$ oraz $n_0 - 1 \notin \mathcal{I}^1$ (w przeciwnym wypadku $n_0 - 1 \in \mathcal{A}$, co prowadziłoby do sprzeczności), a zatem $n_0 \in \mathcal{I}^1$. Wobec tego $n_0 + 1 \in \mathcal{A}$, co prowadzi do sprzeczności.

IV. Pozostał nam przypadek, gdy, że $n_0 - 2 \notin \mathcal{A}$ oraz $n_0 - 1 \notin \mathcal{A}$. Z własności ciągu $\mathcal{A}$ wynika, że $n_0 - 3 \in \mathcal{A}$. Rozważmy następujące przypadki:
a) $n_0 - 4 \in \mathcal{C}$. Wtedy ponieważ $n_0 - 4 \in \mathcal{I}^2$ lub $n_0 - 3 \in \mathcal{I}^2$ lub $n_0 - 2 \in \mathcal{I}^2$, to $n_0 - 2 \in \mathcal{A}$ lub $n_0 - 1 \in \mathcal{A}$ lub $n_0 - 2 \in \mathcal{C}$, co prowadzi do sprzeczności.
b) $n_0 - 4 \notin \mathcal{C}$ oraz $n_0 - 5 \in \mathcal{C}$. Wtedy ponieważ $n_0 - 5 \in \mathcal{I}^1$ lub $n_0 - 4 \in \mathcal{I}^1$ lub $n_0 - 3 \in \mathcal{I}^1$, to $n_0 - 4 \in \mathcal{A}$ lub $n_0 - 4 \in \mathcal{A}$ lub $n_0 - 2 \in \mathcal{C}$, co prowadzi do sprzeczności. Możliwy więc pozostaje jedynie przypadek
c) $n_0 - 5 \notin \mathcal{C}$ oraz $n_0 - 4 \notin \mathcal{C}$, ale wtedy $n_0 - 6 \notin \mathcal{C}$. Kontynuując rozumowanie jedynie co trzecia liczba naturalna może należeć co $\mathcal{C}$, co prowadzi do sprzeczności, gdyż z definicji $1, 2, 3, 4 \in \mathcal{A}$.

Pokazaliśmy zatem, iż istnieje ciąg nieskończony $\mathcal{A}$, spełniający powyższy algorytm.

Ad 2. Własności wynika wprost z metody określania kolejnych wyrazów ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - określając a_{m+1} sprawdzamy, czy nie jest on już elementem ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{m}$.

Ad 3. Własności wynika wprost z metody określania kolejnych wyrazów ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ad 4. Załóżmy, że $\exists m$ takie, że $a_m < m - N$. Niech m_0 będzie najmniejszym spośród takich m. Ponieważ ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest różnowartościowy, to $\exists l \in \{1, ..., m-1\}$ takie, że $a_l \geqslant m$. Zatem $a_m < m - N \leqslant a_l - N$, a to sprzeczność z faktem, że $a_m \geqslant a_l - N$ dla $m \geqslant l$.

Ad 5. Zauważmy, że

$$d(T^{i_1^k+k}x_0, T^{i_1^k}x_0) \leqslant Md(T^k x_0, x_0)$$

$$\dots$$

$$d(T^{i_n^k+k}x_0, T^{i_n^k}x_0) \leqslant Md(T^{i_{n-1}^k+k}x_0, T^{i_{n-1}^k}x_0) \leqslant ... \leqslant M^n d(T^k x_0, x_0).$$

Ad 6. Własności wynika wprost z metody określania kolejnych wyrazów ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ad 7. Wystarczy pokazać, że

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists m_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \; d(T^{a_m}x_0, T^{a_{m+r}}x_0) \leqslant \varepsilon, \; \forall m \geqslant m_0 \; \forall r \in \mathbb{N}_1.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $C := \sum_{k=1}^{N} d(T^k x_0, x_0)$.

Po pierwsze zauważmy, że

$$d(T^{a_m}x_0, T^{a_{m+r}}x_0) \leqslant \sum_{j=m}^{m+r-1} d(T^{a_j}x_0, T^{a_{j+1}}x_0).$$

Z własności (3) wynika, że $\forall j \in \{m, ..., m+r-1\} \; \exists k \in \{1, ..., N\}$:

$$(a) \quad \begin{cases} a_{j+1} = a_j + k \\ a_j \in \{i_n^k\}_{n=1}^{\infty} \end{cases} \quad lub \quad (b) \quad \begin{cases} a_j = a_{j+1} + k \\ a_{j+1} \in \{i_n^k\}_{n=1}^{\infty} \end{cases} ,$$

Jeśli dla któregoś $j \in \{m, ..., m+r-1\}$ zachodzi przypadek (a), to $\exists n_0 \geqslant 1$: $a_j = i_{n_0}^k$.

Zatem

$$\begin{aligned} d(T^{a_j}x_0, T^{a_{j+1}}x_0) &\leqslant d(T^{a_j}x_0, T^{a_j+k}x_0) \\ &\leqslant d(T^{i^k_{n_0}}x_0, T^{i^k_{n_0}+k}x_0) \\ &\leqslant M^{n_0} d(T^k x_0, x_0) \\ &\leqslant M^{\frac{i^k_{n_0}}{N}} d(T^k x_0, x_0) \\ &\leqslant M^{\frac{i^k_{n_0}}{N}} \cdot C \\ &= M^{\frac{a_j}{N}} \cdot C \end{aligned}$$

Jeśli zaś dla któregoś $j \in \{m, ..., m+r-1\}$ zachodzi (b), to $\exists n_0 \geqslant 1 : \ a_{j+1} = i^k_{n_0}$.

Wtedy

$$\begin{aligned} d(T^{a_j}x_0, T^{a_{j+1}}x_0) &\leqslant d(T^{a_{j+1}+k}x_0, T^{a_j+k}x_0) \\ &\leqslant d(T^{i^k_{n_0}+k}x_0, T^{i^k_{n_0}}x_0) \\ &\leqslant M^{n_0} d(T^k x_0, x_0) \\ &\leqslant M^{\frac{i^k_{n_0}}{N}} d(T^k x_0, x_0) \\ &\leqslant M^{\frac{i^k_{n_0}}{N}} \cdot C \\ &= M^{\frac{a_j}{N}} \cdot C \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} d(T^{a_m}x_0, T^{a_{m+r}}x_0) &\leqslant \sum_{j=m}^{m+r-1} d(T^{a_j}x_0, T^{a_{j+1}}x_0) \\ &\leqslant \sum_{j=m}^{m+r-1} C \cdot M^{\frac{a_j}{N}} \\ &\leqslant \sum_{j=m}^{m+r-1} C \cdot M^{\frac{j-N}{N}} \\ &= \frac{C}{M} \sum_{j=m}^{m+r-1} M^{\frac{j}{N}} \\ &= \frac{C}{M}(M^m)\frac{1-(M^{\frac{1}{N}})^r}{1-M^{\frac{1}{N}}} \\ &\leqslant \frac{C}{M(1-M^{\frac{1}{N}})}M^m \end{aligned}$$

Biorąc

$$m_0 := \max(1, \left[\frac{\ln(\frac{M(1-M^{\frac{1}{N}})\varepsilon}{C})}{\ln(M)}\right] + 1)$$

otrzymujemy

$$d(T^{a_m}x_0, T^{a_{m+r}}x_0) \leqslant \varepsilon, \ \forall m \geqslant m_0 \ \forall r \in \mathbb{N}_1.$$

□

Algorytmu określonego w dowodzie twierdzenia 2.13 nie da się wykorzystać, gdy T spełnia założenia 2.1 przy $N >= 4$. Dla $N = 4$ pokazuje to poniższy

Przykład 2.3. *Niech T będzie takim odwzorowaniem, że ciągi $\{i_n^1\}_{n=1}^{\infty}, ..., \{i_n^4\}_{n=1}^{\infty}$ z dowodu twierdzenia 2.13 są następujące:*

$$\begin{aligned} \{i_n^1\}_{n=1}^{\infty} &= (4, 7, 9, 13, 17, ..., 4k+1, ...), \\ \{i_n^2\}_{n=1}^{\infty} &= (2, 5, 9, 13, 17, ..., 4k+1, ...), \\ \{i_n^3\}_{n=1}^{\infty} &= (1, 5, 9, 13, 17, ..., 4k+1, ...), \\ \{i_n^4\}_{n=1}^{\infty} &= (3, 6, 9, 13, 17, ..., 4k+1, ...). \end{aligned}$$

Są one oczywiście 4-syndetyczne.

Zgodnie z algorytmem $a_n := n$ *dla* $n = 1, ..., 4$. *Następnie* $a_5 = 5$, *gdyż* $4 \in \{a_n\}_{n=1}^4$ *i* $4 \in \{i_n^1\}_{n=1}^\infty$ *oraz* $4 + 1 \notin \{a_n\}_{n=1}^4$. *Dalej* $a_6 = 7$, *gdyż* $5 \in \{a_n\}_{n=1}^5$ *i* $5 \in \{i_n^2\}_{n=1}^\infty$ *oraz* $5 + 2 \notin \{a_n\}_{n=1}^5$. *Następnie* $a_7 = 8$, *bo* $7 \in \{a_n\}_{n=1}^6$ *i* $7 \in \{i_n^1\}_{n=1}^\infty$ *oraz* $7 + 1 \notin \{a_n\}_{n=1}^4$.

Na tym etapie utworzyliśmy ciąg $\{a_n\}_{n=1}^7 = (1, 2, 3, 4, 5, 7, 8)$. *W tym przypadku* $a := \max\{a_1, ..., a_7\} = 8$. *Nie istnieje jednak* $j \in \{a - 4, ..., a\} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ *takie, że*

$$\begin{cases} j \notin \{a_n\}_{n=1}^7 \\ \exists k \in \{1, ..., 4\} : j \in \{i_n^k\}_{n=1}^\infty \\ j + k \in \{a_n\}_{n=1}^7 \end{cases} \quad \textit{lub} \quad \begin{cases} j \in \{a_n\}_{n=1}^7 \\ \exists k \in \{1, ..., 4\} : j \in \{i_n^k\}_{n=1}^\infty \\ j + k \notin \{a_n\}_{n=1}^7 \end{cases},$$

zatem nie da się w ten sposób wybrać a_8.

Rozdział 3

Odwzorowania α - nierozszerzające

W tym rozdziale przedstawimy zastosowanie Tw. 1, będącego głównym wynikiem niniejszej pracy, do uzyskania pewnych nowych rezultatów, dotyczących punktów stałych odwzorowań α-nierozszerzających (zob. np. [GSi]).

3.1 Definicje i własności odwzorowań α-nierozszerzających

Aby je zdefiniować, niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, zaś $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ wielowskaźnikiem spełniającym warunki $\alpha_1 > 0,\ \alpha_n > 0,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = 2, ..., n-1$ oraz $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Definicja 3.1. *Odwzorowanie $T : X \to X$ nazywamy α-Lipschitzowskim ze stałą $k \geqslant 0$, jeśli*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d(T^i x, T^i y) \leqslant k d(x, y),\ \forall x, y \in X.$$

Definicja 3.2. *Mówimy, że odwzorowanie $T : X \to X$ jest α-nierozszerzające (odpowiednio jest α -kontrakcją), gdy T jest α-Lipschitzowskie ze stałą $k \leqslant 1$ (odpowiednio $k < 1$).*

Definicja 3.3. *Minimalnym przesunięciem odwzorowania T nazywamy* $\inf\{d(x,Tx),\ x\in X\}$. *Oznaczamy je symbolem $d(T)$.*

Twierdzenie 3.1 ([GSi, Tw. 1]). *Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną, zaś $T : X \to X$ niech będzie α-nierozszerzające (α-kontrakcją). Wtedy T jest nierozszerzające (kontrakcją) w metryce równoważnej*

$$\rho(x,y) := \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n}\alpha_i\right) d\left(T^{j-1}x, T^{j-1}y\right).$$

Twierdzenie 3.2 ([GSi, Tw. 4]). *Niech X będzie przestrzenią Banacha, $X\supset C$ - niepusty, domknięty, wypukły i ograniczony. Niech $T : C\to C$ będzie $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$-nierozszerzające, gdzie $\alpha_1 \geqslant 2^{\frac{1}{1-n}}$. Wtedy $d(T)=0$.*

Uwaga 3.1 ([GP]). *Jeśli T jest odwzorowaniem $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$-nierozszerzającym, to $T_\alpha := \sum_{i=1}^{n}\alpha_i T^i$ jest nierozszerzające.*

Poniższy przykład pokazuje, że nie wystarczy założyć, że T_α jest kontrakcją.

Przykład 3.1 ([GP, Prz. 4]). *Niech $T : [0,1]\ni x \mapsto \chi_{[0,\frac{1}{2})}(x)\in[0,1]$. Wtedy $T^2x = \chi_{[\frac{1}{2},1)}(x)$ oraz $T_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \equiv const \equiv \frac{1}{2}$, zatem $T_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ jest zwężające mimo, że T ani T^2 nie są ciągłe ani T nie ma punktu stałego.*

3.2 Pewne nowe wyniki dotyczące odwzorowań α-nierozszerzających

Pewnym uzupełnieniem twierdzenia 3.2 jest

Twierdzenie 3.3. *Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną zupełną, $n\geqslant 1$, zaś $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, gdzie $\alpha_1>0,\ \alpha_i\in[0,1],\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$. Niech $T: X\to X$ spełnia* *warunek*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j d(T^j x, T^j y) \leqslant \varphi(d(x,y)) \cdot d(x,y) \qquad \forall x, y \in X$$

przy pewnej ciągłej funkcji $\varphi: \ [0,\infty) \to [0,1]$ *takiej, że*

- $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$
- $\exists t_0 > 0,\ \lambda < 1\ \forall t \geqslant t_0 \quad \varphi(t) \leqslant \lambda.$

Wtedy T *ma dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. Zauważmy, że

$$\alpha_1 d(Tx, Ty) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \alpha_j d(T^j x, T^j y) \leqslant \varphi(d(x,y)) \cdot d(x,y) \leqslant d(x,y),$$

zatem $d(Tx,Ty) \leqslant \frac{1}{\alpha_1} d(x,y)$, czyli T jest jednostajnie ciągłe. Teza wynika z twierdzenia 2.12.

Teza wynika także z 2.2 oraz faktu, że

$$\min\left\{d(T^j x, T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant n\right\} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \alpha_j d(T^j x, T^j y),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall x, y \in X.$$

□

Istnieją odwzorowania T, które nie są α-nierozszerzające, a mimo to $d(T) = 0$, a nawet posiadają dokładnie jeden punkt stały, o czym świadczy poniższy

Przykład 3.2. *Niech*

$$T : l_\infty \cap \{x \in l_\infty :\ x_i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{N}\} \to l_\infty \cap \{x \in l_\infty :\ x_i \geqslant 0,\ i \in \mathbb{N}\}$$

będzie określone następująco

$$T : x = (x_1, x_2, ...) \to Tx := (1, \frac{2x_3}{1+x_3}, \frac{\frac{1}{2}x_2}{1+x_2}, \frac{2x_5}{1+x_5}, \frac{\frac{1}{2}x_4}{1+x_4}, ...).$$

T nie jest α-nierozszerzające dla żadnego α, ale przy odpowiednio dobranym $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ odwzorowanie T jest α-Lipschitzowskie ze stałą dowolnie bliską 1. *Ponadto T posiada dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. Mamy $T^2x = (1, \frac{x_2}{1+\frac{3}{2}x_2}, \frac{x_3}{1+3x_3}, \frac{x_4}{1+\frac{3}{2}x_4}, \frac{x_5}{1+3x_5}, ...)$. Oszacujmy

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_i}{1+\frac{3}{2}x_i} - \frac{y_i}{1+\frac{3}{2}y_i}\right| &= \left|\frac{x_i-y_i}{1+\frac{3}{2}(x_i+y_i)+\frac{9}{4}x_iy_i}\right| \leqslant \frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i+y_i|} \\ &\leqslant \frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|} \leqslant \frac{\|x-y\|_\infty}{1+\|x-y\|_\infty}\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wynika z faktu, że $t \to \frac{t}{1+t}$ jest funkcją rosnącą na $[0, \infty)$. Podobnie

$$\left|\frac{x_i}{1+3x_i} - \frac{y_i}{1+3y_i}\right| \leqslant \frac{\|x-y\|_\infty}{1+\|x-y\|_\infty},$$

zatem $\|T^2x - T^2y\| \leqslant \frac{1}{1+\|x-y\|_\infty} \|x-y\|_\infty$ .Odwzorowanie T spełnia założenia twierdzenia 2.2 z $\varphi(t) := \frac{1}{1+t}$, a więc T ma dokładnie jeden punkt stały. Jest nim oczywiście $(1, 0, 0, ...)$.

Oczywiście $\|Tx - Ty\| \leqslant 2\|x-y\|$ oraz $\|T^ix - T^iy\| \leqslant \|x-y\|$, $i \geqslant 2$ dla dowolnych $x, y \in l_\infty \cap \{x \in l_\infty : x_i \geqslant 0, \ i \in \mathbb{N}\}$. Z drugiej strony biorąc $x^n = (0, 0, \frac{1}{n}, 0, 0, ...)$ oraz $y^n = (0, 0, ...)$ mamy $\frac{\|Tx^n - Ty^n\|}{\|x^n - y^n\|} = \frac{\frac{2\cdot\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{2}{n+1} \to 2, \ n \to \infty$, zatem $k(T) = 2$. Podobnie $k(T^2) = 1$ i $k(T^i) \geqslant 1$, $i \geqslant 3$.

W l_∞ nie da się wybrać takiego α, aby $\alpha_1 > 0$ i aby T było α-nierozszerzające, jednakże $\frac{1}{n}\|Tx - Ty\| + \frac{n-1}{n}\|T^2x - T^2y\| \leqslant \frac{n+1}{n}\|x-y\|$, zatem, biorąc odpowiednio duże n, odwzorowanie T jest $(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n})$-nierozszerzające ze stałą dowolnie bliską 1. □

Twierdzenie 3.4. *Niech X będzie przestrzenią Banacha, zaś $C \subset X$ niepusty, domknięty, wypukły i ograniczony. Niech $T : C \to C$ będzie odzworowaniem α-nierozszerzającym takim, że*

$$\left\|T^i(\mu x) - T^i(\mu y)\right\| \leqslant \left\|T^i(\lambda x) - T^i(\lambda y)\right\|, \ i < n, \ \forall x, y \in C, \ 0 \leqslant \mu \leqslant \lambda.$$

Wtedy $d(T) = 0$.

Dowód. Ustalmy dowolne $k \geqslant 1$. Niech $S_k := (1 - \frac{1}{k})T$. Wtedy

$$\|S_k x - S_k y\| = (1 - \frac{1}{k}) \|Tx - Ty\| .$$

Następnie

$$S_k^2 x = S_k((1 - \frac{1}{k})Tx) = (1 - \frac{1}{k})T((1 - \frac{1}{k})Tx),$$

zatem z założenia

$$\begin{aligned}
\|S_k^2 x - S_k^2 y\| &= \left\|(1 - \tfrac{1}{k})T((1 - \tfrac{1}{k})Tx) - (1 - \tfrac{1}{k})T((1 - \tfrac{1}{k})Ty)\right\| \\
&= (1 - \tfrac{1}{k}) \left\|T((1 - \tfrac{1}{k})Tx) - T((1 - \tfrac{1}{k})Ty)\right\| \\
&\leqslant (1 - \tfrac{1}{k}) \|T^2 x - T^2 y\| .
\end{aligned}$$

Podobnie dla $i \geqslant 3$ jest

$$S_k^i x = T_k^{i-1}((1 - \frac{1}{k})Tx) = ... = (1 - \frac{1}{k})T((1 - \frac{1}{k})T(...((1 - \frac{1}{k})Tx)...)),$$

zatem

$$\begin{aligned}
&\|S_k^i x - S_k^i y\| = \left\|(1 - \tfrac{1}{k})T(...((1 - \tfrac{1}{k})Tx)...) - (1 - \tfrac{1}{k})T(...((1 - \tfrac{1}{k})Ty)...)\right\| \\
&= (1 - \tfrac{1}{k}) \left\|T((1 - \tfrac{1}{k})T(...((1 - \tfrac{1}{k})Tx)...)) - T((1 - \tfrac{1}{k})T(...((1 - \tfrac{1}{k})Ty)...))\right\| \\
&\leqslant (1 - \tfrac{1}{k}) \left\|T(T(...((1 - \tfrac{1}{k})Tx)...)) - T(T(...((1 - \tfrac{1}{k})Ty)...))\right\| \\
&\leqslant ... \\
&\leqslant (1 - \tfrac{1}{k}) \|T^i x - T^i y\| .
\end{aligned}$$

Na mocy założenia zachodzi szacowanie $\sum_{i=1}^n \alpha_i \|T^i x - T^i x\| \leqslant \|x - y\|$ przy pewnym $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),\ 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Zatem

$$\min \left\{ \left\|S_k^j x - S_k^j y\right\|,\ 1 \leqslant j \leqslant n \right\} \leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\|S_k^i x - S_k^i y\right\| \leqslant (1 - \frac{1}{k}) \|x - y\| ,$$

Na mocy uogólnionego twierdzenia Banacha o punkcie stałym S_k ma dokładnie jeden punkt stały. Niech będzie nim x_k.Otrzymujemy

$$\|x_k - Tx_k\| = \|S_k x_k - Tx_k\| = \left\|(1 - \frac{1}{k})Tx_k - Tx_k\right\| = \frac{1}{k} \|x_k\| \to 0,\ k \to \infty,$$

co kończy dowód twierdzenia. ◻

Przykład 3.3. *Ustalmy $k \geqslant 2$. Niech $\tau : [-1,1] \to [-1,1]$ będzie rzeczywistą funkcją niemalejącą o stałej Lipschitza $k(\tau) = k$, wklęsłą na $[-1,0]$, wypukłą na $[0,1]$ i taką, że $\tau(0) = 0$. Niech teraz*

$$T : B_{l_1} \ni x = (x_1, x_2, ...) \to Tx := (\tau(x_2), \frac{k}{k^2-1}x_3, x_4, x_5, ...) \in B_{l_1}.$$

Dla $k \geqslant 3$ odwzorowanie T nie spełnia założeń twierdzenia 3.2, spełnia zaś założenia twierdzenia 3.4 dla $k \geqslant 2$.

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\| &= |\tau(x_2) - \tau(y_2)| + \tfrac{k}{k^2-1}|x_3 - y_3| + \textstyle\sum_{i=4}^{\infty}|x_i - y_i| \\
&\leqslant k|x_2 - y_2| + \tfrac{k}{k^2-1}|x_3 - y_3| + \textstyle\sum_{i=4}^{\infty}|x_i - y_i| \\
\|T^2x - T^2y\| &= \left|\tau(\tfrac{k}{k^2-1}x_3) - \tau(\tfrac{k}{k^2-1}y_3)\right| + \tfrac{k}{k^2-1}|x_4 - y_4| + \textstyle\sum_{i=5}^{\infty}|x_i - y_i| \\
&\leqslant \tfrac{k^2}{k^2-1}|x_3 - y_3| + \tfrac{k}{k^2-1}|x_4 - y_4| + \textstyle\sum_{i=5}^{\infty}|x_i - y_i|.
\end{aligned}$$

Jest zatem $k(T) = k$ oraz $k(T^i) = \frac{k^2}{k^2-1} > 1,\ i \geqslant 2.$

łatwo widać, że dla $k \geqslant 3$, to twierdzenie 3.2 nie daje odpowiedzi czy $d(T) = 0$. Musiałoby bowiembyć $\alpha_1 \geqslant 2^{\frac{1}{1-n}} \geqslant 2^{\frac{1}{1-3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2}$, jednakże przy żadnym takim $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ odwzorowanie T nie jest α -nierozszerzające.

Pokażemy teraz, że T spełnia założenia twierdzenia 3.4, a zatem jednak $d(T) = 0$.

Wystarczy wziąć $n = 2$. łatwo sprawdzić, że $\frac{1}{k}\|Tx - Ty\| + \frac{k-1}{k}\|T^2x - T^2y\| \leqslant \|x - y\|$, czyli odwzorowanie T jest $(\frac{1}{k}, \frac{k-1}{k})$-nierozszerzające. Pozostaje pokazać, że $\|T(\mu x) - T(\mu y)\| \leqslant \|T(\lambda x) - T(\lambda y)\|,\ \forall x, y \in B_{l_1},\ 0 \leqslant \mu \leqslant \lambda$. Jeśli $|\tau(\mu x_2) - \tau(\mu y_2)| \leqslant |\tau(\lambda x_2) - \tau(\lambda y_2)|$, to oczywiście

$$\begin{aligned}
\|T(\mu x) - T(\mu y)\| &= |\tau(\mu x_2) - \tau(\mu y_2)| + \left|\tfrac{k}{k^2-1}\mu x_3 - \tfrac{k}{k^2-1}\mu y_3\right| + \textstyle\sum_{i=4}^{\infty}|\mu x_i - \mu y_i| \\
&\leqslant |\tau(\lambda x_2) - \tau(\lambda y_2)| + \left|\tfrac{k}{k^2-1}\lambda x_3 - \tfrac{k}{k^2-1}\lambda y_3\right| + \textstyle\sum_{i=4}^{\infty}|\lambda x_i - \lambda y_i| \\
&= \|T(\lambda x) - T(\lambda y)\|
\end{aligned}$$

Oczywiście szacowanie $|\tau(\mu x_2) - \tau(\mu y_2)| \leqslant |\tau(\lambda x_2) - \tau(\lambda y_2)|$ wystarczy wykazać dla $x_2 \neq y_2$ oraz $0 < \mu < \lambda$. Dla uproszczenia zapisu będziemy pisać x, y mając na myśli x_2, y_2. Załóżmy najpierw, że $x, y > 0$. Bez straty ogólności niech $y < x$. Zatem $0 < \mu y < \mu x, \lambda y < \lambda x$.

Załóżmy, że jest $0 < \mu y < \mu x \leqslant \lambda y < \lambda x$. Wybierzmy $a \in (\lambda y, \lambda x]$ takie, że $a - \lambda y = \mu x - \mu y$. Oczywiście takie a istnieje, gdyż $\lambda(x-y) \geqslant u(x-y)$. Wtedy $\mu x = \frac{a-\mu x}{a-\mu y}\mu y + \frac{\mu x - \mu y}{a-\mu y}a$ oraz $\lambda y = \frac{a-\lambda y}{a-\mu y}\mu y + \frac{\lambda y-\mu y}{a-\mu y}a$. Z wypukłości τ na $[0,1]$ mamy

$$\begin{array}{rcl}
\tau(\mu x) & = & \tau(\frac{a-\mu x}{a-\mu y}\mu y + \frac{\mu x-\mu y}{a-\mu y}a) \\
& \leqslant & \frac{a-\mu x}{a-\mu y}\tau(\mu y) + \frac{\mu x-\mu y}{a-\mu y}\tau(a) \\
\tau(\lambda y) & = & \tau(\frac{a-\lambda y}{a-\mu y}\mu y + \frac{\lambda y-\mu y}{a-\mu y}a) \\
& \leqslant & \frac{a-\lambda y}{a-\mu y}\tau(\mu y) + \frac{\lambda y-\mu y}{a-\mu y}\tau(a) \\
& = & \frac{\mu x-\mu y}{a-\mu y}\tau(\mu y) + \frac{a-\mu x}{a-\mu y}\tau(a)
\end{array}$$

Dodając stronami i uwzględniając, że τ jest niemalejąca, otrzymujemy

$$\begin{array}{rcl}
\tau(\mu x) + \tau(\lambda y) & \leqslant & (\frac{a-\mu x}{a-\mu y} + \frac{\mu x-\mu y}{a-\mu y})\tau(\mu y) + (\frac{\mu x-\mu y}{a-\mu y} + \frac{a-\mu x}{a-\mu y})\tau(a) \\
& = & \tau(\mu y) + \tau(a) \leqslant \tau(\mu y) + \tau(\lambda x),
\end{array}$$

co daje $|\tau(\mu x) - \tau(\mu y)| \leqslant |\tau(\lambda x) - \tau(\lambda y)|$.

Z kolei jeśli $0 < \mu y < \lambda y \leqslant \mu x < \lambda x$, to wybierzmy $a \in (\mu x, \lambda x]$ takie, że $a - \mu x = \lambda y - \mu y$. Oczywiście takie a istnieje, gdyż $(\lambda - \mu)x \geqslant (\lambda - \mu)y$. Wtedy $\lambda y = \frac{a-\lambda y}{a-\mu y}\mu y + \frac{\lambda y-\mu y}{a-\mu y}a$ oraz $\mu x = \frac{a-\mu x}{a-\mu y}\mu y + \frac{\mu x-\mu y}{a-\mu y}a$. Z wypukłości τ na $[0,1]$ mamy

$$\begin{array}{rcl}
\tau(\lambda y) & = & \tau(\frac{a-\lambda y}{a-\mu y}\mu y + \frac{\lambda y-\mu y}{a-\mu y}a) \\
& \leqslant & \frac{a-\lambda y}{a-\mu y}\tau(\mu y) + \frac{\lambda y-\mu y}{a-\mu y}\tau(a) \\
\tau(\mu x) & = & \tau(\frac{a-\mu x}{a-\mu y}\mu y + \frac{\mu x-\mu y}{a-\mu y}a) \\
& \leqslant & \frac{a-\mu x}{a-\mu y}\tau(\mu y) + \frac{\mu x-\mu y}{a-\mu y}\tau(a) \\
& = & \frac{\lambda y-\mu y}{a-\mu y}\tau(\mu y) + \frac{a-\lambda y}{a-\mu y}\tau(a)
\end{array}$$

Dodając stronami i uwzględniając, że τ jest niemalejąca, otrzymujemy

$$\begin{array}{rcl}
\tau(\lambda y) + \tau(\mu x) & \leqslant & (\frac{a-\lambda y}{a-\mu y} + \frac{\lambda y-\mu y}{a-\mu y})\tau(\mu y) + (\frac{\lambda y-\mu y}{a-\mu y} + \frac{a-\lambda y}{a-\mu y})\tau(a) \\
& = & \tau(\mu y) + \tau(a) \leqslant \tau(\mu y) + \tau(\lambda x),
\end{array}$$

co daje $|\tau(\mu x) - \tau(\mu y)| \leqslant |\tau(\lambda x) - \tau(\lambda y)|$.

Można sprawdzić, prowadząc analogiczne rozumowanie jak wyżej, że szacowanie $|\tau(\mu x) - \tau(\mu y)| \leqslant |\tau(\lambda x) - \tau(\lambda y)|$ pozostaje prawdziwe również, gdy $x, y < 0$ lub są różnych znaków. To uzasadnia, że T spełnia założenia twierdzenia 3.4. $\square$

Twierdzenie 3.5. *Niech X będzie przestrzenią Banacha, $x_0 \in X$, $N \in \mathbb{N}$, $X \supset C$ - ograniczony, gwiaździsty względem x_0. Niech $T : C \to C$ takie, że*

$$\min\left\{\left\|T^j x - T^j y\right\|,\ 1 \leqslant j \leqslant N\right\} \leqslant \|x - y\|\,,\ \forall x, y \in C$$

oraz $\exists 0 \leqslant b_0 \leqslant 1,\ \forall 0 \leqslant b \leqslant b_0,\ \forall 1 \leqslant j \leqslant N-1,\ \forall x, y \in C$

$$\left\|T(T_b^j x) - T(T_b^j y)\right\| \leqslant (1+b)\left\|T^{j+1}x - T^{j+1}y\right\|,$$

gdzie $T_b x = (1-b)Tx + bx_0$.

Wtedy $d(T) = 0$.

Dowód. Ustalmy dowolne $x, y \in C$ i weźmy $j \in \{1, ..., N\}$ takie, że $\|T^j x - T^j y\| \leqslant \|x - y\|$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\left\|T_b^j x - T_b^j y\right\| &= \left\|T_b(T_b^{j-1}x) - T_b(T_b^{j-1}y)\right\| \\
&= \left\|(1-b)T(T_b^{j-1}x) + bx_0 - (1-b)T(T_b^{j-1}y) - bx_0\right\| \\
&= (1-b)\left\|T(T_b^{j-1}x) - T(T_b^{j-1}y)\right\| \\
&\leqslant (1-b)(1+b)\left\|T^j x - T^j y\right\| \\
&\leqslant (1-b^2)\|x - y\|
\end{aligned}$$

Zatem dla dowolnej pary $x, y \in C$ istnieje $j \in \{1, ..., N\}$ takie, że $\left\|T_b^j x - T_b^j y\right\| \leqslant (1-b^2)\|x - y\|$.Na mocy twierdzenia 2.1 T_b ma dokładnie jeden punkt stały.

Ustalmy teraz $\varepsilon > 0$ i wybierzmy $0 \leqslant b \leqslant b_0$ takie, że

$$\|T_b z - Tz\| = \|(1-b)Tz + bx_0 - Tz\| = b\|x_0 - Tz\| \leqslant \varepsilon,\ \forall z \in C$$

Niech $z_b \in C$ będzie takie, że $T_b z_b = z_b$. Wtedy $\|z_b - Tz_b\| \leqslant \|z_b - T_b z_b\| + \|T_b z_b - Tz_b\| \leqslant 0 + \varepsilon = \varepsilon$, co, wobec dowolności wyboru ε, dowodzi, że $d(T) = 0$. $\square$

Przykład 3.4. *Niech T będzie takie, jak w przykładzie 3.3. Wtedy T spełnia założenia twierdzenia 3.5 (pokazaliśmy już, że T nie spełnia założeń twierdzenia 3.2 dla $k \geqslant 3$).*

Dowód. Policzmy

$$T(T_b x) = (\tau((1-b)\frac{k}{k^2-1}x_3), \frac{k}{k^2-1}(1-b)x_4, (1-b)x_5, (1-b)x_6, ...)$$

oraz

$$T^2 x = (\tau(\frac{k}{k^2-1}x_3), \frac{k}{k^2-1}x_4, x_5, x_6, ...)$$

Mamy

$$\begin{aligned}
&\|T(T_b x) - T(T_b y)\| = \left|\tau((1-b)\tfrac{k}{k^2-1}x_3) - \tau((1-b)\tfrac{k}{k^2-1}y_3)\right| \\
&+ \left|\tfrac{k}{k^2-1}(1-b)x_4 - \tfrac{k}{k^2-1}(1-b)y_4\right| + |(1-b)x_5 - (1-b)y_5| + ... \\
&\leqslant \left|\tau(\tfrac{k}{k^2-1}x_3) - \tau(\tfrac{k}{k^2-1}y_3)\right| + \left|\tfrac{k}{k^2-1}x_4 - \tfrac{k}{k^2-1}y_4\right| + |x_5 - y_5| + ... \\
&= \|T^2 x - T^2 y\| \leqslant (1+b)\left\|T^2 x - T^2 y\right\|.
\end{aligned}$$

Uwzględniliśmy tutaj wykazany już w przykładzie 3.3 fakt, że

$$|\tau(\mu s) - \tau(\mu t)| \leqslant |\tau(\lambda s) - \tau(\lambda t)|\,,\ 0 \leqslant \mu \leqslant \lambda,\ s,t \in [-1,1].$$

Oszacowanie

$$\min\left\{\|Tx - Ty\|\,, \left\|T^2 x - T^2 y\right\|\right\} \leqslant \frac{1}{k}\|Tx - Ty\| + \frac{k-1}{k}\left\|T^2 x - T^2 y\right\| \leqslant \|x - y\|$$

kończy dowód faktu, że T spełnia założenia twierdzenia 3.5. ☐

Uwaga 3.2 ([G5, Prob. 14]). *Czy dla $n = 2$ oszacowanie $\alpha_1 \geqslant \frac{1}{2}$ jest najlepsze? Czy istnieją odwzorowania T, które są α-nierozszerzające z $\alpha_1 < \frac{1}{2}$ i $d(T) > 0$?*

Rozdział 4

SF-przestrzenie

Rozumowania z poprzednich rozdziałów można uogólnić na pewną klasę przestrzeni (zawierającą przestrzenie modularne z warunkiem Δ_2), które nie są przestrzeniami metrycznymi i mają uboższą od nich strukturę. Jest to klasa SF-przestrzni, wprowadzona w ([L]). Idee dowodów polegają zasadniczo na zastąpieniu warunku trójkąta dla przestrzeni metrycznych przez warunki z definicji SF-przestrzeni.

4.1 Definicje

Przytoczmy najpierw niezbędne dla naszych rozważań definicje.

Definicja 4.1 (zob. [M]). *Niech X będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$, zaś $\varrho : X \to [0, +\infty]$ takie, że*
1) $\varrho(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,
2) $\varrho(\lambda x) = \varrho(x)$ dla $|\lambda| = 1$,
3) $\varrho(\alpha x + \beta y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$,
lub
3') $\varrho(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha^s \rho(x) + \beta^s \rho(y)$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha^s + \beta^s = 1$.
Funkcję ρ nazywamy modularem (modularem s-wypukłym).

Definicja 4.2. $X_\rho := \{x \in X : \lim_{\alpha \to 0} \rho(\alpha x) = 0\}$ *nazywamy przestrzenią modularną.*

Definicja 4.3. *Niech* X *będzie przestrzenią wektorową nad* $\mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C}$, *zaś* $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ *takie, że*
1) $\|x\| = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x = 0$,
2) $\|x\| = \|\lambda x\|$ *dla* $|\lambda| = 1$,
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$,
4) $\lim_{\lambda \to 0} \|\lambda x\| = 0$ *dla dowolnego* $x \in X$.
Funkcję $\|\cdot\|$ *nazywamy F-normą.*

Uwaga 4.1. $\|x\|_\rho := \inf \left\{ u > 0 : \rho\left(\frac{x}{u}\right) \leqslant u \right\}$ *jest F-normą w* X_ρ.

Definicja 4.4. *Powiemy, że modular* ϱ *spełnia warunek* Δ_2, *gdy dla dowolnego ciągu* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *zachodzi*

$$\varrho(x_n) \to 0,\ n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \varrho(2x_n) \to 0,\ n \to \infty.$$

Definicja 4.5 ([L])**.** *Niech* X *będzie przestrzenią wektorową nad* $\mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C}$, *zaś* $F : X \to [0, +\infty)$ *takie, że*
1) $F(x) = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $x = 0$,
2) $F(\lambda x) = F(x)$ *dla* $|\lambda| = 1$,
3) $F(x_n - x) \to 0 \Rightarrow F(x_n) \to F(x)$ *przy* $n \to \infty$,
4) $F(x_n - x) \to 0$ *oraz* $F(y_n - y) \to 0 \Rightarrow F((x_n + y_n) - (x + y)) \to 0$ *przy* $n \to \infty$,
5) $F(x_n - x) \to 0$ *oraz* $\alpha_n \to \alpha \Rightarrow F(\alpha_n x_n - \alpha x) \to 0$ *przy* $n \to \infty$,
6) (X, F) *jest zupełna w topologii* $\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$,
gdzie $B(x, r) := \{y \in X : F(y - x) < r\}$.
Parę (X, F) *nazywamy SF-przestrzenią.*

Definicja 4.6. *Niech* (X, F) *będzie SF-przestrzenią. Jeśli istnieje* $M > 0$ *takie, że* $F(x) \leqslant M$ *dla* $x \in X$, *to* (X, F) *nazywamy SF-ograniczoną.*

Definicja 4.7. *Niech* (X, F) *będzie SF-przestrzenią. Ciąg* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nazywamy SF-*

zbieżnym, jeśli istnieje $x \in X$ takie, że $\lim_{n\to\infty} F(x_n - x) \to 0$.

Definicja 4.8. *Ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ w przestrzeni (X, F) nazywamy ciągiem SF-Cauchy'ego, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnych $m, n \geqslant n_0$ zachodzi $F(x_n - x_m) \leqslant \varepsilon$.*

Podamy teraz jak wygląda warunek Δ_2 w przestrzeniach Orlicza w języku funkcji generujących te przestrzenie.

Rozważmy przestrzeń z miarą (X, Σ, μ).

Definicja 4.9 (funkcja generująca Orlicza)**.** *Funkcję $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ nazywamy funkcją generującą Orlicza, gdy*

- *φ jest lewostronnie ciągła, niemalejąca,*
- *$\varphi(t) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t = 0$,*
- $\lim_{\lambda\to 0^+} \varphi(\lambda) = 0$.

Definicja 4.10 (modular Orlicza)**.** *Modular określony jako*

$$\rho_\varphi : X \ni x \mapsto \int_a^b \varphi\left(|x(t)|\right) d\mu(t) \in [0, +\infty)$$

nazywamy modularem Orlicza.

Definicja 4.11 (przestrzeń Orlicza)**.** *Przestrzeń*

$$X_\varphi := \left\{ x \in X : \lim_{\alpha\to 0} \rho_\varphi(\alpha x) = 0 \right\}$$

nazywamy przestrzenią Orlicza generowaną przez φ.

Uwaga 4.2. *Przestrzeń Orlicza, dla której funkcją generującą jest $\varphi(t) = t^p$ to przestrzeń L^p, zatem przestrzenie Orlicza są uogólnieniem przestrzeni L^p.*

Definicja 4.12 (warunek Δ_2 w przestrzeniach Orlicza)**.** *Niech* $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$*. Powiemy, że* φ *spełnia warunek* Δ_2*, gdy istnieje* $M > 0$ *takie, że dla dowolnego* $t \in \mathbb{R}_+$ *zachodzi* $\varphi(2t) \leqslant M\varphi(t)$*.*

Twierdzenie 4.1. *Niech* X *będzie przestrzenią Orlicza. Jeśli* φ *spełnia warunek* Δ_2*, to dla dowolnego ciągu* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *i dowolnego* $\lambda \in \mathbb{R}$ *zachodzi* $\varrho_\varphi(\lambda x_n) \to 0 \Leftrightarrow \varrho_\varphi(2\lambda x_n) \to 0$*, przy* $n \to \infty$*, a zatem modular spełnia warunek* Δ_2 *z definicji 4.4.*

Definicja 4.13 (funkcja generująca Musielaka-Orlicza)**.** *Niech* $\varphi : X \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *nazywamy funkcją generującą Musielaka-Orlicza, gdy*

- $\forall x \in X \quad \varphi(x,\cdot) : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *jest funkcją generującą Orlicza*
- $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \varphi(\cdot,t) : X \to [0,+\infty)$ *jest mierzalna ze względu na pierwszą zmienną.*

Definicja 4.14 (modular Musielaka-Orlicza)**.** *Funkcjonał dany wzorem*

$$\rho_\varphi : x \mapsto \int_a^b \varphi\left(t, |x(t)|\right) d\mu(t)$$

nazywamy modularem Musielaka-Orlicza.

Definicja 4.15 (przestrzeń Musielaka-Orlicza)**.** *Przestrzeń*

$$X_\varphi := \left\{x \in X : \lim_{\alpha\to 0} \rho_\varphi(\alpha x) = 0\right\}$$

nazywamy przestrzenią Musielaka-Orlicza.

Uwaga 4.3. *Jeśli* φ *nie zależy od pierwszej zmiennej, to przestrzeń Musielaka-Orlicza jest zwykłą przestrzenią Orlicza.*

Definicja 4.16 (warunek Δ_2 w przestrzeniach Musielaka-Orlicza)**.** *Niech* X *będzie przestrzenią Musielaka-Orlicza. Niech* $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$*. Powiemy, że* φ

spełnia warunek Δ_2, *gdy istnieje* $M \geqslant 1$, *istnieje* $h : X \to [0, +\infty)$, $h \in L^1(X)$ *takie, że dla dowolnego* $x \in X$ *(*μ*-prawie wszędzie) i dowolnego* $t \in \mathbb{R}_+$ *zachodzi* $\varphi(x, 2t) \leqslant M \cdot \varphi(x, t) + h(x)$.

Twierdzenie 4.2. *Niech* X *będzie przestrzenią Musielaka-Orlicza. Niech funkcja generująca Musielaka-Orlicza* $\varphi : X \times [0, +\infty)$ *będzie lokalnie całkowalna, tj.*

$$\forall A \in \Sigma \;\; \mu(A) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \forall d > 0 \; \int_A \varphi(t, d) d\mu(t) < +\infty.$$

Jeśli φ *spełnia warunek* Δ_2, *to* $\varrho(x_n) \to 0 \;\Leftrightarrow\; \varrho(2x_n) \to 0$ *przy* $n \to \infty$, *a więc spełniony jest warunek* Δ_2 *z definicji 4.4.*

Przykład 4.1 ([L], Lemat 2.2)**.** *Jeśli modular* ρ *ma własność* $\rho(x_n) \to 0 \Rightarrow \rho(2x_n) \to 0$ *przy* $n \to \infty$ *oraz* $\varrho(cx) \to \varrho(x)$ *przy* $c \to 1$ *dla dowolnego* $x \in X_\varrho$, *to* (X_ρ, ρ) *jest SF-przestrzenią.*

Lemat 4.1. *Jeśli* F *jest* F*-normą w* X, *to* (X, F) *jest SF-przestrzenią.*

Dowód. Wynika natychmiast z warunków definicji 4.5. □

4.2 Uogólnione twierdzenie Banacha o punkcie stałym w SF-przestrzeniach

Twierdzenie 4.3. *Niech* (X, F) *będzie SF-ograniczoną SF-przestrzenią. Niech* $T : X \to X$ *będzie takie, że*

$$\min\{F(T^j x - T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant N\} \leqslant \varphi(F(x - y)) \cdot F(x - y) \qquad \forall x, y \in X$$

przy pewnym $N \geqslant 1$ *oraz przy pewnej ciągłej funkcji* $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1]$ *takiej, że*

- $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$
- $\exists t_0 > 0,\ \lambda < 1\ \forall t \geqslant t_0 \quad \varphi(t) \leqslant \lambda.$

Wtedy $\forall x_0 \in X\ \exists \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ *takie, że*

- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jest ciągiem kawałkami syndetycznym i różnowartościowym,*
- $\{T^{b_n} x_0\}_{n=1}^{\infty}$ *jest ciągiem SF-Cauchy'ego.*

Dowód. Wybierzmy dowolne $x_0 \in X$ i niech $C := \sup\{F(x_0 - T^n x_0), n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Dowód przebiega podobnie jak w twierdzeniu 2.5: ponieważ przestrzeń X jest SF-ograniczona, więc jako ciąg $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ możemy wziąć cały zbiór $\mathbb{N}$. Wybieramy - podobnie jak w twierdzeniu 2.5 ciągi $\left\{i_n^{k_j}\right\}_{n=1}^{\infty}$ w ten sposób, że

$$F(T^{i_{n+1}^{k_j}} x_0 - T^{i_{n+1}^{k_j}+k_j} x_0) \leqslant \varphi(F(T^{i_n^{k_j}} x_0 - T^{i_n^{k_j}+k_j} x_0)) \cdot F(T^{i_n^{k_j}} x_0 - T^{i_n^{k_j}+k_j} x_0).$$

Określmy $z_n^{k_j} := F(T^{i_n^{k_j}} x_0 - T^{i_n^{k_j}+k_j} x_0)$. Tak jak w twierdzeniu 2.5 definiujemy $\{k\}^R$, $\{l \cdot N\}^{SR}$. Fakty 1-3 wykorzystane w dowodzie pozostają prawdziwe w tym przypadku, jako iż są natury wyłącznie kombinatorycznej. Podobnie definiujemy $\{\infty \cdot N + s\}^R$ oraz $\{\infty \cdot N\}^{SR}$. Fakty 4-5 również pozostają prawdziwe, gdyż są kombinatoryczne. Ciąg $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ będący kandydatem na spełniający tezę wybieramy jako $\{\infty \cdot N + s\}^R$ przy pewnym $s \in \{1, ..., N\}$, na mocy twierdzenia 2.3.

Pokażemy, że $\left\{T^{b_n} x_0\right\}$ jest ciągiem SF-Cauchy'ego. Dla dowodu niewprost załóżmy, że istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla dowolnego $q \in \mathbb{N}$ istnieją $m_q > n_q \geqslant q$ takie, że $F(T^{b_{n_q}} x_0 - T^{b_{m_q}} x_0) \geqslant \varepsilon$. Ciągi $\{m_q\}_{q=1}^{\infty}$ i $\{n_q\}_{q=1}^{\infty}$ wybierzmy jako rosnące. Dla pary b_{m_q}, b_{n_q} istnieje $m_0^q \in \mathbb{N}$ takie, że $b_{m_q}, b_{n_q} \in \left\{l_{m_0^q} \cdot N + s\right\}^R$. Niech m_0^q będzie najmniejsze możliwe. Wtedy dla dowolnego $q \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \leqslant F(T^{b_{m_q}} x_0 - T^{b_{n_q}} x_0) \\
&\quad = F((T^{b_{m_q}} x_0 - T^{b_{m_q}+(l_{m_0^q} \cdot N+s-b_{m_q})} x_0) - (T^{b_{n_q}} x_0 - T^{b_{n_q}+(l_{m_0^q} \cdot N+s-b_{n_q})} x_0)).
\end{aligned}$$

Wystarczy pokazać, że $F(T^{b_{m_q}} x_0 - T^{b_{m_q}+(l_{m_0^q} \cdot N+s-b_{m_q})} x_0) \to 0$ oraz $F(T^{b_{n_q}} x_0 - T^{b_{n_q}+(l_{m_0^q} \cdot N+s-b_{n_q})} x_0) \to 0$ przy $q \to \infty$. Wtedy na mocy z własności (2) oraz (4) SF-przestrzeni będzie $F(T^{b_{m_q}} x_0 - T^{b_{n_q}} x_0) \to 0$ przy $q \to \infty$, co doprowadzi do sprzeczności.

Wykażemy, że $F(T^{b_{m_q}}x_0 - T^{b_{m_q}+(l_{m_0^q}\cdot N+s-b_{m_q})}x_0) \to 0$. W drugim przypadku rozumowanie jest analogiczne. Dla dowodu niewprost załóżmy, że istnieje $\delta > 0$ oraz $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$ takie, że $F(T^{b_{m_{q_l}}}x_0 - T^{b_{m_{q_l}}+(l_{m_0^{q_l}}\cdot N+s-b_{m_{q_l}})}x_0) \geqslant \delta$, $l \in \mathbb{N}$. Ale $b_{m_{q_l}} \in \left\{l_{m_0^{q_l}} \cdot N + s\right\}^R$, zatem z definicji $\{k\}^R$ jest $l_{m_0^{q_l}} \cdot N + s \in \{k^j\}$ oraz $b_{m_{q_l}} \in \left\{i_n^{l_{m_0^{q_l}}\cdot N+s-b_{m_{q_l}}}\right\}_{n=0}^{\infty}$. Fakt 6 twierdzenia 2.5 pozostaje prawdziwy, zatem $n_l \to \infty$ przy $l \to \infty$. Oznaczmy

$$F_p^l := F(T^{i_p^{\left(l_{m_0^{q_l}}\cdot N+s-b_{m_{q_l}}\right)}}x_0 - T^{i_p^{\left(l_{m_0^{q_l}}\cdot N+s-b_{m_{q_l}}\right)}+\left(l_{m_0^{q_l}}\cdot N+s-b_{m_{q_l}}\right)}x_0,$$

dla $p = 0, ..., n_l$.

Zatem

$$\delta \leqslant F_{n_l}^l \leqslant \varphi(F_{n_l-1}^l)F_{n_l-1}^l \leqslant \cdots \leqslant \varphi(F_{n_l-1}^l)\cdots\varphi(F_0^l)F_0^l. \tag{4.1}$$

Z drugiej strony $F_p^l \leqslant C$ dla $p = 0, ..., n_l$. Zatem $\delta \leqslant F_{n_l}^l \leqslant F_0^l \leqslant C$, co oznacza, że $\varphi(F_p^l) \leqslant \sup\{\varphi(t), t \in [\delta, C]\} = \varphi(a) < 1$ przy pewnym $a \in [\delta, C]$, gdyż funkcja φ jest ciągła. Z tego wynika, że $F_{n_l}^l \leqslant [\varphi(a)]^{n_l} \cdot F_0^l \leqslant [\varphi(a)]^{n_l} \cdot C \to 0$ przy $l \to \infty$, co prowadzi do sprzeczności z 4.1. □

Twierdzenie 4.4. *Niech (X, F) będzie SF-ograniczoną SF-przestrzenią. Niech $T : X \to X$ będzie takie, że*

$$\min\{F(T^jx - T^jy),\ 1 \leqslant j \leqslant N\} \leqslant \varphi(F(x-y)) \cdot F(x-y) \qquad \forall x, y \in X$$

przy pewnym $N \geqslant 1$ oraz przy pewnej ciągłej funkcji $\varphi:\ [0,\infty) \to [0,1]$ takiej, że

- $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$
- $\exists t_0 > 0,\ \lambda < 1\ \forall t \geqslant t_0 \quad \varphi(t) \leqslant \lambda.$

Jeśli ponadto $\exists x_0 \in X\ \exists\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ takie, że

- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jest ciągiem kawałkami syndetycznym i różnowartościowym,*

- $\{T^{b_n}x_0\}_{n=1}^{\infty}$ *jest ciągiem SF-Cauchy'ego,*

to T ma punkt dokładnie jeden punkt stały przy pewnym $r \in \mathbb{N}$.

Dowód. Dowód przebiega analogicznie jak w twierdzeniach 2.6 oraz 2.7 z tą różnicą, że wszędzie gdzie we wspomnianych twierdzeniach jest wykorzystana odległość między dowolnym punktami $d(x, y)$ należy ją zastąpić przez $F(x - y)$. Wszystkie nierówności zachowują się, gdyż pozostałe fragmenty dowodów, jak również faktów pomocniczych, są czysto kombinatoryczne. □

Uwaga 4.4. *Analogicznie można w SF-przestrzeniach wykazać - tą samą metodą jak dla przestrzeni metrycznych - rezultaty z rozdziału 2.4 (stosując warunki 3,4,5 definicji 4.5, zastępujące warunek trójkąta w przypadku przestrzeni metrycznych).*

Niech (X, F) będzie SF-przestrzenią, zaś $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ wielowskaźnikiem spełniającym warunki $\alpha_1 > 0$, $\alpha_n > 0$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 2, ..., n-1$ oraz $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Definicja 4.17. *Odwzorowanie $T : X \to X$ nazywamy SF-α-Lipschitzowskim ze stałą $k \geqslant 0$, jeśli*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(T^i x - T^i y) \leqslant k \cdot F(x - y), \ \forall x, y \in X.$$

Definicja 4.18. *Mówimy, że odwzorowanie $T : X \to X$ jest SF-α-nierozszerzające (odpowiednio jest SF-α-kontrakcją), gdy T jest SF-α-Lipschitzowskie ze stałą $k \leqslant 1$ (odpowiednio $k < 1$).*

Zachodzi następujące

Twierdzenie 4.5. *Niech (X, F) będzie SF-ograniczoną SF-przestrzenią, $n \geqslant 1$, zaś $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, gdzie $\alpha_1 > 0$, $\alpha_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Niech $T : X \to X$*

spełnia warunek

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j F(T^j x - T^j y) \leqslant \varphi(F(x-y)) \cdot F(x-y) \qquad \forall x, y \in X$$

przy pewnej ciągłej funkcji $\varphi : \ [0,\infty) \to [0,1]$ *takiej, że*

- $\varphi(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0$
- $\exists t_0 > 0,\, \lambda < 1\ \forall t \geqslant t_0 \quad \varphi(t) \leqslant \lambda.$

Wtedy T ma dokładnie jeden punkt stały.

Dowód. Teza wynika natychmiast z 4.4 oraz faktu, że

$$\min\Big\{F(T^j x - T^j y),\ 1 \leqslant j \leqslant n\Big\} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F(T^j x - T^j y),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall x, y \in X.$$

□

Uwaga 4.5. *Na mocy lematu 4.1 twierdzenia 4.4, 4.5, a także rezultaty z rozdziału 2.4 pozostają prawdziwe w przestrzeniach modularnych spełniających warunek Δ_2.*

Do modularów, generowanych przez funkcje spełniające powyższe warunki Δ_2, można zastosować twierdzenia 4.4, 4.5, a także rezultaty z rozdziału 2.4. Może to być wygodniejsze w zastosowaniach, niż formułowanie warunków w języku F-normy Luxemburga, która jest zdefiniowana w niejawny sposób.

Bibliografia

[AL] A. G. Aksoy, G. Lewicki, *Modular spaces and K-widths*, Functional analysis (Trier, 1994), 1–10, de Gruyter, Berlin, 1996

[A] A. D. Arvanitakis, *A proof of the generalized Banach contraction conjecture*, Proc. of the Amer. Math. Soc. **131** (2003), 12:3647–3656, MR 1998170

[Ba] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstracts et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. **3** (1922), 133-181

[BK] L. P. Belluce, W. A. Kirk, *Fixed-Point Theorems for Certain Classes of Nonexpansive Mappings*, Proc. of the Amer. Math. Soc. **20** (1969), 141-146

[Brou1] L. Brouwer, *Ueber eineindeutige, stetige transformationen von flächen in sich*, Math. Ann. **69** (1910), 176–180

[Brou2] L. Brouwer, *Uber abbildungen von mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **70** (1912), 97-115

[Brow] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54** (1965), 1041-1044

[CG] E. Casini, K. Goebel, *Why and how much brouwer's fixed point theorem fails in noncompact setting?*, Milan J. Math. Vol **78** (2010), 371-394

[F] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton University Press, Princeton, 1981, MR 82j:28010

[G1] K. Goebel, *An elementary proof of the fixed-point theorem of Browder and Kirk*, Michigan Math. J. **16** (1969), 381-383

[G2] K. Goebel, *Concise course on fixed point theorems*, Yokohama Publishers, 2002

[G3] K. Goebel, *Notes on mean nonexpansive mappings*, Preprint

[G4] K. Goebel, *On the minimal displacement of points under lipschitzian mappings*, Pac. J. Math. **45** (1973), 151-163

[G5] K. Goebel, *Remarks on some problems in metric fixed point theory*, Preprint

[GP] K. Goebel, M. A. J. Pineda, *On a type of generalized nonexpansiveness*, Preprint

[GSi] K. Goebel, B. Sims, *Mean lipschitzian mappings*, Preprint

[GSz] K. Goebel, M. Szczepanik, *A problem concerning mappings with constant displacement*, Kyoto, Nonlinear analysis and convex analysis **1298** (2002), 135-140

[JS] J. R. Jachymski, J. D. Stein, Jr., *A minimum condition and some related fixed-point theorems*, J. Austral. Math. Soc. **66** (1999), 224-243

[JSS] J. R. Jachymski, B. Schroder, J. D. Stein, Jr., *A connection between fixed point theorems and tiling problems*, J. Combin. Theory **87** (1999), 273-286

[Kak] S. Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J. **8** (1941), 457–459

[Kan] R. Kannan, *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta Math. Soc. **60** (1968), 71-76, MR 0257837

[Ki] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly, **72** (1965), 1004-1006

[Kl] V. Klee, *Some topological properties of convex sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1955), 30-45

[L] G. Lewicki, *Bernstein's Lethargy Theorem in Metrizable Topological Linear Spaces*, Monatshefte für Math. **113.3** (1992), 213-226

[LS] P. K. Lin, Y. Sternfeld, *Convex sets with the Lipschitz fixed point property are compact*, Proc. of the Amer. Math. Soc. **93** (1985), 633-639

[MRS] J. Merryfeld, B. Rothschild, J. D. Stein, Jr., *An application of Ramsey's theorem to the Banach contraction principle*, Proc. of the Amer. Math. Soc. **130** (2001), 927-933, MR 2002h:54040

[MS] J. Merryfeld, J. D. Stein, Jr., *A generalization of the Banach contraction principle*, J. Math. Anal. Appl. **273** (2002) 112–120, MR 1933019 (2003g:54100)

[M] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Lecture Notes in Math. **1034**, Springer-Verlag (1983)

[P] H. Poincare, *Sur les courbes définies par les équations differentielles*, J. de Math. **2** (1886), 151-217

[S] J. D. Stein, Jr., *A systematic generalization procedure for fixed-point theorems*, Rocky Mountain J. of Math., **30** (2000): 735-754 (2), MR 2001i:54052

[T] A. Tarski, *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*, Pacific J. Math. **5** 1955, 285-309

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków
krzysztof.wesolowski@uj.edu.pl