UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
WYDZIAŁ FIZYKI, ASTRONOMII
I INFORMATYKI STOSOWANEJ

# Ewolucja pierwotnych fal grawitacyjnych w modelach kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a

## Zastosowania języków obliczeń symbolicznych

Krzysztof Głód

Rozprawa doktorska przygotowana pod kierunkiem
doktora habilitowanego Zdzisława A. Goldy

Kraków 2014

Autor niniejszej rozprawy dziękuje John Templeton Foundation, a także Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych w Krakowie za otrzymywane w latach 2011–2013 stypendium doktoranckie. Bez tego wsparcia przeprowadzenie badań, o których traktuje rozprawa, byłoby niezmiernie trudne.

*Dziękuję Sebastianowi Szybce za owocną współpracę w trakcie moich badań. Szczególnie wdzięczny jestem mojej rodzinie za nieocenione wsparcie podczas pisania tej pracy.*

# Spis treści

# Rozdział 1

# Wstęp

Praca ta jest poświęcona badaniom czasowej ewolucji zaburzeń modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a w postaci słabych fal grawitacyjnych. Jej podstawowym celem jest usystematyzowanie rozproszonych w literaturze wyników dotyczących tego tematu i ich rozszerzenie. Zawiera ona rezultaty poszukiwań nowych jawnych rozwiązań równania ewolucji fal grawitacyjnych dla modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a wypełnionych różnorodnymi płynami kosmicznymi, z obecną krzywizną przestrzenną i stałą kosmologiczną. Ponadto przedstawiono w niej przykłady nakreślające potencjalne zastosowania uzyskanych rozwiązań. Od strony praktycznej w pracy są eksplorowane i rozwijane techniki znajdowania analitycznych rozwiązań zwyczajnych równań różniczkowych drugiego rzędu. Wykorzystywane są w niej klasyczne metody fizyki matematycznej, które są sprawnie stosowane dzięki wsparciu nowoczesnych systemów algebry komputerowej. W ten sposób otrzymano szereg nowych wyników, które zebrano w dołączonych do pracy dodatkach.

Druga część rozprawy wprowadza czytelnika do zagadnienia małych zaburzeń modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a. Prezentuje ona historię i aktualny stan stosowanych podejść do tej tematyki. Zostaje w niej przedstawione wyprowadzenie ogólnych równań perturbacyjnych w ujęciu Lifshitza i zaproponowany przez niego standardowy podział zaburzeń na trzy typy. Następnie podane są równania propagacji zaburzeń tensorowych, które posiadają interpretację słabych fal grawitacyjnych, a z równań tych wywiedzione zostaje równanie opisujące ewolucję fal grawitacyjnych w czasie. Ostatni podrozdział tej części pokazuje, jak można w sposób kowariantny zdefiniować zaburzenia w postaci słabych fal grawitacyjnych.

Część trzecia pracy zawiera znalezione nowe rozwiązania równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych. Najpierw wymienione zostały rozwiązania znane do tej pory w literaturze. Następnie ukazano, jak poprzez odpowiednią zamianę zmiennych i wykorzystanie ansatzu Hermite'a–Darboux znaleźć wszystkie liouville'owskie rozwiązania tego równania dla szczególnie interesujących modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a. Rozważane są modele zawierające stałą kosmologiczną, przestrzennie zakrzywione, wypełnione pyłem, promieniowaniem, ścianami domenowymi, materią ultralekką lub sztywną. Złożone całki pojawiające się w uzyskanych rozwiązaniach są wyliczone w oddzielnym podrozdziale.

W rozdziale czwartym omówione zostały dwie sytuacje, w których jawne rozwiązania równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych znajdują praktyczne zastosowanie. Pierwszą z nich jest zjawisko kreacji grawitonów na przejściu fazowym zwane efektem Grishchuka. Drugą jest zaprezentowanie działania schematu uśredniania małych zaburzeń Greena–Walda na przykładzie modelu kosmologicznego zawierającego słabą falę grawitacyjną o określonej długości fali.

Pracę kończy rozdział podsumowujący, który zestawia główne uzyskane rezultaty badań. Po nim następuje ciąg dodatków zawierających podstawowe wiadomości, jak również opracowania bardziej szczegółowych wyników. Dodatek pierwszy jest poświęcony równaniom różniczkowym klasy Fuchsa i wprowadza definicje związane z metodą Frobeniusa rozwiązywania tego typu równań różniczkowych. W drugim dodatku rozważane są równania różniczkowe zwyczajne posiadające nieregularne punkty osobliwe oraz ich lokalne rozwiązania w pobliżu tych punktów nazywane rozwiązaniami Thomégo. Trzeci dodatek traktuje o pewnych szczególnych tożsamościach przekształcających całkę eliptyczną trzeciego rodzaju, a opartych o zamianę charakterystyki. W dodatku ostatnim przedstawione i opisane zostały specjalne narzędzia służące do obsługi transformacji równań różniczkowych, które na potrzeby badań zostały stworzone w środowisku obliczeń symbolicznych Mathematica.

Na koniec wstępu dodajmy, że jednym z ważniejszych nieporuszonych w tej rozprawie tematów są ścisłe rozwiązania równań Einsteina reprezentujące fale grawitacyjne, niekoniecznie słabe, propagujące się w czasoprzestrzeni Robertsona–Walkera. Znanych jest niewiele rozwiązań tego typu, między innymi przykłady Bičáka i Griffithsa [11] dla modeli wypełnionych materią sztywną oraz przykład Senovilli i Very [154] dla modelu wypełnionego promieniowaniem. Analitycznie są to bardzo złożone rozwiązania. Badania ich praktycznych zastosowań wymagają stworzenia bardziej efektywnych platform do prowadzenia obliczeń tensorowych niż te znane obecnie.

# Rozdział 2

# Zaburzenia modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a

W tej części pracy będziemy rozważać małe zaburzenia modeli kosmologicznych[1] Friedmanna–Lemaître'a. Zaczniemy od nakreślenia głównych koncepcji leżących u podstaw badań problemu zaburzeń w kosmologii i prezentacji różnych stosowanych podejść do tego zagadnienia. Następnie, stosując podejście Lifshitza, przejdziemy do wyprowadzenia ogólnych równań perturbacyjnych dla małych zaburzeń modeli Friedmanna–Lemaître'a. W synchronicznym, współporuszającym się z materią układzie współrzędnych zdefiniujemy zmienne perturbacyjne na hiperpowierzchniach stałego czasu w modelu tła i omówimy, jak zachowują się one pod działaniem transformacji cechowania. Przedstawimy też wówczas standardowy podział zaburzeń na skalarne, wektorowe i tensorowe.

Dalej będziemy zajmować się pierwotnymi falami grawitacyjnymi, rozumianymi jako swobodne zaburzenia tensorowe modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a. Podamy ich równania propagacji i równanie ich czasowej ewolucji. Na koniec nawiążemy do kowariantnego podejścia perturbacyjnego Hawkinga, wskazując sposób wyprowadzenia równań propagacji słabych fal grawitacyjnych niewymagający wyboru układu współrzędnych.

[1]Przez model kosmologiczny będziemy rozumieć parę złożoną z pola metrycznego czasoprzestrzeni i pola przepływu materii na zadanej rozmaitości. Koncepcja ta jest zaczerpnięta z książki Wainwrighta i Ellisa [183].

## 2.1 Podejście perturbacyjne w kosmologii

Pierwsze próby opisu zaburzeń kosmologicznych były prowadzone przy wykorzystaniu formalizmu hydrodynamiki newtonowskiej. W podejściu tym rozważano rozszerzający się Wszechświat euklidesowy, wypełniony materią modelowaną przez bezciśnieniowy płyn doskonały. Podstawowe równania perturbacyjne dla zaburzeń gęstości materii, ich proste rozwiązania oraz interpretację fizyczną podał Bonnor [13, 14]. Główną motywacją jego pracy, jak również jego następców, było stworzenie podwalin teorii formowania się galaktyk. Rozszerzeniem tego formalizmu była praca Irvine'a [87], który w przybliżeniu newtonowskim badał modele relatywistyczne. Obecnie podejście newtonowskie ma już znaczenie tylko historyczne.

Pionierem badań modeli kosmologicznych w oparciu o rachunek perturbacyjny w ramach relatywistycznej teorii grawitacji był Lifshitz. W swojej pracy [104] analizował on grawitacyjną stabilność ekspandujących modeli Friedmanna–Lemaître'a. Wyprowadził równania perturbacyjne w reżimie liniowym w cechowaniu synchronicznym i dokonał podziału zaburzeń grawitacyjnych na skalarne, wektorowe i tensorowe, które powiązał odpowiednio z zaburzeniami gęstości materii, zaburzeniami pola prędkości materii oraz słabymi falami grawitacyjnymi. Wykazał, że zaburzenia te są albo tłumione z czasem, albo też narastają, lecz w tempie niewystarczającym do uformowania galaktyk. Zwrócił również uwagę, że swoboda wyboru cechowania powoduje występowanie wśród rozwiązań równań perturbacyjnych zaburzeń fikcyjnych, które nie przedstawiają fizycznych zmian czasoprzestrzeni.

W kolejnych pracach [105, 106] Lifshitz wraz z Khalatnikovem rozszerzyli oryginalne podejście Lifshitza, dokonując przy okazji drobnych poprawek. Nowym wynikiem było stwierdzenie niestabilności względem zaburzeń modeli w fazie kontrakcji. W tych i w poprzedniej pracy rozważane były modele bez stałej kosmologicznej, z dodatnią lub ujemną krzywizną, wypełnione materią w postaci pyłu lub promieniowania. Modele przestrzennie płaskie zostały skrótowo potraktowane w książce Landaua i Lifshitza [102].

W ujęciu Lifshitza główną zmienną perturbacyjną jest poprawka do metryki, która sama w sobie nie posiada znaczenia fizycznego. Bezpośrednim pomiarom podlegają bowiem dopiero drugie pochodne metryki, czyli krzywizna czasoprzestrzeni. W pracy [76] Hawking zaproponował więc inne podejście, w którym rozważa zaburzenia tensora Riemanna. W swoich rozważaniach wykorzystał zlinearyzowane równania hydrodynamiki relatywistycznej zebrane przez Ehlersa w pracy [44]. Pozwoliło mu to zbadać jakościowo możliwy wpływ lepkości na absorpcję pierwotnych fal grawitacyjnych.

Jednym z pierwszych ważnych zastosowań teorii zaburzeń kosmologicznych była praca Sachsa i Wolfa [151]. Scałkowali oni równania zaburzeń dla ekspandujących płaskich modeli Friedmanna–Lemaître'a wypełnionych pyłem i promieniowaniem. Dzięki temu mogli również znaleźć geodetyki zerowe w modelach zaburzonych i w konsekwencji podać teoretyczne oszacowania dla amplitudy fluktuacji kosmicznego promieniowania tła. Za źródła anizotropii przyjęli oni zmiany potencjału grawitacyjnego we wczesnym Wszechświecie oraz prędkości własne materii na powierzchni ostatniego rozproszenia. Artykuł ten stanowi podstawę współczesnych metod analizy kosmicznego promieniowania tła, począwszy od prac Ma i Bertschingera [111] oraz Hu i Sugiyamy [84, 85], aż po niedawne prace Pitrou, Uzana i Bernardeau [141, 142].

Dla teorii zaburzeń czasoprzestrzeni z matematycznego punktu widzenia szczególnie ważną była praca Stewarta i Walkera [163]. Rozszerzyli oni i sprecyzowali lemat Sachsa [150] wymieniający warunki, przy których zmienne perturbacyjne będą niezmiennicze względem transformacji cechowania. Stwierdzili, że perturbacje danej wielkości, opisującej pole fizyczne, są niezmiennicze względem cechowania tylko wtedy, jeśli w czasoprzestrzeni niezaburzonej wielkość ta znika, jest stałym polem skalarnym, bądź jest liniową kombinacją iloczynów delt Kroneckera ze stałymi współczynnikami. W szczególności niezmiennicze względem cechowania są same równania Einsteina, a także równania stanu w danym modelu. Stewart i Walker zauważyli jednak, że wynik ten w ogólności ogranicza możliwość perturbacyjnego badania czasoprzestrzeni tylko do takich przypadków, w których niezmienniczych zmiennych perturbacyjnych jest wystarczająco wiele, by w zupełności opisać, lub równoważnie skonstruować, dowolne zaburzenie w danej czasoprzestrzeni.

Do końca lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku fizycy wypracowali więc matematycznie ścisłą definicję zaburzenia czasoprzestrzeni, zgodną z intuicyjnym i powszechnie stosowanym pojęciem „bycia fizycznie znaczącą", czyli niezależną od wyboru układu współrzędnych. Ponadto zostały nakreślone dwa technicznie odmienne podejścia do praktycznego budowania teorii zaburzeń relatywistycznych: podejście Lifshitza, bazujące na poprawkach do tensora metrycznego oraz podejście Hawkinga, oparte na poprawkach do tensora krzywizny. Oba wymagały wówczas daleko idących uzupełnień. Studia nad małymi zaburzeniami czasoprzestrzeni w ramach ogólnej teorii względności były wówczas motywowane dwoma podstawowymi potrzebami. Pierwszą były badania zjawisk astrofizycznych o małej amplitudzie, drugą natomiast były analizy stabilności czasoprzestrzeni. Stąd istniała konieczność stworzenia precyzyjnej teorii opisującej relatywistyczne perturbacje.

Zasadniczym problemem podejścia Lifshitza była zależność zdefiniowanych przez niego zaburzeń skalarnych i wektorowych,[2] składających się na poprawkę do metryki, względem transformacji cechowania. Lifshitz mógł z uzyskanych rozwiązań wyseparować i odrzucić niefizyczne mody zaburzeń dzięki temu, że wyznaczył ich dokładną formę funkcyjną dla cechowania synchronicznego, którym posługiwał się w obliczeniach. Takie rozwiązanie problemu, mimo że jest poprawne, nie jest w ogólności satysfakcjonujące, ponieważ przy bardziej złożonym wyborze cechowania wyeliminowanie modów niefizycznych może być kłopotliwe. Przegląd nieporozumień i błędnych interpretacji jakie mogą stąd wyniknąć został wykonany przez Pressa i Vishniaca [144], a także później przez Gerocha i Lindbloma [61]. Metoda ich uniknięcia poprzez uogólnienie twierdzenia Sachsa–Wolfe'a i sprowadzenie równań perturbacyjnych do postaci równania d'Alemberta została zaproponowana przez Czaję [31],[3] który oparł swe rozważania na wynikach prac Goldy, Woszczyny i Zawady [65, 66].

Wyjście z tej sytuacji zaproponował Bardeen [8], który pokazał, jak z zależnych od cechowania zmiennych, poprzez wzięcie ich odpowiednich kombinacji liniowych, zbudować zmienne niezmiennicze. Swoje rozważania oparł na pomysłach zawartych w pracy Gerlacha i Sengupty [60] dotyczącej zaburzeń czasoprzestrzeni przestrzennie izotropowych i jednorodnych. Do zaburzeń metryki dołączył on również zaburzenia tensora energii-pędu materii. Poprzez wykonaną konstrukcję wykazał, że jego zbiór niezmienniczych wielkości opisujących zaburzenia jednorodnych i izotropowych modeli kosmologicznych jest zupełny. Dla tych zmiennych wyprowadził równania perturbacyjne, które w swojej formie okazały się być prostsze od równań Lifshitza. Wyniki Bardeena oznaczały, że dla modeli Friedmanna–Lemaître'a teoria perturbacji w sensie Stewarta–Walkera jest możliwa do zbudowania.

W swoich rozważaniach Bardeen posługiwał się zaproponowanym przez Lifshitza rozkładem zaburzeń na skalarne, wektorowe i tensorowe, jawnie rozwijając zaburzenia poszczególnych składowych metryki względem funkcji własnych operatora Laplace'a (działającego na hiperpowierzchniach stałego czasu) odpowiednich typów. W pracy [162] Stewart zwrócił uwagę, że dla konstrukcji zmiennych niezmienniczych zabieg ten był zupełnie niepotrzebny i utrudnił jedynie odbiór kluczowych rezultatów. Używając technik kowariantnego rozkładu pól tensorowych w przestrzeniach o stałej krzywiźnie na części skalarne, wektorowe i tensorowe znanych z prac Yorka [187, 188], Stewart przedstawił wyniki Bardeena w zwięzłej formie.

[2]Definicja zaburzeń tensorowych gwarantuje ich niezmienniczość względem transformacji cechowania.

[3]Wynik ten nie obejmuje przypadku materii bezciśnieniowej.

Niezmiennicze względem cechowania wielkości perturbacyjne Bardeena mają charakter niegeometryczny, czyli są zdefiniowane względem konkretnego, w tym przypadku synchronicznego, współporuszającego się z materią układu współrzędnych. W związku z tym nie posiadają one prostej interpretacji fizycznej. Posługując się nimi można jednak badać wielkości geometryczne o bezpośrednim znaczeniu fizycznym. Pomysł ten zrealizował Goode w pracy [67], w której ustanowił związki pomiędzy zmiennymi Bardeena a różnymi wielkościami geometrycznymi opisującymi kinematykę ruchu materii oraz tensor krzywizny. Między innymi wyprowadził relację pomiędzy zaburzeniami w postaci fal grawitacyjnych a tensorem Cottona–Yorka na hiperpowierzchniach stałego czasu. Praca Goodego jest swego rodzaju łącznikiem pomiędzy podejściem Lifshitza a podejściem Hawkinga.

Praca Stewarta i Walkera istotnie wsparła podejście Hawkinga do rachunku zaburzeń kosmologicznych, w którym za zmienne perturbacyjne przyjmuje się wielkości kinematyczne i dynamiczne opisujące materię, a które znikają w modelu niezaburzonym. Pewne znaczenie dla popularyzacji tego podejścia, a także samego sformułowania Ehlersa hydrodynamiki relatywistycznej, miały wykłady Ellisa [47]. Można w nich znaleźć systematyczne porównanie hydrodynamiki relatywistycznej i newtonowskiej, ze wskazaniem analogii i różnic pomiędzy nimi.

W pracy Hawkinga zwraca uwagę niekonsekwentne potraktowanie zaburzeń gęstości, do opisu których nadal używany jest kontrast gęstości — wielkość, która nie jest niezmiennicza względem wyboru cechowania. Olson [131] zauważył, że w przestrzennie płaskich modelach Friedmanna–Lemaître'a za niezmienniczą wielkość charakteryzującą zaburzenia gęstości można przyjąć lokalną krzywiznę. Jego pomysł na modele zakrzywione rozszerzyli Woszczyna i Kułak [186], posługując się przestrzennymi gradientami gęstości energii i ekspansji, które znikają w modelach niezaburzonych.

Systematyczne potraktowanie zaburzeń kosmologicznych w oparciu o idee zawarte w pracy Stewarta i Walkera zaproponowali dopiero Ellis, Bruni i Hwang w serii prac [49, 51, 50]. Opisali oni perturbacje poprzez niezmiennicze względem cechowania zmienne, których definicje są dodatkowo kowariantne. Dzięki temu ich zmienne posiadają prostą interpretację fizyczną w języku niejednorodności i anizotropii modelu. Proces linearyzacji przebiega tu zasadniczo odwrotnie niż w podejściu Lifshitza. Kowariantny charakter zmiennych perturbacyjnych pozwala wyprowadzić ścisłe równania ich ewolucji w ramach formalizmu Ehlersa–Ellisa. Równania te można następnie linearyzować względem wybranego modelu tła, zachowując przy tym pełną kontrolę nad fizycznymi konsekwencjami tej operacji. W pracy [17] Bruni, Dunsby i Ellis porównali podejścia Lifshitza i Hawkinga, stwierdzając, że są one sobie równoważne. Ponadto pokazali oni, że w świetle teorii kowariantnej również zmiennym Bardeena można nadać naturalne, fizyczne i geometryczne znaczenie, nawet bez konieczności specyfikowania przy tym cechowania.

Kowariantna teoria zaburzeń, wolna od problemów związanych z wyborem cechowania, szybko stała się popularna i znalazła zastosowanie w wielu klasycznych zagadnieniach kosmologicznych. Bruni, Ellis i Dunsby [18] zastosowali ją do analizy zaburzonych modeli Wszechświata wypełnionego polem skalarnym, natomiast Dunsby, Bruni i Ellis [38, 41] do modeli wielopłynowych, a Dunsby [39] do modeli anizotropowych. Szczegółową analizę fal grawitacyjnych w kontekście kosmologicznym przeprowadzili Dunsby, Bassett i Ellis [40]. Maartens, Ellis i Siklos [112] wskazali warunki konieczne dla istnienia fal grawitacyjnych w modelach kosmologicznych, a ich podejście przeformułowali w języku spinorów Pareja i MacCallum [135]. Ponadto Hogan i O'Shea [81, 82, 134] badali propagację fal grawitacyjnych niosących dowolną informację w modelach izotropowych i dokonali porównania swoich wyników z podejściem Bardeena. Tsagas i Barrow [172, 173] przeanalizowali natomiast zachowanie perturbacji kosmologicznych w obecności pierwotnych pól magnetycznych. Wreszcie kowariantna teoria zaburzeń została wykorzystana przez Challinora i Lasenby'ego [27, 26] do analizy anizotropii i polaryzacji kosmicznego promieniowania tła.

Wspomniane wyżej prace ograniczały się do rozwijania teorii zaburzeń tylko w pierwszym rzędzie rachunku perturbacyjnego. Jednak podejmowane są również wysiłki, aby rozszerzyć teorię do drugiego i wyższych rzędów, czym zajmowali się na przykład Bruni *et. al* [19], Noh i Hwang [128], Clarkson [29] oraz Nakamura w serii prac [122, 123, 124], a także ostatnio Uggla i Wainwright [179, 180]. Trudności obliczeniowe wynikające ze złożoności tego zagadnienia w klasycznym podejściu motywują do dalszych poszukiwań alternatywnych ujęć teorii zaburzeń kosmologicznych. Jednym z ciekawszych jest formalizm zaproponowany przez Giesela *et al.* [62, 63] oparty na ideach zawartych w pracy Browna i Kuchařa [16]. Głównym jego celem jest przygotowanie teorii zaburzeń dowolnego rzędu dla pyłowych modeli kosmologicznych, która mogłaby następnie posłużyć do badania ich stabilności.

Wśród wczesnych prac podsumowujących teorię zaburzeń kosmologicznych i jej zastosowania warte wspomnienia są prace Harrisona [75], Kodamy i Sasakiego [96], Mukhanova, Feldmana i Brandenbergera [121] oraz Bertschingera [10]. Z późniejszych najważniejsze to prace Brandenbergera [15], Tsagasa, Challinora i Maartensa [174], Malika i Wandsa [113] oraz Uggli i Wainwrighta [177, 178], a także Novellego, Bittencourta i Salima [129]. Teoria zaburzeń kosmologicznych w obecnym kształcie jest uważana za dojrzałą dziedzinę nauki, na gruncie której z powodzeniem można wyjaśniać własności obserwowanego Wszechświata.

## 2.2 Ogólne równania perturbacyjne

W tym podrozdziale przedstawimy wyprowadzenie ogólnych równań perturbacyjnych dla zaburzeń modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a. Przeprowadzimy je, wybierając formalizm perturbacyjny Lifshitza. Czynimy tak przede wszystkim dlatego, że w naturalny sposób oferuje on wygodną do późniejszego opisu fal grawitacyjnych zmienną perturbacyjną. Zmienna ta jest bezpośrednio powiązana z metryką czasoprzestrzeni i z konstrukcji jest niezmiennicza względem cechowania. Podejście Hawkinga ma wprawdzie tę zaletę, że pozwala badać ogólniejsze cechy modeli kosmologicznych zawierających zaburzenia, nie jest to jednak obecnym celem naszych rozważań. Dodatkowym argumentem przemawiającym za wyborem podejścia Lifshitza jest możliwość bezpośredniego wglądu w kształt metryki zaburzonego modelu, co ma istotne znaczenie na przykład dla badania wpływu zaburzeń na obserwacje kosmologiczne.

Zaburzenie modelu kosmologicznego oznacza zaburzenie wszystkich pól i kowariantnych równań charakteryzujących dany model. Rozważmy więc pewną czasoprzestrzeń, którą nazwiemy czasoprzestrzenią zaburzoną, o metryce $g_{\mu\nu}$ i załóżmy istnienie pewnej klasy układów współrzędnych $\{x^\nu\}$, w których metryka tej zaburzonej czasoprzestrzeni daje się zapisać jako[4]

$$g_{\mu\nu} = \overline{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

gdzie wielkość $\overline{g}_{\mu\nu}$, dla której definiujemy

$$\overline{g}_{\mu\nu} = \overline{g}_{\nu\mu}, \qquad \overline{g}^{\nu\alpha}\overline{g}_{\mu\alpha} = \delta_\mu{}^\nu, \tag{2.2}$$

ze względu na te właśnie relacje będziemy nazywać metryką czasoprzestrzeni niezaburzonej (tła), natomiast wielkość $h_{\mu\nu}$ o własnościach

$$h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll |\overline{g}_{\mu\nu}|, \qquad |\partial_\lambda h_{\mu\nu}| \ll |\partial_\lambda \overline{g}_{\mu\nu}|, \tag{2.3}$$

nazwiemy poprawką do metryki (zaburzeniem). Zauważmy w tym miejscu, że z powyższych warunków wynika

$$g^{\mu\nu} = \overline{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \tag{2.4}$$

Postulowany rozkład metryki nie jest niezmienniczy względem dowolnej zamiany współrzędnych. Jednakże zamiany współrzędnych w obrębie zakładanej

[4]Stosujemy konwencje zapisu tensorowego używane w książce Misnera, Thorne'a i Wheelera [118].

klasy układów współrzędnych będą z założenia zachowywać formę rozkładu metryki zaburzonej czasoprzestrzeni. Należą do nich infinitezymalne zamiany współrzędnych, nazywane również transformacjami cechowania, postaci

$$x^\nu \longrightarrow x^\nu - \xi^\nu, \qquad |\xi^\nu| \ll |x^\nu|, \qquad |\partial_\mu \xi^\nu| \ll |\delta_\mu{}^\nu|, \tag{2.5}$$

gdzie infinitezymalne pole wektorowe $\xi^\nu$ jest nazywane generatorem transformacji cechowania. Istotnie, pod działaniem transformacji (2.5) forma rozkładu metryki (2.1) zostaje zachowana, ponieważ wówczas

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu, \tag{2.6}$$

co przy zakładanym rozkładzie metryki na tło i zaburzenie daje

$$\overline{g}_{\mu\nu} \longrightarrow \overline{g}_{\mu\nu}, \qquad h_{\mu\nu} \longrightarrow h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu. \tag{2.7}$$

Wynik ten jednocześnie oznacza, że poprawka do metryki nie jest wielkością niezmienniczą względem wyboru cechowania. Problem ten dotyczy również innych wielkości perturbacyjnych, które są poprawkami do pól nieznikających w modelu tła. Takie wielkości perturbacyjne są niefizyczne, ponieważ zawierają w sobie mody związane z wyborem cechowania. Zaburzając model kosmologiczny, nie jesteśmy w stanie zachować niezmienniczości względem cechowania wszystkich wprowadzanych wielkości perturbacyjnych. Aby unikać potencjalnie błędnych interpretacji, należy konsekwentnie wnioskować tylko na podstawie wyników uzyskiwanych dla wielkości perturbacyjnych niezmienniczych względem cechowania.

Wracając do warunków (2.3) narzucanych na poprawkę do metryki zauważmy, że traktowanie pochodnych poprawki w sposób równorzędny z samą poprawką jest charakterystyczną cechą liniowego podejścia perturbacyjnego. Zagadnieniu nadaje się wówczas interpretację badania w zadanej czasoprzestrzeni o metryce $\overline{g}_{\mu\nu}$ propagacji pola tensorowego $h_{\mu\nu}$, które to pole z założenia nie ma wpływu na dynamikę czasoprzestrzeni. Jest to istota tak zwanego przybliżenia słabego pola grawitacyjnego [118]. Aby badać zwrotny wpływ małych zaburzeń na globalną strukturę czasoprzestrzeni, konieczne jest odejście od tych restrykcyjnych założeń. Tego typu nieliniowy formalizm perturbacyjny został ostatnio zaproponowany przez Greena i Walda [69], którzy zaadaptowali i rozszerzyli podejście Burnetta [23] do zaburzeń wysokich częstotliwości.

Ogólne równania perturbacyjne dla małych zaburzeń modeli Friedmanna–Lemaître'a wyprowadzimy, dokonując rozwinięcia równań Einsteina dla tych modeli względem wielkości $h_{\mu\nu}$ opisującej zaburzenia ich geometrii oraz innych wielkości charakteryzujących kinematykę i dynamikę materii wypełniającej te modele. W rozwinięciach będziemy zachowywać wyrazy co najwyżej pierwszego rzędu. Zaznaczamy ponadto, że indeksy wielkości tensorowych zdefiniowanych dla czasoprzestrzeni tła, w tym małych poprawek umownie traktowanych jako wielkości tensorowe na tejże czasoprzestrzeni, są podnoszone i opuszczane przy użyciu metryki tła.

Pole prędkości materii w modelu zaburzonym opisuje jednostkowy, czasowy wektor $u_\nu$, który przy przyjętych założeniach o małości zaburzeń podlega podobnemu jak metryka rozkładowi

$$u_\nu = \overline{u}_\nu + v_\nu, \tag{2.8}$$

gdzie przez $\overline{u}_\nu$ będziemy oznaczać niezaburzone pole prędkości materii w modelu tła, dla którego definiujemy

$$\overline{u}^\alpha \overline{u}_\alpha = -1, \tag{2.9}$$

natomiast o poprawce $v_\nu$ zakładamy

$$|v_\nu| \ll |\overline{u}_\nu|, \qquad |\partial_\mu v_\nu| \ll |\partial_\mu \overline{u}_\nu|. \tag{2.10}$$

Zwracamy uwagę, że z warunków tych wynika

$$u^\nu = \overline{u}^\nu + v^\nu - \overline{u}^\alpha h^\nu{}_\alpha. \tag{2.11}$$

Ponadto, korzystając z warunków normalizacyjnych dla pól $u^\nu$ i $\overline{u}^\nu$, otrzymujemy związek

$$\overline{u}^\alpha v_\alpha = \frac{1}{2} \overline{u}^\beta \overline{u}^\alpha h_{\beta\alpha}, \tag{2.12}$$

który określa rzut zaburzenia prędkości na prędkość materii w modelu tła. Tensor rzutujący na chwilowe hiperpowierzchnie spoczynkowe materii w modelu zaburzonym

$$P_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}, \tag{2.13}$$

przybiera w związku z powyższym postać

$$P_{\mu\nu} = \overline{P}_{\mu\nu} + \overline{u}_\mu v_\nu + \overline{u}_\nu v_\mu + h_{\mu\nu}, \tag{2.14}$$

gdzie przez $\overline{P}_{\mu\nu}$ oznaczamy tensor rzutowy w modelu tła.

Tempo zmian pola prędkości materii jest charakteryzowane przez pochodną kowariantną prędkości, która przy wprowadzonych rozkładach daje się zapisać jako

$$\begin{aligned} \nabla_\mu u_\nu = \overline{\nabla}_\mu \overline{u}_\nu + \overline{\nabla}_\mu v_\nu + \frac{1}{2}\big(&\overline{u}^\alpha \overline{\nabla}_\alpha h_{\mu\nu} - \overline{\nabla}_\mu (\overline{u}^\alpha h_{\nu\alpha}) - \overline{\nabla}_\nu (\overline{u}^\alpha h_{\mu\alpha}) \\ &+ (\overline{\nabla}_\mu \overline{u}^\alpha) h_{\nu\alpha} + (\overline{\nabla}_\nu \overline{u}^\alpha) h_{\mu\alpha}\big), \end{aligned} \tag{2.15}$$

gdzie $\overline{\nabla}_\nu$ jest pochodną kowariantną kompatybilną z metryką tła $\overline{g}_{\mu\nu}$. Szczegółowe własności ruchu materii opisywane są poprzez wielkości kinematyczne, zdefiniowane następująco

$$\eta_\nu = u^\beta P_\nu{}^\alpha \nabla_\beta u_\alpha, \tag{2.16a}$$

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(P_\mu{}^\beta P_\nu{}^\alpha - P_\nu{}^\beta P_\mu{}^\alpha)\nabla_\beta u_\alpha, \tag{2.16b}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \Big(\frac{1}{2}(P_\mu{}^\beta P_\nu{}^\alpha + P_\nu{}^\beta P_\mu{}^\alpha) - \frac{1}{3}P_{\mu\nu}P^{\beta\alpha}\Big)\nabla_\beta u_\alpha, \tag{2.16c}$$

$$\theta = P^{\beta\alpha}\nabla_\beta u_\alpha, \tag{2.16d}$$

gdzie $\eta_\nu$ jest wektorem tempa przyspieszenia, $\omega_{\mu\nu}$ tensorem tempa wirowania, $\sigma_{\mu\nu}$ tensorem tempa ścinania, a $\theta$ skalarem tempa ekspansji materii. Pochodna kowariantna prędkości materii wyraża się przez nie następująco

$$\nabla_\mu u_\nu = -u_\mu \eta_\nu + \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}P_{\mu\nu}\theta. \tag{2.17}$$

Modelami tła, których zaburzenia chcemy badać, są modele kosmologiczne Friedmanna–Lemaître'a, dla których jedyną nieznikającą wielkością kinematyczną jest ekspansja. Oznaczając ją przez $\overline{\theta}$, dla prędkości materii niezaburzonej mamy

$$\overline{\nabla}_\mu \overline{u}_\nu = \frac{1}{3}\overline{P}_{\mu\nu}\overline{\theta}. \tag{2.18}$$

W związku z tym, zgodnie z liniowym podejściem perturbacyjnym, dla modelu zaburzonego zakładamy rozkład ekspansji

$$\theta = \overline{\theta} + \delta\theta, \qquad |\delta\theta| \ll |\overline{\theta}|, \qquad |\partial_\nu \delta\theta| \ll |\partial_\nu \overline{\theta}|, \tag{2.19}$$

gdzie wielkość $\delta\theta$ nazywamy zaburzeniem ekspansji, a o pozostałych wielkościach kinematycznych ($\eta_\nu$, $\omega_{\mu\nu}$, $\sigma_{\mu\nu}$) i ich pochodnych zakładamy, że są małe. Poszczególne wielkości kinematyczne wyrażają się następująco poprzez zaburzenia prędkości i metryki

$$\eta_\nu = (\overline{u}^\beta \overline{P}_\nu{}^\alpha - \overline{P}_\nu{}^\beta \overline{u}^\alpha)\overline{\nabla}_\beta v_\alpha, \tag{2.20a}$$

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\overline{P}_\mu{}^\beta \overline{P}_\nu{}^\alpha - \overline{P}_\nu{}^\beta \overline{P}_\mu{}^\alpha)\overline{\nabla}_\beta v_\alpha, \tag{2.20b}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu\nu} = {} & \frac{1}{2}(\overline{P}_\mu{}^\beta \overline{P}_\nu{}^\alpha + \overline{P}_\nu{}^\beta \overline{P}_\mu{}^\alpha - 2\overline{u}_\mu \overline{u}_\nu \overline{u}^\beta \overline{u}^\alpha)\overline{\nabla}_\beta v_\alpha \\ & + \frac{1}{2}\big(\overline{u}^\alpha \overline{\nabla}_\alpha h_{\mu\nu} - \overline{P}_\mu{}^\beta \overline{\nabla}_\nu(\overline{u}^\alpha h_{\beta\alpha}) - \overline{P}_\nu{}^\beta \overline{\nabla}_\mu(\overline{u}^\alpha h_{\beta\alpha})\big) \\ & - \frac{1}{3}\overline{P}_{\mu\nu}\Big(\overline{\nabla}^\alpha v_\alpha - \overline{\nabla}^\beta(\overline{u}^\alpha h_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}\overline{u}^\beta \overline{\nabla}_\beta h^\alpha{}_\alpha\Big),\end{aligned} \tag{2.20c}$$

$$\delta\theta = \overline{\nabla}^\alpha v_\alpha - \overline{\nabla}^\beta(\overline{u}^\alpha h_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}\overline{u}^\beta \overline{\nabla}_\beta h^\alpha{}_\alpha. \tag{2.20d}$$

Informacje o mechanicznych własnościach materii są niesione przez tensor energii-pędu $T_{\mu\nu}$ poprzez wielkości dynamiczne zdefiniowane względem prędkości materii jako

$$\epsilon = u^{\beta} u^{\alpha} T_{\beta\alpha}, \tag{2.21a}$$

$$q_{\nu} = -u^{\beta} P_{\nu}{}^{\alpha} T_{\beta\alpha}, \tag{2.21b}$$

$$\pi_{\mu\nu} = \Big( P_{\mu}{}^{\beta} P_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{3} P_{\mu\nu} P^{\beta\alpha} \Big) T_{\beta\alpha}, \tag{2.21c}$$

$$p = \frac{1}{3} P^{\beta\alpha} T_{\beta\alpha}, \tag{2.21d}$$

gdzie $\epsilon$ jest gęstością energii, $q_{\nu}$ wektorem dyfuzyjności cieplnej, $\pi_{\mu\nu}$ tensorem naprężeń lepkościowych, a $p$ ciśnieniem materii. Tensor energii-pędu wyraża się przez te wielkości następująco

$$T_{\mu\nu} = u_{\mu} u_{\nu} \epsilon + u_{\mu} q_{\nu} + u_{\nu} q_{\mu} + \pi_{\mu\nu} + P_{\mu\nu} p. \tag{2.22}$$

W modelach Friedmanna–Lemaître'a materia dana jest płynem doskonałym, dla którego zjawiska dyfuzji i lepkości nie występują. Tensor energii-pędu modelu tła przyjmuje więc formę

$$\overline{T}_{\mu\nu} = \overline{u}_{\mu} \overline{u}_{\nu} \overline{\epsilon} + \overline{P}_{\mu\nu} \overline{p}, \tag{2.23}$$

gdzie przez $\overline{\epsilon}$ i $\overline{p}$ oznaczamy odpowiednio gęstość energii i ciśnienie niezaburzonej materii. Stąd dla modelu zaburzonego możemy założyć rozkłady

$$\epsilon = \overline{\epsilon} + \delta\epsilon, \qquad |\delta\epsilon| \ll |\overline{\epsilon}|, \qquad |\partial_{\nu} \delta\epsilon| \ll |\partial_{\nu} \overline{\epsilon}|, \tag{2.24}$$

$$p = \overline{p} + \delta p, \qquad |\delta p| \ll |\overline{p}|, \qquad |\partial_{\nu} \delta p| \ll |\partial_{\nu} \overline{p}|. \tag{2.25}$$

Przez $\delta\epsilon$ i $\delta p$ będziemy oznaczać zaburzenia odpowiednio gęstości i ciśnienia. Pozostałe wielkości dynamiczne ($q_{\nu}$, $\pi_{\mu\nu}$) w modelu zaburzonym uzupełniają zbiór małych wielkości perturbacyjnych.

Związek pomiędzy geometrią czasoprzestrzeni a własnościami wypełniającej ją materii zadają równania Einsteina

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Lambda = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{2.26}$$

gdzie $G_{\mu\nu}$ jest tensorem Einsteina, $\Lambda$ jest stałą kosmologiczną, a stała sprzężenia $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, gdzie $c$ jest prędkością światła i $G$ jest stałą grawitacji. Linearyzacja tych równań przy założeniu, że model tła spełnia równania Einsteina postaci

$$\overline{G}_{\mu\nu} + \overline{g}_{\mu\nu} \Lambda = \kappa \overline{T}_{\mu\nu}, \tag{2.27}$$

gdzie $\overline{G}_{\mu\nu}$ jest tensorem Einsteina dla czasoprzestrzeni tła, doprowadzi do uzyskania poszukiwanych równań perturbacyjnych. W tym celu wyliczamy tensor

Einsteina dla zaburzonej czasoprzestrzeni, uzyskując

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = \overline{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(&-\overline{\nabla}^{\alpha}\overline{\nabla}_{\alpha}h_{\mu\nu} - \overline{R}h_{\mu\nu} + \overline{\nabla}_{\mu}\overline{\nabla}^{\alpha}h_{\nu\alpha} + \overline{\nabla}_{\nu}\overline{\nabla}^{\alpha}h_{\mu\alpha} \\ &+ \overline{R}_{\mu}{}^{\alpha}h_{\nu\alpha} + \overline{R}_{\nu}{}^{\alpha}h_{\mu\alpha} - \overline{g}_{\mu\nu}\overline{\nabla}^{\beta}\overline{\nabla}^{\alpha}h_{\beta\alpha} - 2\overline{R}_{\mu}{}^{\beta}{}_{\nu}{}^{\alpha}h_{\beta\alpha} \\ &+ \overline{g}_{\mu\nu}\overline{R}^{\beta\alpha}h_{\beta\alpha} - \overline{\nabla}_{\mu}\overline{\nabla}_{\nu}h^{\alpha}{}_{\alpha} + \overline{g}_{\mu\nu}\overline{\nabla}^{\beta}\overline{\nabla}_{\beta}h^{\alpha}{}_{\alpha}), \end{aligned} \tag{2.28}$$

gdzie wielkości $\overline{R}_{\kappa\lambda\mu\nu}$, $\overline{R}_{\mu\nu}$ i $\overline{R}$ są odpowiednio tensorem Riemanna, tensorem Ricciego i skalarem krzywizny dla czasoprzestrzeni tła. Tensor Riemanna w czasoprzestrzeni tła dany jest w ogólności tożsamością

$$\overline{R}_{\kappa\lambda\mu\nu} = \overline{C}_{\kappa\lambda\mu\nu} + \overline{g}_{\kappa\mu}\overline{S}_{\lambda\nu} - \overline{g}_{\kappa\nu}\overline{S}_{\lambda\mu} + \overline{g}_{\lambda\nu}\overline{S}_{\kappa\mu} - \overline{g}_{\lambda\mu}\overline{S}_{\kappa\nu}, \tag{2.29}$$

gdzie $\overline{S}_{\mu\nu}$ jest tensorem Schoutena danym przez

$$\overline{S}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big(\overline{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{6}\overline{g}_{\mu\nu}\overline{R}\Big), \tag{2.30}$$

a $\overline{C}_{\kappa\lambda\mu\nu}$ jest tensorem Weyla. Dla modeli Friedmanna–Lemaître'a, których czasoprzestrzeń zadana jest metryką Robertsona–Walkera, tensor Weyla jednak znika

$$\overline{C}_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0. \tag{2.31}$$

Równania Einsteina pozwalają natomiast wyrazić tensor Ricciego poprzez tensor energii-pędu. Po tym zabiegu otrzymujemy ostatecznie ogólne, niezmiennicze względem cechowania równania perturbacyjne dla małych zaburzeń modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(&\overline{\nabla}^{\alpha}\overline{\nabla}_{\alpha}h_{\mu\nu} - \overline{\nabla}_{\mu}\overline{\nabla}^{\alpha}h_{\nu\alpha} - \overline{\nabla}_{\nu}\overline{\nabla}^{\alpha}h_{\mu\alpha} + \overline{g}_{\mu\nu}\overline{\nabla}^{\beta}\overline{\nabla}^{\alpha}h_{\beta\alpha} + \overline{\nabla}_{\mu}\overline{\nabla}_{\nu}h^{\alpha}{}_{\alpha} \\ &- \overline{g}_{\mu\nu}\overline{\nabla}^{\beta}\overline{\nabla}_{\beta}h^{\alpha}{}_{\alpha}) + \frac{1}{3}h_{\mu\nu}(\kappa\overline{\epsilon} + \Lambda) - \frac{1}{12}\overline{g}_{\mu\nu}h^{\alpha}{}_{\alpha}(\kappa\overline{\epsilon} + 3\kappa\overline{p} - 2\Lambda) \\ &- \Big(\overline{u}_{\mu}v_{\nu} + \overline{u}_{\nu}v_{\mu} - \overline{u}_{\mu}\overline{u}^{\alpha}h_{\nu\alpha} - \overline{u}_{\nu}\overline{u}^{\alpha}h_{\mu\alpha} + \frac{1}{2}\overline{u}_{\mu}\overline{u}_{\nu}h^{\alpha}{}_{\alpha}\Big)(\kappa\overline{\epsilon} + \kappa\overline{p}) \\ &= \kappa(\overline{u}_{\mu}\overline{u}_{\nu}\delta\epsilon + \overline{u}_{\mu}q_{\nu} + \overline{u}_{\nu}q_{\mu} + \pi_{\mu\nu} + \overline{P}_{\mu\nu}\delta p). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Równania perturbacyjne w powyżej przedstawionej zwartej formie nie są spotykane w literaturze. Dotyczy to również wyrażeń (2.20) ukazujących związki pomiędzy wielkościami kinematycznymi a zaburzeniami metryki i prędkości materii. Wynika to przede wszystkim z tego, że zwyczajowo już na początkowym etapie rachunków perturbacyjnych w podejściu Lifshitza dokonywany jest wybór układu współrzędnych. W sytuacji, gdy główna zmienna perturbacyjna, czyli zaburzenie metryki, jest zależna od wyboru cechowania, przejście do konkretnego układu współrzędnych jest wygodnym rozwiązaniem.[5] Umożliwia ono wprowadzenie nowych zmiennych perturbacyjnych, które służą następnie do zbudowania

[5] Nie jest jednak bezwzględną koniecznością. Przykład kowariantnego przeformułowania podejścia Lifshitza można znaleźć w pracy Vitentiego *et al.* [182].

wielkości niezmienniczych względem cechowania. Wczesny wybór układu współrzędnych pozwala wówczas uprościć w pewnym stopniu rachunki, a odbywa się to bez straty ogólności. Zalety wyprowadzenia formuł perturbacyjnych w formie niezależnej od układu współrzędnych można jednak dostrzec przy rozpatrywaniu zaburzeń w postaci fal grawitacyjnych, co pokażemy w jednym z kolejnych podrozdziałów.

## 2.3 Klasyfikacja rodzajów zaburzeń

Postępując według klasycznego podejścia perturbacyjnego Lifshitza, w poszukiwaniu nowych, niezmienniczych względem cechowania wielkości perturbacyjnych dokonamy wyboru konkretnego układu współrzędnych w modelu tła. W konsekwencji doprowadzi nas to do wyodrębnienia trzech fizycznie różnych typów zaburzeń: skalarnych, wektorowych i tensorowych. Zaburzenia typu tensorowego będą miały bezpośredni związek z falami grawitacyjnymi.

Korzystając z faktu, że modele Friedmanna–Lemaître'a dopuszczają wprowadzenie synchronicznego układu współrzędnych, który równocześnie współporusza się z materią, nakładamy na składowe prędkości przepływu materii i metryki tła następujące warunki

$$\overline{u}_0 = -a, \qquad \overline{u}_n = 0, \tag{2.33}$$

$$\overline{g}_{00} = -a^2, \qquad \overline{g}_{0n} = 0, \qquad \overline{g}_{mn} = a^2\widehat{\overline{g}}_{mn}. \tag{2.34}$$

Założenia te zachowują warunek normalizacji wektora prędkości materii (2.9). Wielkość $a$ jest nazywana czynnikiem skali i jest funkcją jedynie współrzędnej $x^0 = \eta$, nazywanej czasem konforemnym. Natomiast wielkość $\widehat{\overline{g}}_{mn}$ będąca funkcją współrzędnych $x^n$, zwanych współrzędnymi przestrzennymi, jest metryką trójwymiarowej przestrzeni maksymalnie symetrycznej, dla której tensor Riemanna $\widehat{\overline{R}}_{klmn}$ dany jest formułą

$$\widehat{\overline{R}}_{klmn} = K(\widehat{\overline{g}}_{km}\widehat{\overline{g}}_{ln} - \widehat{\overline{g}}_{kn}\widehat{\overline{g}}_{lm}), \tag{2.35}$$

gdzie stała $K$ nazywana jest wskaźnikiem krzywizny.[6]

Składowe zaburzeń metryki i prędkości określamy, wprowadzając przy tym nowe zmienne perturbacyjne zdefiniowane na hiperpowierzchniach stałego czasu modelu tła

$$h_{00} = -2a^2 A, \qquad h_{0n} = -a^2\mathcal{B}_n, \qquad h_{mn} = 2a^2(\mathcal{C}_{mn} + \widehat{\overline{g}}_{mn}D), \tag{2.36}$$

[6] Stała krzywizny może zawsze zostać znormalizowana tak, by przybierała wartość $\pm 1$ lub 0. W tej pracy będziemy ją jednak traktować jako parametr ciągły.

$$v_0 = -aA, \qquad v_n = -a\mathcal{V}_n, \tag{2.37}$$

gdzie składowa czasowa zaburzenia prędkości wynika ze związku (2.12). Symetryczna i bezśladowa pomocnicza wielkość $\mathcal{C}_{mn}$

$$\mathcal{C}_{mn} = \mathcal{C}_{nm}, \qquad \mathcal{C}^a{}_a = 0, \tag{2.38}$$

rozkłada się na części nazywane odpowiednio poprzeczną-bezśladową, solenoidalną i podłużną

$$\mathcal{C}_{mn} = C_{mn} + \hat{\hat{\nabla}}_{(m}C_{n)} + \hat{\hat{\nabla}}_{mn}C, \tag{2.39}$$

gdzie $\hat{\hat{\nabla}}_n$ jest pochodną kowariantną kompatybilną z metryką $\hat{\hat{g}}_{mn}$, operator pomocniczy $\hat{\hat{\nabla}}_{mn}$ dany jest

$$\hat{\hat{\nabla}}_{mn} = \hat{\hat{\nabla}}_m\hat{\hat{\nabla}}_n - \frac{1}{3}\hat{\hat{g}}_{mn}\hat{\hat{\nabla}}^a\hat{\hat{\nabla}}_a, \tag{2.40}$$

oraz zachodzi

$$C_{mn} = C_{nm}, \qquad C^a{}_a = 0, \qquad \hat{\hat{\nabla}}^a C_{na} = 0, \qquad \hat{\hat{\nabla}}^a C_a = 0. \tag{2.41}$$

Powyższe warunki wyznaczają wielkość $C_n$ z dokładnością do rozwiązania równań $\hat{\hat{\nabla}}_{(m}X_{n)} = 0$, czyli do wektora Killinga, a wielkość $C$ z dokładnością do rozwiązania równań $\hat{\hat{\nabla}}_{mn}X = 0$. Wielkość $\mathcal{B}_n$ rozkłada się z kolei na część solenoidalną i podłużną

$$\mathcal{B}_n = B_n + \hat{\hat{\nabla}}_n B, \tag{2.42}$$

gdzie zachodzi

$$\hat{\hat{\nabla}}^a B_a = 0. \tag{2.43}$$

Wielkość $B$ jest wyznaczona z dokładnością do rozwiązania równań $\hat{\hat{\nabla}}_n X = 0$, czyli do stałej. Podobnie rozkłada się związana z zaburzeniem prędkości wielkość $\mathcal{V}_n$

$$\mathcal{V}_n = V_n + \hat{\hat{\nabla}}_n V, \tag{2.44}$$

$$\hat{\hat{\nabla}}^a V_a = 0. \tag{2.45}$$

Ponieważ wektor dyfuzyjności $q_\nu$ i tensor naprężeń lepkościowych $\pi_{\mu\nu}$ są ortogonalne do prędkości, w wybranym układzie współrzędnych ich składowe czasowe znikają, natomiast składowe przestrzenne rozkładają się następująco

$$q_0 = 0, \qquad q_n = Y_n + \hat{\hat{\nabla}}_n Y, \tag{2.46}$$

$$\hat{\hat{\nabla}}^a Y_a = 0, \tag{2.47}$$

oraz

$$\pi_{00} = 0, \qquad \pi_{0n} = 0, \qquad \pi_{mn} = \Pi_{mn} + \hat{\hat{\nabla}}_{(m}\Pi_{n)} + \hat{\hat{\nabla}}_{mn}\Pi, \tag{2.48}$$

$$\Pi_{mn} = \Pi_{nm}, \qquad \Pi^a{}_a = 0, \qquad \widehat{\widehat{\nabla}}^a \Pi_{na} = 0, \qquad \widehat{\widehat{\nabla}}^a \Pi_a = 0. \tag{2.49}$$

Zdefiniowane powyżej wielkości perturbacyjne na hiperpowierzchniach stałego czasu modelu tła są systematyzowane w oparciu o ich zachowanie przy zamianach współrzędnych przestrzennych. Wprowadzono następującą klasyfikację:

- Wielkości $A$, $B$, $C$, $D$, $V$, $\delta\epsilon$, $Y$, $\Pi$, i $\delta p$, transformujące się jak skalary, nazywane są skalarnymi wielkościami perturbacyjnymi, a zaburzenia z nich zbudowane — zaburzeniami skalarnymi. Fizycznie zaburzenia skalarne opisują perturbacje pola grawitacyjnego oraz ruchu i rozkładu materii.

- Wielkości $B_n$, $C_n$, $V_n$, $Y_n$, i $\Pi_n$, transformujące się jak solenoidalne wektory, nazywane są wektorowymi wielkościami perturbacyjnymi, a zaburzenia z nich zbudowane — zaburzeniami wektorowymi. Fizycznie zaburzenia wektorowe opisują perturbacje pola grawitacyjnego oraz ruchu materii.

- Wielkości $C_{mn}$, i $\Pi_{mn}$, transformujące się jak poprzeczne, bezśladowe, symetryczne tensory drugiego rzędu, nazywane są tensorowymi wielkościami perturbacyjnymi, a zaburzenia z nich zbudowane — zaburzeniami tensorowymi. Fizycznie zaburzenia tensorowe opisują wyłącznie perturbacje pola grawitacyjnego, czyli czyste fale grawitacyjne.

Nie wszystkie z powyższych wielkości perturbacyjnych posiadają jednak bezpośrednie znaczenie fizyczne, ponieważ w ogólności mogą one zależeć od wyboru cechowania. Zgodnie z lematem Stewarta–Walkera [163] wielkości $Y_n$, $Y$ oraz $\Pi_{mn}$, $\Pi_n$, $\Pi$ są niezmiennicze względem cechowania, ponieważ dyfuzyjność i lepkość w modelu tła znikają. Zachowanie pozostałych wielkości perturbacyjnych pod działaniem transformacji cechowania sprawdza się bezpośrednim rachunkiem, rozważając zamianę zmiennych (2.5) z generatorem transformacji rozłożonym w wybranym układzie współrzędnych następująco

$$\xi_0 = -a^2 T, \qquad \xi_n = a^2 (L_n + \widehat{\widehat{\nabla}}_n L), \tag{2.50}$$

$$\widehat{\widehat{\nabla}}^a L_a = 0. \tag{2.51}$$

Dla zaburzeń metryki, transformującej się według (2.6), otrzymujemy wówczas

$$A \longrightarrow A + \dot{T} + \frac{\dot{a}}{a} T, \tag{2.52}$$

$$B_n \longrightarrow B_n - \dot{L}_n, \qquad B \longrightarrow B + T - \dot{L}, \tag{2.53}$$

$$C_{mn} \longrightarrow C_{mn}, \qquad C_n \longrightarrow C_n + L_n, \qquad C \longrightarrow C + L, \tag{2.54}$$

$$D \longrightarrow D + \frac{\dot{a}}{a} T + \frac{1}{3} \widehat{\widehat{\nabla}}^a \widehat{\widehat{\nabla}}_a L. \tag{2.55}$$

Poprzez kropkę nad symbolem wielkości będziemy oznaczać pochodną względem czasu konforemnego. Jak widzimy wielkość $C_{mn}$ jest niezmiennicza względem cechowania. Jest to zrozumiałe, jeśli zauważymy, że transformacja cechowania ma charakter wektorowy i w związku z tym nie może wprowadzić zmian do poprzecznych, bezśladowych, symetrycznych tensorów drugiego rzędu. Z pozostałych zależnych od cechowania wielkości wektorowych i skalarnych, poprzez wzięcie ich odpowiednich kombinacji liniowych, konstruuje się nowe wielkości perturbacyjne, które są już niezmiennicze względem cechowania.

Wykorzystywany w podejściu Lifshitza podział zdefiniowanych na hiperpowierzchniach stałego czasu wektorów i tensorów drugiego rzędu na części ma również zastosowanie do samych równań perturbacyjnych. W wyniku takiego podziału składowa czasowo-przestrzenna równań perturbacyjnych rozkłada się na cześć solenoidalną i podłużną, natomiast ich składowa przestrzenna rozkłada się na cześć poprzeczną-bezśladową, solenoidalną, podłużną i śladową. Jednoznaczność tego rozkładu powoduje, że każda ze wspomnianych części równań perturbacyjnych staje się odrębnymi równaniami. Wynika stąd, że poszczególne rodzaje zaburzeń propagują się niezależnie od siebie nawzajem. W pracy [83] Hu pokazał, jak można dojść do tych wniosków, posługując się metodami teorii grup. Buniy i Kephart [22] wykazali, że zjawisko rozsprzęgania się zaburzeń zachodzi tylko dla rozmaitości einsteinowskich.

## 2.4 Zaburzenia w postaci fal grawitacyjnych

W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy, że obie wielkości perturbacyjne $C_{mn}$ i $\Pi_{mn}$ charakteryzujące tensorowe zaburzenia modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a są niezmiennicze względem wyboru cechowania z samej swej konstrukcji. Stąd wielkości te niosą w sobie fizyczną informację o deformacjach czasoprzestrzeni w postaci słabych fal grawitacyjnych. Równanie opisujące propagację zaburzeń tensorowych dane jest poprzez poprzeczną-bezśladową część składowej przestrzennej ogólnych równań perturbacyjnych (2.32). Wygląda ono następująco

$$\ddot{C}_{mn} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{C}_{mn} - (\widehat{\widehat{\nabla}}^a\widehat{\widehat{\nabla}}_a - 2K)C_{mn} = \kappa\Pi_{mn}. \tag{2.56}$$

W sposób oczywisty równanie to jest niezmiennicze względem wyboru cechowania.

W toku dalszych rozważań będziemy zajmować się swobodnymi zaburzeniami tensorowymi, zakładając, że wielkość $\Pi_{mn}$ reprezentująca lepkość fal grawitacyjnych, a pełniąca w powyższym równaniu rolę źródeł znika. Zapiszmy jawnie postać równania propagacji swobodnych zaburzeń tensorowych modeli

Friedmanna–Lemaître'a

$$\ddot{C}_{mn} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{C}_{mn} - (\widehat{\widehat{\nabla}}^a\widehat{\widehat{\nabla}}_a - 2K)C_{mn} = 0. \tag{2.57}$$

Równanie to jest również powszechnie nazywane równaniem propagacji pierwotnych fal grawitacyjnych ze względu na fizyczny aspekt zagadnienia, które opisuje, a mianowicie globalne zaburzenia modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a o charakterze słabych fal grawitacyjnych, których domniemanym źródłem była początkowa osobliwość. Jest to jednorodne, liniowe równanie różniczkowe cząstkowe w czterech zmiennych, drugiego rzędu. Współczynniki tego równania zależą tylko od jednej zmiennej, od czasu konforemnego. Zmienną zależną jest poprzeczny, bezśladowy, symetryczny tensor drugiego rzędu. W tej części przedstawimy standardowy schemat rozwiązywania tego równania poprzez redukcję zagadnienia metodą separacji zmiennych niezależnych.

Forma równania (2.57) pozwala na rozdzielenie zmiennej czasowej $\eta$ i zmiennych przestrzennych $x^n$ poprzez wybór

$$C_{mn} = \frac{\mu}{a}Q_{mn}, \tag{2.58}$$

gdzie wielkość $\mu$, nazywana niekiedy amplitudą,[7] jest funkcją wyłącznie czasu konforemnego, natomiast wielkość $Q_{mn}$ jest funkcją zmiennych przestrzennych i spełnia warunki

$$Q_{mn} = Q_{nm}, \qquad Q^a{}_a = 0, \qquad \widehat{\widehat{\nabla}}^a Q_{na} = 0. \tag{2.59}$$

W wyniku tego podstawienia z równania (2.57) otrzymujemy dwa odrębne równania, odpowiednio dla wielkości $Q_{mn}$ oraz dla amplitudy $\mu$

$$(\widehat{\widehat{\nabla}}^a\widehat{\widehat{\nabla}}_a - Q)Q_{mn} = 0, \tag{2.60}$$

$$\ddot{\mu} - \Big(\frac{\ddot{a}}{a} + Q - 2K\Big)\mu = 0. \tag{2.61}$$

Pierwsze z powyższych równań jest tensorowym równaniem Laplace'a na trójwymiarowej przestrzeni o stałej krzywiźnie. Drugie natomiast jest nazywane równaniem czasowej ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych w modelach kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a i poszukiwaniom rozwiązań tego właśnie równania będzie poświęcona kolejna część tej rozprawy. Przez $Q$ oznaczamy stałą separacji, która pełni rolę tensorowej wartości własnej operatora Laplace'a działającego na trójwymiarowej przestrzeni maksymalnie symetrycznej. Tensorowe widmo operatora Laplace'a na trójwymiarowej przestrzeni maksymalnie

[7] Podkreślamy w tym miejscu, że słowo „amplituda” pełni tutaj rolę jednie nazewniczą. Funkcja $\mu$ nie jest amplitudą fali w ścisłym tego słowa znaczeniu.

symetrycznej jest ciągłe dla przestrzeni o ujemnej, bądź zerowej krzywiźnie i dyskretne dla przestrzeni o dodatniej krzywiźnie

$$Q \in \begin{cases} (-\infty,\, 3K), & \text{gdy } K < 0, \\ (-\infty,\, 0), & \text{gdy } K = 0, \\ \{-(n^2-3)K\colon 3 \leqslant n \in \mathbb{N}\}, & \text{gdy } K > 0. \end{cases} \tag{2.62}$$

Zostało ono zapostulowane już przez Lifshitza [104], a później potwierdzone w pracach Jantzena [92], Rubina i Ordóñeza [148] oraz Kalninsa i Millera [94, 93].

Poprzeczne, bezśladowe, symetryczne wielkości $Q_{mn}$ spełniające układ równań (2.59) i (2.60) nazywane są harmonikami tensorowymi. Stanowią one tensorowe funkcje własne operatora Laplace'a działającego na trójwymiarowej jednorodnej i izotropowej przestrzeni. Warunki (2.59) ograniczają ich liczbę stopni swobody do dwóch, stąd posiadają one dwa wzajemnie ortogonalne stany parzystości. Dla równań harmonik tensorowych (2.60) istnieją więc dwa geometrycznie niezależne rozwiązania, o których mówimy, że mogą reprezentować dwa odmienne stany polaryzacyjne fal grawitacyjnych.

Jawna postać funkcyjna harmonik tensorowych dla przestrzeni o dodatniej krzywiźnie została podana przez Gerlacha i Senguptę [59] oraz Sandberga [153], a uzupełniona dla przestrzeni o ujemnej krzywiźnie przez Tomitę [170]. Poniżej przedstawiamy je w zwartej formie, która dopuszcza dowolną krzywiznę przestrzeni. Wybieramy taki układ współrzędnych $\{x^n\}$, w którym kwadrat elementu liniowego trójwymiarowej przestrzeni maksymalnie symetrycznej przybiera następującą formę

$$\widehat{\overline{g}}_{ba}\, dx^b\, dx^a = d\chi^2 + \frac{\sin^2(\sqrt{K}\chi)}{K}(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2). \tag{2.63}$$

Dla $K \leqslant 0$ zakres zmienności współrzędnych jest następujący

$$\chi \in [0,\, \infty), \qquad \vartheta \in [0,\, \pi], \qquad \varphi \in [0,\, 2\pi), \tag{2.64}$$

natomiast dla $K > 0$ mamy

$$\chi \in \left[0,\, \frac{\pi}{\sqrt{K}}\right], \qquad \vartheta \in [0,\, \pi], \qquad \varphi \in [0,\, 2\pi). \tag{2.65}$$

Równania harmonik tensorowych rozwiązujemy, posługując się metodą separacji zmiennych. Pierwszemu rozwiązaniu przypisujemy parzystość „plus"

$$Q^{+}{}_{11} = f^{-\frac{5}{2}}\, \mathrm{P}^l_k(g)\, \mathrm{P}^m_l(\cos\vartheta)\, \mathrm{F}_m(\varphi),$$
$$Q^{+}{}_{12} = \frac{1}{l^2 - \frac{1}{4}}\, f^{-1}\, \frac{d}{d\chi}\left[f^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{P}^l_k(g)\right]\, \frac{d}{d\vartheta}\left[\mathrm{P}^m_l(\cos\vartheta)\right]\, \mathrm{F}_m(\varphi),$$

$$
\begin{aligned}
Q^{+}{}_{13} &= \frac{1}{l^2-\frac{1}{4}}\, f^{-1}\, \frac{d}{d\chi}\left[f^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\right]\, \mathrm{P}_l^m(\cos\vartheta)\, \frac{d}{d\varphi}\left[\mathrm{F}_m(\varphi)\right],\\
Q^{+}{}_{22} &= \frac{1}{l^2-\frac{9}{4}}\left(\frac{2}{l^2-\frac{1}{4}}\, \frac{d}{d\chi}\left[f\, \frac{d}{d\chi}\left[f^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\right]\right] - f^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\right)\\
&\quad\times\, \frac{d^2}{d\vartheta^2}\left[\mathrm{P}_l^m(\cos\vartheta)\right]\, \mathrm{F}_m(\varphi)\\
&\quad+\, \frac{1}{l^2-\frac{9}{4}}\left(\frac{d}{d\chi}\left[f\, \frac{d}{d\chi}\left[f^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\right]\right] - \left(l^2-\frac{5}{4}\right) f^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\right)\\
&\quad\times\, \mathrm{P}_l^m(\cos\vartheta)\, \mathrm{F}_m(\varphi),\\
Q^{+}{}_{23} &= \frac{1}{l^2-\frac{9}{4}}\left(\frac{2}{l^2-\frac{1}{4}}\, \frac{d}{d\chi}\left[f\, \frac{d}{d\chi}\left[f^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\right]\right] - f^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\right)\\
&\quad\times\, \sin\vartheta\, \frac{d}{d\vartheta}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\, \mathrm{P}_l^m(\cos\vartheta)\right]\, \frac{d}{d\varphi}\left[\mathrm{F}_m(\varphi)\right],\\
Q^{+}{}_{33} &= \frac{1}{l^2-\frac{9}{4}}\left(\frac{2}{l^2-\frac{1}{4}}\, \frac{d}{d\chi}\left[f\, \frac{d}{d\chi}\left[f^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\right]\right] - f^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\right)\\
&\quad\times\left(\mathrm{P}_l^m(\cos\vartheta)\, \frac{d^2}{d\varphi^2}\left[\mathrm{F}_m(\varphi)\right] + \sin\vartheta\, \cos\vartheta\, \frac{d}{d\vartheta}\left[\mathrm{P}_l^m(\cos\vartheta)\right]\, \mathrm{F}_m(\varphi)\right)\\
&\quad+\, \frac{1}{l^2-\frac{9}{4}}\left(\frac{d}{d\chi}\left[f\, \frac{d}{d\chi}\left[f^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\right]\right] - \left(l^2-\frac{5}{4}\right) f^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\right)\\
&\quad\times\, \sin^2\vartheta\, \mathrm{P}_l^m(\cos\vartheta)\, \mathrm{F}_m(\varphi),
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

natomiast rozwiązaniu drugiemu parzystość „krzyż”

$$
\begin{aligned}
Q^{\times}{}_{11} &= 0,\\
Q^{\times}{}_{12} &= f^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\, \frac{1}{\sin\vartheta}\, \mathrm{P}_l^m(\cos\vartheta)\, \frac{d}{d\varphi}\left[\mathrm{F}_m(\varphi)\right],\\
Q^{\times}{}_{13} &= -\, f^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\, \sin\vartheta\, \frac{d}{d\vartheta}\left[\mathrm{P}_l^m(\cos\vartheta)\right]\, \mathrm{F}_m(\varphi),\\
Q^{\times}{}_{22} &= \frac{2}{l^2-\frac{9}{4}}\, \frac{d}{d\chi}\left[f^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\right]\, \frac{d}{d\vartheta}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\, \mathrm{P}_l^m(\cos\vartheta)\right]\, \frac{d}{d\varphi}\left[\mathrm{F}_m(\varphi)\right],\\
Q^{\times}{}_{23} &= \frac{1}{l^2-\frac{9}{4}}\, \frac{d}{d\chi}\left[f^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\right]\, \left(\frac{1}{\sin\vartheta}\, \mathrm{P}_l^m(\cos\vartheta)\, \frac{d^2}{d\varphi^2}\left[\mathrm{F}_m(\varphi)\right]\right.\\
&\quad\left. -\, \sin^2\vartheta\, \frac{d}{d\vartheta}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\, \frac{d}{d\vartheta}\left[\mathrm{P}_l^m(\cos\vartheta)\right]\right]\, \mathrm{F}_m(\varphi)\right),\\
Q^{\times}{}_{33} &= -\, \frac{2}{l^2-\frac{9}{4}}\, \frac{d}{d\chi}\left[f^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{P}_k^l(g)\right]\\
&\quad\times\, \sin^2\vartheta\, \frac{d}{d\vartheta}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\, \mathrm{P}_l^m(\cos\vartheta)\right]\, \frac{d}{d\varphi}\left[\mathrm{F}_m(\varphi)\right],
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

gdzie pomocniczo wprowadziliśmy funkcje

$$
f = \frac{\sin(\sqrt{K}\chi)}{\sqrt{K}}, \qquad g = \cos(\sqrt{K}\chi),
\tag{2.68}
$$

oraz przedefiniowaliśmy stałą separacji (przy $K \neq 0$)

$$k^2 = 3 - \frac{Q}{K}. \tag{2.69}$$

Funkcje $\mathrm{P}_l^m(z)$ i $\mathrm{F}_m(z)$ spełniają następujące równania różniczkowe

$$\Big[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} - 2z\frac{d}{dz} + \Big(l^2 - \frac{1}{4}\Big) - \frac{m^2}{1-z^2}\Big]\mathrm{P}_l^m(z) = 0, \tag{2.70}$$

$$\Big[\frac{d^2}{dz^2} + m^2\Big]\mathrm{F}_m(z) = 0, \tag{2.71}$$

natomiast dozwolone wartości parametrów $k$, $l$, $m$ zależą od krzywizny przestrzeni. Dla $K < 0$ mogą one przyjmować wartości ze zbiorów

$$k \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{2.72a}$$

$$l \in \Big\{\pm\frac{5}{2}, \pm\frac{7}{2}, \pm\frac{9}{2}, \ldots\Big\}, \tag{2.72b}$$

$$m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \ \wedge\ |m| \leqslant |l| - \frac{1}{2}, \tag{2.72c}$$

a dla $K > 0$ mogą przybierać wartości

$$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm1, \pm2\}, \tag{2.73a}$$

$$l \in \Big\{\pm\frac{5}{2}, \pm\frac{7}{2}, \pm\frac{9}{2}, \ldots\Big\} \ \wedge\ |l| \leqslant |k| - \frac{1}{2}, \tag{2.73b}$$

$$m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \ \wedge\ |m| \leqslant |l| - \frac{1}{2}. \tag{2.73c}$$

Rozwiązania dla harmonik tensorowych przy $K = 0$ uzyskuje się z powyższych przy wykorzystaniu następujących tożsamości

$$\lim_{K\to 0} f = \chi, \tag{2.74}$$

$$\lim_{K\to 0} \mathrm{P}_k^l(g) \propto \chi^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}_l(\sqrt{-Q}\chi), \tag{2.75}$$

gdzie funkcja $\mathrm{J}_l(z)$ spełnia równanie różniczkowe

$$\Big[z^2\frac{d^2}{dz^2} + 2z\frac{d}{dz} + z^2 - \Big(l^2 - \frac{1}{4}\Big)\Big]\mathrm{J}_l(z) = 0, \tag{2.76}$$

a parametry $l$, $m$ przyjmują wówczas wartości takie same jak dla przypadku $K < 0$. Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że niezależnie od wartości stałej krzywizny zachodzi

$$Q^{\times ba}Q^{+}{}_{ba} = 0. \tag{2.77}$$

czyli istotnie oba przedstawione rozwiązania dla harmonik tensorowych do różnych stanów parzystości są wzajemnie ortogonalne.

## 2.5 Kowariantna definicja słabych fal grawitacyjnych w modelach kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a

Perturbacje modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a w postaci słabych fal grawitacyjnych opisywane są przez zaburzenia tensorowe. Ten typ zaburzeń jest charakteryzowany poprzez dwie wielkości perturbacyjne: poprzeczną, bezśladową część składowej przestrzenno-przestrzennej zaburzenia metryki i analogiczną część tensora naprężeń lepkościowych. Podobnie jak inne wielkości perturbacyjne definiowane w podejściu Lifshitza są one określone na hiperpowierzchniach stałego czasu czasoprzestrzeni tła, w której wybrano synchroniczny, współporuszający się z materią układ współrzędnych. Jak widzieliśmy, własności tych wielkości perturbacyjnych sprawiają, że są one niezmiennicze względem transformacji cechowania bezpośrednio, bez konieczności wykonywania dodatkowych konstrukcji. Otwiera to możliwość zaproponowania definicji słabych fal grawitacyjnych w modelach Friedmanna–Lemaître'a w formie kowariantnej, niezmienniczej względem wyboru układu współrzędnych w modelu tła. Taka definicja pozwoli również podać kowariantne równanie ich propagacji.

Jako pierwszy kowariantne warunki charakteryzujące zaburzenia modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a w postaci słabych fal grawitacyjnych podał Hawking [76]. Posłużył się w tym celu częścią elektryczną i magnetyczną tensora Weyla. Jego idee zostały wykorzystane przez Dunsby'ego, Bassetta i Ellisa [40] do analizy rozchodzenia się słabych fal grawitacyjnych na podstawie równań propagacji tych wielkości. Zainspirowały one również Maartensa, Ellisa i Siklosa [112] do doprecyzowania kryteriów istnienia słabych fal grawitacyjnych i ich zredefiniowania jako opisanych przez tensor Weyla i lokalnie swobodne części jego pochodnej kowariantnej.[8] Inne równoważne podejściu Hawkinga, niezmiennicze względem cechowania warunki definicyjne dla słabych fal grawitacyjnych były podawane przez Niedrę [126] i Goodego [67]. Przegląd problemów związanych z definicją gwarantującą istnienie słabych fal grawitacyjnych można znaleźć u Osany [133]. Warto dodać, że równolegle z podejściem kowariantnym prowadzone były prace nad tłumaczeniem jego wyników na język spinorów. Najważniejsze publikacje na ten temat to prace Hawkinga [77], Changa, Janisa

[8] Tensor Weyla jest lokalnie swobodny w tym sensie, że nie jest on punktowo określony przez tensor naprężeń materii (poprzez równania Einsteina). W pracy [112] pokazano, że niektóre części jego pochodnej można uznać za lokalnie swobodne w tym znaczeniu, że nie są one określone ani przez tensor naprężeń, jego pochodną, ani przez sam tensor Weyla (poprzez tożsamości Bianchiego).

i Niedry [28, 127] oraz praca Pareji i MacCalluma [135] bezpośrednio odnosząca się do pracy Maartensa, Ellisa i Siklosa [112].

Tutaj podajemy inną niż dotychczas stosowane, kowariantną definicję słabych fal grawitacyjnych w modelach kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a. Jej zarys pochodzi z pracy Lyubushina [110], który jednak nie usystematyzował swoich idei. Zgodnie z nią zaburzenia modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a w postaci słabych fal grawitacyjnych są określone wyłącznie przez:

- ortogonalną względem przepływu ($\overline{u}^{\alpha} h_{\nu\alpha} = 0$) i poprzeczną ($\overline{\nabla}^{\alpha} h_{\nu\alpha} = 0$) część zaburzenia tensora metrycznego,

- poprzeczną ($\overline{\nabla}^{\alpha} \pi_{\nu\alpha} = 0$) część tensora naprężeń lepkościowych (który sam w sobie jest niezmienniczą względem cechowania wielkością perturbacyjną i z definicji jest ortogonalny względem przepływu ($\overline{u}^{\alpha} \pi_{\nu\alpha} = 0$) i bezśladowy (${\pi^{\alpha}}_{\alpha} = 0$)).

Rozpatrując przy tych warunkach wielkość

$$0 = \overline{u}^{\beta} \overline{\nabla}^{\alpha} h_{\beta\alpha} = -\frac{1}{3} \overline{\theta} {h^{\alpha}}_{\alpha}, \tag{2.78}$$

uzyskujemy, że poprawka do metryki jest dodatkowo bezśladowa (${h^{\alpha}}_{\alpha} = 0$). Można się łatwo przekonać bezpośrednim rachunkiem, że część zaburzenia tensora metrycznego o wyżej wymienionych własnościach jest również niezmiennicza względem cechowania. Stąd narzucone warunki efektywnie eliminują z rozważań zaburzenia skalarne i wektorowe, pozostawiając jedynie zaburzenia tensorowe. Wówczas zaburzenie pola metrycznego pełni rolę potencjału dla tensora ścinania oraz elektrycznej i magnetycznej części tensora Weyla

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \overline{u}^{\alpha} \overline{\nabla}_{\alpha} h_{\mu\nu}, \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} &= u^{\beta} u^{\alpha} C_{\mu\beta\nu\alpha} \\ &= -\frac{1}{4} \overline{\nabla}^{\alpha} \overline{\nabla}_{\alpha} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overline{u}^{\beta} \overline{\nabla}_{\beta} (\overline{u}^{\alpha} \overline{\nabla}_{\alpha} h_{\mu\nu}) - \frac{1}{3} \overline{\theta} \overline{u}^{\alpha} \overline{\nabla}_{\alpha} h_{\mu\nu} + \frac{1}{6} h_{\mu\nu} (\kappa \overline{\epsilon} + \Lambda), \end{aligned} \tag{2.80}$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} u^{\gamma} {\eta_{\mu}}^{\beta\alpha} C_{\nu\gamma\beta\alpha} \\ &= -\frac{1}{2} \overline{u}^{\gamma} \overline{\nabla}_{\gamma} \overline{\nabla}^{\beta} ({\overline{\eta}_{\mu\beta}}^{\alpha} h_{\nu\alpha}) - \frac{1}{6} \overline{\theta} \overline{\nabla}^{\beta} ({\overline{\eta}_{\mu\beta}}^{\alpha} h_{\nu\alpha}), \end{aligned} \tag{2.81}$$

gdzie $\overline{\eta}_{\lambda\mu\nu}$ jest efektywnym elementem objętości na hiperpowierzchniach ortogonalnych względem przepływu w modelu tła zdefiniowanym jako

$$\overline{\eta}_{\lambda\mu\nu} = -\overline{u}^{\alpha} \overline{\eta}_{\lambda\mu\nu\alpha}, \tag{2.82}$$

a $\overline{\eta}_{\kappa\lambda\mu\nu}$ jest tensorem całkowicie antysymetrycznym (alternującym). Można sprawdzić, że tensory te są poprzeczne

$$\overline{\nabla}^{\alpha}\sigma_{\nu\alpha} = 0, \qquad \overline{\nabla}^{\alpha}E_{\nu\alpha} = 0, \qquad \overline{\nabla}^{\alpha}H_{\nu\alpha} = 0. \tag{2.83}$$

Związki te korespondują z definicją dla słabych fal grawitacyjnych podaną przez Hawkinga.

Dla zdefiniowanych w ten sposób perturbacji zlinearyzowane tożsamości Bianchiego są trywialnie spełnione. Natomiast zlinearyzowane równania Einsteina (2.32) prowadzą do kowariantnego równania propagacji słabych fal grawitacyjnych w modelach kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a

$$-\frac{1}{2}\overline{\nabla}^{\alpha}\overline{\nabla}_{\alpha}h_{\mu\nu} + \frac{1}{3}h_{\mu\nu}(\kappa\overline{\epsilon} + \Lambda) = \kappa\pi_{\mu\nu}. \tag{2.84}$$

W zastosowaniach praktycznych ewentualne naprężenia lepkościowe są zwykle pomijane ($\pi_{\mu\nu} = 0$) i wtedy słabe fale grawitacyjne będące zaburzeniami modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a nazywane są dodatkowo swobodnymi. Skrótowo i dla podkreślenia ich kosmologicznego charakteru i pochodzenia określa się je mianem pierwotnych fal grawitacyjnych. Trzeba jednak przyznać, że założenie o zaniedbaniu lepkości jest bardzo mocnym ograniczeniem. Uproszczenie to jest podyktowane wyłącznie faktem, że jak na razie nie potrafimy modelować lepkości kosmologicznych fal grawitacyjnych.

# Rozdział 3

# Równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych

W tym rozdziale zajmiemy się równaniem ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych w modelach kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a. Przedstawimy znane w literaturze rozwiązania tego równania, po czym przejdziemy do poszukiwań jego nowych analitycznych rozwiązań. Stawiamy sobie dwa podstawowe kryteria ograniczające, według których będziemy prowadzić poszukiwania. Pierwsze dotyczy formy samego równania różniczkowego i wiąże się z zawężeniem klasy rozważanych modeli kosmologicznych. Będziemy rozpatrywać modele Friedmanna–Lemaître'a zawierające stałą kosmologiczną, przestrzennie zakrzywione i wypełnione płynem kosmicznym o liniowym, barotropowym równaniu stanu. W szczególności przeanalizujemy modele napędzane pyłem, promieniowaniem, ścianami domenowymi, materią ultralekką i materią sztywną. Jak się okaże, po przejściu w zmiennej niezależnej z czasu konforemnego na czynnik skali, równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych dla takich modeli staje się jednorodnym, liniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym, drugiego rzędu, posiadającym wymierne współczynniki w zmiennej niezależnej. Dla tego typu równań różniczkowych istnieje rozbudowana klasyfikacja oparta na własnościach ich punktów osobliwych, z której będziemy korzystać.

Drugie kryterium poszukiwań jest związane z funkcyjną postacią rozwiązań równań różniczkowych opisujących ewolucję pierwotnych fal grawitacyjnych w wybranych modelach kosmologicznych. Będą nas interesować rozwiązania wyrażające się poprzez tak zwane funkcje liouville'owskie. Są to funkcje posiadające jawną, zamkniętą formę, złożone ze skończonej liczby operacji algebraicznych, operacji całkowania tak konstruowanych wyrażeń oraz operacji potęgowania tychże. Będziemy ich szukać za pomocą klasycznej metody pochodzącej od Hermite'a i Darboux, która jest niezwykle użyteczna w zastosowaniach fizycznych. W otrzymanych rozwiązaniach pojawią się skomplikowane całki eliptyczne i elementarne, których wyliczeniu poświęcimy ostatni podrozdział tej części pracy.

## 3.1 Przegląd rozwiązań znanych w literaturze

W tym podrozdziale zestawimy znane do tej pory w literaturze rozwiązania równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych. Pokrótce je scharakteryzujemy i przedstawimy metody, jakimi je uzyskano.

Dla modeli Friedmanna–Lemaître'a wypełnionych pojedynczym płynem kosmicznym o liniowym, barotropowym równaniu stanu znanych jest szereg rozwiązań równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych. Dla modeli bez stałej kosmologicznej, przestrzennie płaskich rozwiązanie ogólne dla dowolnej wartości wykładnika adiabaty płynu podał Grishchuk [72]. Wyraził je on w czasie konforemnym, posługując się funkcjami Bessela. Z kolei dla modeli przestrzennie zakrzywionych rozwiązania szczególne w przypadku pyłu lub promieniowania zostały podane już przez Lifshitza [104, 105]. Jego rozwiązania wyrażają się w czasie konforemnym poprzez kombinacje funkcji trygonometrycznych i hiperbolicznych. Rozwiązanie ogólne dla modeli przestrzennie zakrzywionych podali natomiast de Garcia Maia i Lima [37]. Rozwiązanie to wyrażone jest w czasie konforemnym za pomocą funkcji hipergeometrycznych dla dowolnej wartości wykładnika adiabaty płynu spełniającej warunek $\gamma \neq \frac{2(2k+1)}{3(2k-1)}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (spośród fizycznie interesujących przypadków warunek ten w szczególności nie zachodzi dla materii sztywnej). Dla modeli z niezerową stałą kosmologiczną, przestrzennie płaskich znane jest tylko jedno rozwiązanie szczególne dla materii pyłowej, które znaleźli Perjés *et al.* [140]. W przypadku tym dokonali oni uprzedniego przekształcenia równania różniczkowego, przyjmując za zmienną niezależną czynnik skali, a następnie w celu znalezienia rozwiązania wykorzystali algorytm Kovacica [100]. Dla modeli przestrzennie zakrzywionych szczególne rozwiązanie w przypadku strun kosmicznych znaleźli Fabris i Gonçalves [52, 53]. Ich rozwiązanie w czasie konforemnym przedstawione jest poprzez funkcje hipergeometryczne. Należy jednak tutaj dodać, że w istocie rozwiązanie to daje się wyprowadzić z rozwiązania de Garcia Maii i Limy [37], bowiem na poziomie równania Friedmanna i równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych materia w postaci strun kosmicznych jest nieodróżnialna od krzywizny przestrzeni.

Dla modeli Friedmanna–Lemaître'a wypełnionych mieszaniną nieoddziałujących płynów o liniowym, barotropowym równaniu stanu znanych jest zaledwie kilka szczególnych rozwiązań równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych. Dla modeli bez stałej kosmologicznej, przestrzennie płaskich rozwiązanie szczególne w przypadku mieszaniny materii pyłowej i promienistej znaleźli Koranda i Allen [98]. Przyjmując za zmienną niezależną odpowiednio dobraną funkcję czynnika skali, uzyskali oni rozwiązanie wyrażone poprzez funkcje sferoidalne. Dla modeli zakrzywionych natomiast trzy szczególne rozwiązania w przypadku mieszaniny strun kosmicznych z kolejno pyłem, promieniowaniem i materią sztywną znaleźli Fabris i Gonçalves [52, 53]. Swoje rozwiązania otrzymali w czasie konforemnym, w przypadku pyłu i materii sztywnej za pomocą funkcji hipergeometrycznych, a w przypadku promieniowania — funkcji hiperbolicznych. Rozwiązania dla pyłu i promieniowania nie są jednak zupełnie nowe, gdyż z powodów identycznych jak przy poprzednio wspomnianym rozwiązaniu Fabrisa i Gonçalvesa dają się one wywieść z ogólnego rozwiązania de Garcia Maii i Limy [37].

Na marginesie tego zestawienia warto odnotować pracę Forda i Parkera [55], w której autorzy podali rozwiązanie równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych dla modeli bez stałej kosmologicznej, przestrzennie zakrzywionych przy założeniu, że czynnik skali jest potęgową funkcją czasu współporuszającego się.[1] Tymczasem trzeba zauważyć, że nie istnieją modele bez stałej kosmologicznej, zakrzywione przestrzennie, wypełnione płynem o liniowym, barotropowym równaniu stanu, dla których czynnik skali spełniałby owy warunek. Stąd fizyczne zastosowania takiego rozwiązania są w oczywisty sposób dość ograniczone. Przykład ten pokazuje, że równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych nie powinno być rozwiązywane w oderwaniu od równania Friedmanna.

## 3.2 Zamiana zmiennej niezależnej

Równanie opisujące ewolucję pierwotnych fal grawitacyjnych (2.61) jest jednorodnym, liniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym, drugiego rzędu. W równaniu tym zmienną niezależną jest czas konforemny. Samo równanie zależy jednak od czasu konforemnego tylko pośrednio, poprzez czynnik skali. Stwarza to możliwość dogodniejszego wyboru zmiennej niezależnej poprzez przejście w niej z czasu konforemnego na znormalizowany czynnik skali. W tym celu wprowadzamy następujące funkcje czasu konforemnego zwyczajowo wykorzystywane przy

[1] Czas współporuszający się jest taką współrzędną czasową, przy której składowe czasowo-przestrzenne metryki znikają, a jej składowa czasowa wynosi $-1$.

analizie modeli Friedmanna–Lemaître'a

$$H = c\frac{\dot{a}}{a^2}, \qquad h = \frac{1}{H_0}H, \qquad x = \frac{1}{a_0}a, \tag{3.1}$$

gdzie $H$ jest parametrem Hubble'a, $H_0$ jego wartością w chwili obecnej, $h$ nazywamy znormalizowanym parametrem Hubble'a, $a_0$ jest obecną wartością czynnika skali, a $x$ nazywamy znormalizowanym czynnikiem skali.[2] Ponadto wprowadzamy nowe stałe bezwymiarowe

$$\alpha = -\frac{4c^2(Q-2K)}{a_0^2H_0^2}, \qquad \Omega_K = -\frac{c^2K}{a_0^2H_0^2}, \qquad \Omega_\Lambda = \frac{c^2\Lambda}{3H_0^2}, \tag{3.2}$$

gdzie $\Omega_\Lambda$ nazywamy obecną wartością parametru gęstości energii stałej kosmologicznej, $\Omega_K$ obecną wartością parametru gęstości energii stałej krzywizny, a przez $\alpha$ będziemy oznaczać obecną wartość parametru falowego.[3] Zauważmy, że wielkość $\alpha$ w zależności od obecnej wartości parametru gęstości energii stałej krzywizny może przyjmować wartości z następujących zbiorów

$$\alpha \in \begin{cases} (4\Omega_K,\, \infty), & \text{gdy } \Omega_K > 0, \\ (0,\, \infty), & \text{gdy } \Omega_K = 0, \\ \{-4(n^2-1)\Omega_K\colon 3 \leqslant n \in \mathbb{N}\}, & \text{gdy } \Omega_K < 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Stosując powyższe podstawienia, przekształcamy równanie ewolucji amplitudy (2.61) do postaci

$$4x^4h^2\mu'' + 2(x^4h^2)'\mu' - \Big(2\frac{(x^4h^2)'}{x} - \alpha\Big)\mu = 0, \tag{3.4}$$

gdzie prim oznacza pochodną względem znormalizowanego czynnika skali. Dla przypadków przestrzeni hiperbolicznych lub sferycznych ($\Omega_K \neq 0$) wygodnie będzie dodatkowo zdefiniować bezwymiarową wielkość $N$ nazywaną liczbą falową[4]

$$N^2 = 1 - \frac{\alpha}{4\Omega_K}, \tag{3.5}$$

która może przyjmować następujące wartości

$$N \in \begin{cases} i(0,\, \infty), & \text{gdy } \Omega_K > 0, \\ \{n\colon 3 \leqslant n \in \mathbb{N}\}, & \text{gdy } \Omega_K < 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

[2] Oznaczając chwilę obecną przez $\eta_0$, mamy $a_0 = a|_{\eta=\eta_0}$ oraz $H_0 = H|_{\eta=\eta_0}$.

[3] W ogólności parametry gęstości energii i parametr falowy definiuje się jako funkcje czasu kosmicznego, więc oznaczeniom ich obecnych wartości należałoby przypisać indeks 0. Nie czynimy tego ze względu na lepszą przejrzystość formuł.

[4] Porównanie formuł (2.69) i (3.5) pokazuje, że w istocie $k = N$. Nie będziemy jednak uzgadniać tych oznaczeń.

Należy zwrócić uwagę, że przeprowadzona powyżej zamiana zmiennej niezależnej w równaniu ewolucji amplitudy jest ogólna w tym sensie, że nie ogranicza się tylko do przypadków, w których czynnik skali jest monotoniczną funkcją czasu. Pozwala ona na bezpośrednie wykorzystanie związku pomiędzy parametrem Hubble'a a czynnikiem skali w modelu tła. Związek ten można uzyskać z równania Friedmanna, które opisuje ewolucję czynnika skali w czasie

$$\dot{a}^2 - \frac{\kappa}{3}\bar{\epsilon}a^4 - \frac{\Lambda}{3}a^4 + Ka^2 = 0. \tag{3.7}$$

Zastosowanie do równania Friedmanna wspomnianych wyżej podstawień daje relację

$$h^2 = \frac{c^2\kappa}{3H_0^2}\bar{\epsilon} + \Omega_\Lambda + \Omega_K\frac{1}{x^2}. \tag{3.8}$$

Po jej wstawieniu do równania ewolucji amplitudy (3.4) uzyskujemy je w następującej formie

$$\begin{aligned} 4x^2\Big(\frac{c^2\kappa}{3H_0^2}\bar{\epsilon}x^2 + \Omega_\Lambda x^2 + \Omega_K\Big)\mu'' + 2\Big(\frac{c^2\kappa}{3H_0^2}(\bar{\epsilon}x^4)' + 4\Omega_\Lambda x^3 + 2\Omega_K x\Big)\mu' \\ - \Big(2\frac{c^2\kappa}{3H_0^2}\frac{(\bar{\epsilon}x^4)'}{x} + 8\Omega_\Lambda x^2 + 4\Omega_K - \alpha\Big)\mu = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Dla ogólnych modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a nie ma bezpośredniego związku pomiędzy gęstością energii płynu a czynnikiem skali. Są one natomiast związane wspólnie z ciśnieniem płynu poprzez równanie ciągłości

$$(\bar{p} + \bar{\epsilon})\dot{a} + \frac{1}{3}\dot{\bar{\epsilon}}a = 0. \tag{3.10}$$

Równanie ciągłości może posłużyć do wyprowadzenia związku pomiędzy gęstością energii a czynnikiem skali, jeśli zostanie ustalony związek pomiędzy ciśnieniem a gęstością energii płynu, na przykład poprzez równanie stanu. Oczywiście wybór równania stanu nieuchronnie będzie wiązał się z zawężeniem ogólności modelu tła. W dalszej części pracy będziemy rozważać szczególne modele Friedmanna–Lemaître'a z płynem barotropowym o liniowym równaniu stanu. W poniższym wyprowadzeniu będą jednak ujęte także ogólniejsze modele wypełnione mieszaniną nieoddziałujących płynów kosmicznych o liniowym, barotropowym równaniu stanu. Tego rodzaju modele stanowią podstawę standardowego modelu kosmologicznego i w ich ramach interpretuje się współczesne obserwacje o znaczeniu kosmologicznym.

Zakładamy więc, że ciśnienie i gęstość energii płynu w modelu tła są sumami ciśnień $\bar{p}_j$ i gęstości energii $\bar{\epsilon}_j$ poszczególnych płynów wchodzących w skład mieszaniny, numerowanych indeksem $j$

$$\bar{p} = \sum_j \bar{p}_j, \qquad \bar{\epsilon} = \sum_j \bar{\epsilon}_j. \tag{3.11}$$

Ponadto zakładamy, że poszczególne płyny składowe nie oddziałują ze sobą (mówiąc ściślej, oddziałują jedynie grawitacyjnie) i dla każdego z nich z osobna spełnione jest równanie ciągłości postaci

$$(\overline{p}_j + \overline{\epsilon}_j)\dot{a} + \frac{1}{3}\dot{\overline{\epsilon}}_j a = 0, \tag{3.12}$$

oraz że każdy z płynów posiada liniowe, barotropowe równanie stanu postaci

$$\overline{p}_j = (\gamma_j - 1)\overline{\epsilon}_j, \tag{3.13}$$

gdzie stałą $\gamma_j$ poprzez analogię termodynamiczną nazywamy wykładnikiem adiabaty $j$-tego płynu. Wielkość $\gamma_j$ jest parametrem ciągłym, przy czym niektóre jej szczególne wartości odpowiadają fizycznie wyróżnionym rodzajom płynów, którymi są:

- próżnia lub stała kosmologiczna ($\gamma = 0$),
- ściany domenowe ($\gamma = \frac{1}{3}$),
- struny kosmiczne lub stała krzywizny ($\gamma = \frac{2}{3}$),
- pył lub materia bezciśnieniowa ($\gamma = 1$),
- promieniowanie lub materia ultrarelatywistyczna ($\gamma = \frac{4}{3}$),
- materia ultralekka ($\gamma = \frac{5}{3}$),
- materia sztywna ($\gamma = 2$).

Scałkowanie warunku ciągłości przy zakładanym równaniu stanu dla poszczególnych płynów prowadzi do związku

$$\overline{\epsilon}_j = \overline{\epsilon}_{0j} x^{-3\gamma_j}, \tag{3.14}$$

gdzie $\overline{\epsilon}_{0j}$ jest obecną wartością gęstości energii $j$-tego płynu. Związek ten pozwala wprowadzić nową stałą bezwymiarową $\Omega_j$

$$\Omega_j = \frac{c^2 \kappa \overline{\epsilon}_{0j}}{3H_0^2}, \tag{3.15}$$

nazywaną obecną wartością parametru gęstości energii $j$-tego płynu i w konsekwencji przepisać równanie Friedmanna (3.8) do postaci

$$h^2 = \sum_j \Omega_j x^{-3\gamma_j} + \Omega_\Lambda + \Omega_K \frac{1}{x^2}. \tag{3.16}$$

Zauważmy, że równanie to, wzięte w chwili obecnej, implikuje stały związek pomiędzy obecnymi wartościami parametrów gęstości

$$\sum_j \Omega_j + \Omega_K + \Omega_\Lambda = 1. \tag{3.17}$$

Przy poczynionych założeniach równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych w modelach kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a (3.9) dla modeli wypełnionych mieszaniną nieoddziałujących płynów barotropowych o liniowym równaniu stanu przyjmuje postać

$$\begin{aligned}4x^2\Big(\sum_j \Omega_j x^{2-3\gamma_j} + \Omega_\Lambda x^2 + \Omega_K\Big)\mu'' \\ + 2x\Big(\sum_j (4-3\gamma_j)\Omega_j x^{2-3\gamma_j} + 4\Omega_\Lambda x^2 + 2\Omega_K\Big)\mu' \\ - \Big(2\sum_j (4-3\gamma_j)\Omega_j x^{2-3\gamma_j} + 8\Omega_\Lambda x^2 + 4\Omega_K - \alpha\Big)\mu = 0. \qquad (3.18)\end{aligned}$$

W takiej formie równanie to jest bardzo ogólnym równaniem różniczkowym, za co odpowiada występowanie wielkości $\gamma_j$ w wykładnikach potęg zmiennej niezależnej. Widoczne jest jednak, że w przypadkach, gdy wyrażenia $3\gamma_j$ będą liczbami całkowitymi, wówczas współczynniki równania (3.18) staną się wyrażeniami wymiernymi w zmiennej niezależnej. W takich przypadkach możliwe będzie dokładne sklasyfikowanie równania różniczkowego na podstawie ilości i analizy charakteru jego punktów osobliwych. Teorię takiej klasyfikacji wprowadzono dla funkcji specjalnych i została ona przedstawiona na przykład w książce Slavyanova i Laya [157]. Opiera się ona na własnościach, określanych poprzez tak zwane wykładniki charakterystyczne, lokalnych rozwiązań równania różniczkowego w otoczeniu jego punktów osobliwych, które zależą od rzędu osobliwości w danym punkcie. Streszczenie podstawowych definicji wypracowanych na potrzeby tej klasyfikacji umieściliśmy w dodatkach (A) i (B) rozprawy.

W kolejnych podrozdziałach pracy będziemy poszukiwać jawnych, analitycznych rozwiązań równania różniczkowego (3.18) posiadających zamkniętą formę. Funkcje mające tego rodzaju własności nazywane są funkcjami liouville'owskimi [97, 156]. Są one zbudowane ze skończonej liczby operacji algebraicznych, operacji brania funkcji pierwotnej z wyrażeń algebraicznych oraz operacji brania eksponenty z całek wyrażeń algebraicznych. Do klasy funkcji liouville'owskich należą między innymi funkcje wykładnicze, trygonometryczne i hiperboliczne, ich funkcje odwrotne, czyli funkcje logarytmiczne, cyklometryczne i area, a także całki eliptyczne. Podstawową zaletą rozwiązań zapisanych w formie liouville'owskiej jest ich jawność i ważność w całej dziedzinie równania różniczkowego. Z tym wiąże się możliwość bezpośredniego wglądu w globalne analityczne właściwości rozwiązań oraz perspektywa bezproblemowej manipulacji takimi rozwiązaniami. O równaniach różniczkowych posiadających rozwiązania liouville'owskie mówi się, że są całkowalne przez kwadratury, natomiast o równaniach, które takich rozwiązań nie posiadają, że są niecałkowalne. Liouville'owskich rozwiązań równania ewolucji amplitudy (3.18) dla fizycznie wyróżnionych wartości wykładnika adiabaty będziemy poszukiwać, posługując się klasyczną metodą pochodzącą od Hermite'a i Darboux.

## 3.3 Ansatz Hermite'a–Darboux

W tej części przedstawimy metodę poszukiwania liouville'owskich rozwiązań jednorodnych, liniowych, zwyczajnych równań różniczkowych drugiego rzędu, posiadających wymierne współczynniki w zmiennej niezależnej, zaproponowaną przez Hermite'a i Darboux. Jej najwcześniejsze opisy pojawiają się w wykładach Hermite'a z lat 1872–1873 [184, 158] w kontekście badań równania Lamégo. Pierwsze poważne jej zastosowanie zostało przedstawione przez Darboux [34] przy okazji poszukiwań rozwiązań pewnego szczególnego równania Heunego. O fakcie tym przypomniał Valent w pracy [181]. Dalej metodę tę rozwinęli Lindemann [107] i Stieltjes [164, 165], wykorzystując ją do analizy rozwiązań ogólnego równania Mathieu. Ich wyniki zostały podsumowane w książce Whittakera i Watsona [184]. Metoda ta również współcześnie znalazła zastosowanie do równania Lamégo na przykład w pracach Greene'a *et al.* [71] oraz Maslova i Shagalova [116], lub także do ogólniejszego równania Hilla w pracy Koutvitsky'ego i Maslova [99].

Tutaj odpowiednio zaadaptujemy metodę Hermite'a–Darboux na potrzeby rozważanego równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych. W tym miejscu warto zaznaczyć, że nadal prowadzone są prace nad głębszym zrozumieniem i uzasadnieniem metody Hermite'a–Darboux. Jest to ważne, ponieważ metoda ta jest dość szeroko stosowana w wielorakich zagadnieniach praktycznych, zwłaszcza w fizyce, a o jej użyteczności świadczy jej niewątpliwa skuteczność. Temat ten jest rozwijany między innymi przez Smirnova [159, 160] i Takemurę [168, 169], wciąż jednak wymaga dalszych wnikliwych badań.

Stosując podejście Hermite'a–Darboux, postulujemy, że rozwiązania równania ewolucji amplitudy (3.4) dają się przedstawić w formie

$$\mu = A\nu + B\nu^*, \tag{3.19}$$

gdzie gwiazdka oznacza sprzężenie zespolone, $A$ i $B$ są dowolnymi stałymi zespolonymi oraz

$$\nu = e\sqrt{g}\exp\left(-i\frac{\sqrt{\beta}}{2}\int\limits_1^x \frac{dy}{fg}\right), \tag{3.20}$$

gdzie zmienne $f$ i $g$ są rzeczywistymi funkcjami znormalizowanego czynnika skali, a $e$ i $\beta$ są stałymi, przy czym $\beta$ jest rzeczywista i dodatnia. Całkowanie w obecnej w ansatzu całce przebiega po znormalizowanym czynniku skali. Wybór dolnej granicy całkowania należy do konwencji i tutaj ustalamy ją tak, aby całka zerowała się dla $x = 1$.

Po wstawieniu ansatzu (3.20) do równania (3.4) otrzymujemy pewne zespolone równanie różniczkowe. Obie jego części, rzeczywista i urojona, muszą być spełnione niezależnie, ponieważ zakładamy, że obie nowo wprowadzone zmienne w (3.20) są rzeczywiste, a $\beta > 0$. Część urojona tego równania daje następujące proste równanie na zmienną $f$

$$f' - \frac{(x^2 h)'}{x^2 h} f = 0, \tag{3.21}$$

którego rozwiązaniem jest

$$f = x^2 h, \tag{3.22}$$

przy czym założyliśmy, że $f|_{x=1} = 1$. Zauważmy, że w związku z tym dla elementu całkowania w (3.20) zachodzi

$$\frac{dx}{f} = \frac{dx}{x^2 h} = \frac{a_0 H_0}{c}\, d\eta, \tag{3.23}$$

co oznacza, że efektywnie wielkość $\frac{1}{g}$ jest całkowana po bezwymiarowym czasie konforemnym. Jest to charakterystyczna cecha metody Hermite'a–Darboux, że efektywną zmienną całkowania w ansatzu (3.20) jest ta zmienna niezależna, w której równanie różniczkowe dla rozważanej zmiennej zależnej przyjmuje postać normalną (bez pierwszej pochodnej).

Część rzeczywistą wspomnianego równania zespolonego możemy z kolei zapisać w formie

$$\beta = 2x^4 h^2 g g'' - x^4 h^2 g'^2 + (x^4 h^2)' g g' - \Big(2\frac{(x^4 h^2)'}{x} - \alpha\Big) g^2, \tag{3.24}$$

gdzie wykorzystaliśmy już znajomość postaci zmiennej $f$. Jest to w istocie formuła, za pomocą której przy znajomości zmiennej $g$ możliwe jest wyliczenie stałej $\beta$. Równanie różniczkowe dla samej zmiennej $g$ uzyskujemy ze zróżniczkowania powyższej formuły

$$\begin{aligned} 2x^4 h^2 g''' + 3(x^4 h^2)' g'' + \Big((x^4 h^2)'' - 4\frac{(x^4 h^2)'}{x} + 2\alpha\Big) g' \\ - 2\frac{1}{x}\Big((x^4 h^2)'' - \frac{(x^4 h^2)'}{x}\Big) g = 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Za zmienną $g$ można przyjąć dowolne rozwiązanie powyższego równania. Znalezienie jednego z nich jest równoznaczne z rozwiązaniem równania wyjściowego (3.4). Z oczywistych względów równanie różniczkowe (3.25) jest trudniejsze od oryginalnego i nie istnieje ogólny przepis znajdowania jego rozwiązań. Znany jest jednak fakt, że dla wielu interesujących klas równań różniczkowych drugiego rzędu rozwiązania tego równania mają postać wymierną. Tutaj będziemy ich poszukiwać dla konkretnych modeli kosmologicznych metodą Frobeniusa w postaci szeregów Laurenta, jeśli okaże się to możliwe, skończonych. Rzeczą wartą uwagi jest, że uzyskane zwyczajne równanie różniczkowe trzeciego rzędu dla zmiennej $g$ jest liniowe i jednorodne. Wynika to z własności samego ansatzu Hermite'a–Darboux i nie zależy od szczegółów rozważanego wyjściowego równania różniczkowego drugiego rzędu.

Stała $e$ nie jest istotna przy poszukiwaniu samych rozwiązań, wprowadzamy ją jednak, aby móc ujednolicić rozwiązania znalezione. Czynimy to poprzez narzucenie na rozwiązania następującego warunku normalizacyjnego

$$\nu\dot{\nu}^* - \dot{\nu}\nu^* = 2i\sqrt{-(Q-2K)}. \tag{3.26}$$

Warunek ten implikuje, że (znak wybieramy tak, by $e$ było dodatnie)

$$e = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{3.27}$$

i jest jednoznaczny w tym sensie, że nie zależy od wyboru stałej multiplikatywnej przy zmiennej $g$.

## 3.4 Rozwiązania równania ewolucji amplitudy

W tej części przedstawimy nowo znalezione liouville'owskie rozwiązania równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych w modelach kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a (3.18) i szczegółowo omówimy metody ich wyprowadzenia. Będą to rozwiązania dla wybranych szczególnych modeli z obecną stałą kosmologiczną i krzywizną przestrzenną, wypełnionych pojedynczym, barotropowym płynem kosmicznym o liniowym równaniu stanu. W miarę konieczności, gdy ogólne rozwiązania nie będą istniały, będziemy również rozpatrywać zawężone podprzypadki tych modeli. Rozważymy płyny najbardziej interesujące z fizycznego punktu widzenia, które zostały wyszczególnione na przedstawionej wcześniej liście, czyli pył, promieniowanie, ściany domenowe, materię ultralekką i materię sztywną. Nie będziemy osobno rozpatrywać próżni ani strun kosmicznych, bowiem w równaniu różniczkowym (3.18), dzięki uprzedniemu wprowadzeniu parametru falowego $\alpha$, są one właściwie nieodróżnialne od odpowiednio stałej kosmologicznej i stałej krzywizny. Zwracamy uwagę, że w obliczeniach konsekwentnie posługujemy się bezwymiarowymi parametrami gęstości energii, które mogą być bezpośrednio wyznaczane dzięki obserwacjom astronomicznym. Wszystkie podane w tym podrozdziale rozwiązania liouville'owskie są nowe, nieznane wcześniej w literaturze.

### 3.4.1 Modele wypełnione pyłem

Dla modeli ze stałą kosmologiczną, przestrzennie zakrzywionych, wypełnionych pyłem ($\gamma = 1$), równanie Friedmanna (3.16) przyjmuje następującą formę

$$h^2 = \Omega_\Lambda + \Omega_K \frac{1}{x^2} + \Omega_d \frac{1}{x^3}, \qquad \Omega_K = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_d, \tag{3.28}$$

gdzie przez $\Omega_d$ oznaczamy obecną wartość parametru gęstości energii pyłu. Stad równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.18) dla tych modeli przyjmuje postać

$$\begin{split} 4x^2\big(\Omega_\Lambda x^3 + \Omega_K x + \Omega_d\big)\mu'' + 2x\big(4\Omega_\Lambda x^3 + 2\Omega_K x + \Omega_d\big)\mu' \\ - \big(8\Omega_\Lambda x^3 - (\alpha - 4\Omega_K)x + 2\Omega_d\big)\mu = 0. \end{split} \tag{3.29}$$

Równanie to posiada pięć punktów osobliwych (w tym jeden w nieskończoności), z których wszystkie są regularne, należy wobec tego do równań różniczkowych klasy Fuchsa. Równania różniczkowe posiadające pięć regularnych punktów osobliwych były analizowane między innymi przez Crowsona [30]. Ogólne warunki całkowalności dla tego typu równań nie są znane w literaturze.

Tabela 3.1: Charakterystyka punktów osobliwych równania (3.29). Oznaczono $v_0 = \left(\sqrt{1+\frac{4\Omega_K^3}{27\Omega_\Lambda\Omega_d^2}}+1\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{1+\frac{4\Omega_K^3}{27\Omega_\Lambda\Omega_d^2}}-1\right)^{\frac{1}{3}}$ i $v_1 = \left(\sqrt{1+\frac{4\Omega_K^3}{27\Omega_\Lambda\Omega_d^2}}+1\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\sqrt{1+\frac{4\Omega_K^3}{27\Omega_\Lambda\Omega_d^2}}-1\right)^{\frac{1}{3}}$.

| punkt osobliwy | rząd | wykładniki charakterystyczne |
|---|---|---|
| $0$ | 1 | $\{1, -\frac{1}{2}\}$ |
| $-\left(\frac{\Omega_d}{2\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}} v_0$ | 1 | $\{\frac{1}{2}, 0\}$ |
| $\frac{1}{2}\left(\frac{\Omega_d}{2\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}}(v_0 + i\sqrt{3}v_1)$ | 1 | $\{\frac{1}{2}, 0\}$ |
| $\frac{1}{2}\left(\frac{\Omega_d}{2\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}}(v_0 - i\sqrt{3}v_1)$ | 1 | $\{\frac{1}{2}, 0\}$ |
| $\infty$ | 1 | $\{2, -1\}$ |

Równanie różniczkowe na zmienną $g$ w ansatzu Hermite'a–Darboux dla rozwiązań równania (3.29) przyjmuje postać

$$\begin{split} 2x^3\big(\Omega_\Lambda x^3 + \Omega_K x + \Omega_d\big)g''' + 3x^2\big(4\Omega_\Lambda x^3 + 2\Omega_K x + \Omega_d\big)g'' \\ - 2x\big(2\Omega_\Lambda x^3 - (\alpha - 3\Omega_K)x + 2\Omega_d\big)g' - 2\big(8\Omega_\Lambda x^3 - \Omega_d\big)g = 0. \end{split} \tag{3.30}$$

Jak pamiętamy, potrzebujemy znaleźć jedno nietrywialne rozwiązanie powyższego równania. Poszukujemy go metodą Frobeniusa, zakładając, że w otoczeniu pewnego punktu $x_0$ ma ono postać szeregu potęgowego

$$g = (x - x_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} c_{s,n}(x - x_0)^n, \tag{3.31}$$

gdzie współczynniki szeregu $c_{s,n}$ oraz wykładnik $s$ są stałymi. Tutaj będziemy rozpatrywać punkt $x_0 = 0$, który jest regularnym punktem osobliwym równania (3.29). Po podstawieniu tego założenia do równania różniczkowego uzyskujemy trzy dopuszczalne wartości, jakie może przyjmować wykładnik pomocniczy $s$

$$s \in \left\{2,\, \frac{1}{2},\, -1\right\}, \tag{3.32}$$

stąd do dyspozycji będziemy mieli trzy szeregi. Ponadto otrzymujemy następującą relację rekurencyjną dla współczynników szeregu

$$c_{s,1} = -\frac{2s(\alpha + (s-2)(s+2)\Omega_K)}{(s-1)(s+2)(2s+1)\Omega_d} c_{s,0}, \tag{3.33a}$$

$$c_{s,2} = -\frac{2(s+1)(\alpha + (s-1)(s+3)\Omega_K)}{s(s+3)(2s+3)\Omega_d} c_{s,1}, \tag{3.33b}$$

$$\begin{aligned} c_{s,n} = &-\frac{2(n+s-1)(\alpha + (n+s-3)(n+s+1)\Omega_K)}{(n+s-2)(n+s+1)(2n+2s-1)\Omega_d} c_{s,n-1} \\ &- \frac{2(n+s-5)\Omega_\Lambda}{(2n+2s-1)\Omega_d} c_{s,n-3}, \end{aligned} \tag{3.33c}$$

która jest zdefiniowana dla

$$n \geqslant 3 \quad \wedge \quad (n+s-2)(n+s+1)(2n+2s-1) \neq 0.$$

Współczynnik $c_{s,0}$ mnoży wszystkie pozostałe współczynniki i zakładamy o nim jedynie, że jest niezerowy. W tym miejscu przyjrzymy się bliżej relacji rekurencyjnej, aby sprawdzić, czy możliwe jest urwanie przynajmniej jednego z tych szeregów i uzyskanie rozwiązania w zamkniętej formie. Widoczne jest, że ograniczenia na dziedzinę relacji rekurencyjnej powodują, że jeden ze współczynników, mianowicie $c_{-1,3}$, pozostaje nieokreślony. Szereg dla wykładnika $s = -1$ posiada także inne ciekawe własności. Po pierwsze współczynnik $c_{-1,2}$ tożsamościowo znika. Po drugie współczynnik $c_{-1,6}$ zależy jedynie od współczynnika $c_{-1,4}$. Te dwa fakty sprawiają, że wszystkie współczynniki począwszy od $c_{-1,5}$ efektywnie są wielokrotnością współczynnika $c_{-1,4}$. Ten z kolei zależy od współczynnika $c_{-1,1}$ i nieokreślonego $c_{-1,3}$. Wybierając

$$c_{-1,3} = \frac{4\Omega_\Lambda(\alpha - 3\Omega_K)}{\Omega_d \alpha} c_{-1,0}, \tag{3.34}$$

zerujemy współczynnik $c_{-1,4}$ i wszystkie następne, urywając w ten sposób szereg dla wykładnika $s = -1$. Wobec tego za rozwiązanie równania (3.30) możemy przyjąć

$$g = 4\Omega_\Lambda(\alpha - 3\Omega_K)x^2 + \alpha(\alpha - 3\Omega_K) + \Omega_d \alpha \frac{1}{x}. \tag{3.35}$$

Następnie, korzystając z formuły (3.24), wyliczamy stałą $\beta$ występującą w ansatzu Hermite'a–Darboux

$$\beta = \alpha(\alpha - 4\Omega_K)\big(\alpha(\alpha - 3\Omega_K)^2 + 27\Omega_\Lambda\Omega_d^2\big). \tag{3.36}$$

Widoczne jest, że w zależności od wartości poszczególnych parametrów znak stałej $\beta$ może się zmieniać. Dla $\beta \leqslant 0$ rozwiązanie oscylacyjne[5] w postaci Hermite'a–Darboux formalnie nie będzie obowiązywać. Analiza wyrażenia (3.36) pokazuje, że generalnie $\beta \leqslant 0$ może wystąpić dla modeli, dla których $\Omega_\Lambda < 0$ i $\Omega_K \approx 0$. Dla takich modeli istnieje minimalna obecna wartość parametru falowego, poniżej której propagacja swobodnych zaburzeń tensorowych jest niedozwolona. Dla pozostałych modeli, w szczególności dla fizycznie interesujących modeli z obecnymi wartościami parametrów gęstości energii z zakresu $(\Omega_d,\, \Omega_\Lambda) \in (0,\, 1)\times(0,\, 1)$, dla każdej dozwolonej obecnej wartości parametru falowego zachodzi $\beta > 0$. Rozwiązanie równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.29) przyjmuje wówczas postać

$$\begin{aligned} \nu = {} & \frac{\sqrt{4\Omega_\Lambda(\alpha - 3\Omega_K)x^2 + \alpha(\alpha - 3\Omega_K) + \Omega_d\alpha\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{(\alpha - 4\Omega_K)(\alpha(\alpha - 3\Omega_K)^2 + 27\Omega_\Lambda\Omega_d^2)}} \\ & \times\exp\left(-\frac{i}{2}\int\limits_1^x \frac{\sqrt{\alpha(\alpha - 4\Omega_K)(\alpha(\alpha - 3\Omega_K)^2 + 27\Omega_\Lambda\Omega_d^2)}y\,dy}{(4\Omega_\Lambda(\alpha - 3\Omega_K)y^3 + \alpha(\alpha - 3\Omega_K)y + \Omega_d\alpha)\sqrt{y(\Omega_\Lambda y^3 + \Omega_K y + \Omega_d)}}\right). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Obecną w rozwiązaniu całkę można wyrazić jawnie za pomocą całek eliptycznych. Zostało to przedstawione w podrozdziale (3.5.1) pracy.

### 3.4.2 Modele wypełnione promieniowaniem

Dla modeli ze stałą kosmologiczną, przestrzennie zakrzywionych, wypełnionych promieniowaniem ($\gamma = \frac{4}{3}$), równanie Friedmanna (3.16) przyjmuje następującą formę

$$h^2 = \Omega_\Lambda + \Omega_K\frac{1}{x^2} + \Omega_r\frac{1}{x^4}, \qquad \Omega_K = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_r, \tag{3.38}$$

gdzie przez $\Omega_r$ oznaczamy obecną wartość parametru gęstości energii promieniowania. Równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.18) dla tych modeli przyjmuje postać

$$\begin{aligned} 4\big(\Omega_\Lambda x^4 + \Omega_K x^2 + \Omega_r\big)\mu'' + 4x\big(2\Omega_\Lambda x^2 + \Omega_K\big)\mu' \\ - \big(8\Omega_\Lambda x^2 - (\alpha - 4\Omega_K)\big)\mu = 0. \end{aligned} \tag{3.39}$$

[5] Poprzez funkcję oscylacyjną na zadanej krzywej będziemy rozumieć funkcję, która na tej krzywej posiada nieskończenie wiele punktów zerowych [157].

Równanie to należy do równań różniczkowych klasy Fuchsa z pięcioma regularnymi punktami osobliwymi.

Tabela 3.2: Charakterystyka punktów osobliwych równania (3.39). Oznaczono $v_0 = \sqrt{1 - \frac{\Omega_K}{2\sqrt{\Omega_\Lambda \Omega_r}}}$ i $v_1 = \sqrt{1 + \frac{\Omega_K}{2\sqrt{\Omega_\Lambda \Omega_r}}}$.

| punkt osobliwy | rząd | wykładniki charakterystyczne |
|---|---|---|
| $\left(\frac{\Omega_r}{4\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{4}}(v_0 + iv_1)$ | 1 | $\left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$ |
| $-\left(\frac{\Omega_r}{4\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{4}}(v_0 - iv_1)$ | 1 | $\left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$ |
| $-\left(\frac{\Omega_r}{4\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{4}}(v_0 + iv_1)$ | 1 | $\left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$ |
| $\left(\frac{\Omega_r}{4\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{4}}(v_0 - iv_1)$ | 1 | $\left\{\frac{1}{2}, 0\right\}$ |
| $\infty$ | 1 | $\left\{2, -1\right\}$ |

Równanie różniczkowe na zmienną $g$ w ansatzu Hermite'a–Darboux dla rozwiązań równania (3.39) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\left(\Omega_\Lambda x^4 + \Omega_K x^2 + \Omega_r\right)g''' + 3x\left(2\Omega_\Lambda x^2 + \Omega_K\right)g'' \\ - \left(2\Omega_\Lambda x^2 - (\alpha - 3\Omega_K)\right)g' - 8\Omega_\Lambda x g = 0.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Rozwiązania powyższego równania tak jak poprzednio poszukujemy metodą Frobeniusa, zakładając, że ma ono postać szeregu potęgowego (3.31) w otoczeniu punktu $x_0 = 0$, który jest punktem zwyczajnym równania (3.39). W wyniku wstawienia tego szeregu do równania różniczkowego otrzymujemy trzy dopuszczalne wartości dla wykładnika szeregu $s$

$$s \in \left\{2,\, 1,\, 0\right\}, \tag{3.41}$$

przy których początkowe współczynniki szeregu oraz relacja rekurencyjna przyjmują następującą formę

$$c_{2,1} = 0, \tag{3.42a}$$

$$c_{2,2} = -\frac{\alpha}{12\Omega_r}c_{2,0}, \qquad c_{1,2} = -\frac{\alpha - 3\Omega_K}{6\Omega_r}c_{1,0}, \tag{3.42b}$$

$$c_{s,3} = -\frac{\alpha + (s-1)(s+3)\Omega_K}{(s+2)(s+3)\Omega_r}c_{s,1}, \tag{3.42c}$$

$$\begin{aligned}c_{s,n} = &-\frac{\alpha + (n+s-4)(n+s)\Omega_K}{(n+s-1)(n+s)\Omega_r}c_{s,n-2} \\ &-\frac{(n+s-6)(n+s-3)\Omega_\Lambda}{(n+s-2)(n+s-1)\Omega_r}c_{s,n-4},\end{aligned} \tag{3.42d}$$

gdzie dziedziną relacji rekurencyjnej jest zbiór

$$n \geqslant 4 \quad \wedge \quad (n+s-2)(n+s-1)(n+s) \neq 0.$$

Nieokreślone pozostają współczynniki: $c_{2,0}$, koniecznie niezerowy, $c_{1,0}$ i $c_{1,1}$, z których co najmniej jeden jest niezerowy, oraz $c_{0,0}$, $c_{0,1}$ i $c_{0,2}$, z których również przynajmniej jeden jest niezerowy. Z postaci relacji rekurencyjnej widoczne jest, że współczynniki parzyste i nieparzyste w szeregach są od siebie niezależne. Z punktu widzenia możliwości urwania szeregu interesujący jest więc jedynie szereg dla wykładnika $s = 0$. Dla tego szeregu każdy parzysty współczynnik począwszy od $c_{0,6}$ zależy efektywnie tylko od współczynnika $c_{0,4}$. Aby uzyskać z niego skończony szereg, należy wyzerować współczynnik $c_{0,4}$ i wszystkie współczynniki nieparzyste, wybierając

$$c_{0,2} = \frac{4\Omega_\Lambda}{\alpha} c_{0,0}, \qquad c_{0,1} = 0. \tag{3.43}$$

W ten sposób otrzymujemy jedno z rozwiązań równania (3.40)

$$g = 4\Omega_\Lambda x^2 + \alpha. \tag{3.44}$$

Dla naszych celów wynik ten jest jednak wystarczający. Jest rzeczą interesującą, że uzyskane rozwiązanie nie zależy ani od parametru $\Omega_K$, ani $\Omega_r$. Stałą $\beta$ wyliczamy na podstawie formuły (3.24), otrzymując

$$\beta = \alpha\big(\alpha(\alpha - 4\Omega_K) + 16\Omega_\Lambda\Omega_r\big). \tag{3.45}$$

Dla modeli z $\Omega_\Lambda < 0$ i $\Omega_K \approx 0$ lub $\Omega_r < 0$ i $\Omega_K \approx 0$ dla pewnych obecnych wartości parametru falowego może wystąpić $\beta \leqslant 0$. Wówczas rozwiązanie równania ewolucji amplitudy traci swój oscylacyjny charakter i propagacja zaburzeń jest niemożliwa. Dla pozostałych modeli, w szczególności dla modeli z zakresem obecnych wartości parametrów gęstości energii $(\Omega_r, \Omega_\Lambda) \in (0, 1) \times (0, 1)$, dla każdej dozwolonej obecnej wartości parametru falowego zachodzi $\beta > 0$ i rozwiązanie równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.39) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\nu = {} & \frac{\sqrt{4\Omega_\Lambda x^2 + \alpha}}{\sqrt[4]{\alpha(\alpha - 4\Omega_K) + 16\Omega_\Lambda\Omega_r}} \\ & \times \exp\left(-\frac{i}{2}\int\limits_1^x \frac{\sqrt{\alpha(\alpha(\alpha - 4\Omega_K) + 16\Omega_\Lambda\Omega_r)}\,dy}{(4\Omega_\Lambda y^2 + \alpha)\sqrt{\Omega_\Lambda y^4 + \Omega_K y^2 + \Omega_r}}\right).\end{aligned} \tag{3.46}$$

Obecna w rozwiązaniu całka została wyrażona za pomocą całek eliptycznych w podrozdziale (3.5.2) pracy.

Jak zauważyliśmy, relacja rekurencyjna (3.42) zawiera w sobie dwie wzajemnie rozłączne serie, jedną obejmującą wyrazy parzyste i drugą z wyrazami nieparzystymi. Dzieje się tak, ponieważ dla równania różniczkowego (3.39) istnieje kwadratowa transformacja zmiennej niezależnej upraszczająca formę równania. Co więcej okazuje się, że przekształcenie zmiennych postaci

$$z = -\frac{\Omega_K}{2\Omega_r} w_1 x^2, \qquad \mu = z^a f, \qquad a \in \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}, \tag{3.47}$$

gdzie pomocnicze stałe wynoszą

$$w_1 = 1 + \sqrt{1 - \frac{4\Omega_\Lambda \Omega_r}{\Omega_K^2}}, \qquad w_0 = 1 - \sqrt{1 - \frac{4\Omega_\Lambda \Omega_r}{\Omega_K^2}}, \tag{3.48}$$

a $f$ jest funkcją zmiennej $z$, obniża liczbę punktów osobliwych tego równania z pięciu do czterech i sprowadza je do równania różniczkowego klasy Heunego. Stąd w tym przypadku rozwiązania równania (3.39) możemy zapisać następująco

$$\begin{aligned}\mu = Ax\,\mathrm{H_g}\Big(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1-N^2}{2w_0}; \frac{w_1}{w_0}\Big| -\frac{\Omega_K}{2\Omega_r}w_1x^2\Big) \\ + B\,\mathrm{H_g}\Big(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{N^2}{2w_0}; \frac{w_1}{w_0}\Big| -\frac{\Omega_K}{2\Omega_r}w_1x^2\Big),\end{aligned} \tag{3.49}$$

gdzie wielkość $N$, zwana liczbą falową, dana jest formułą (3.5), a $A$ i $B$ są dowolnymi stałymi zespolonymi. Funkcja $\mathrm{H_g}(a, b, c, d; q; o|\, z)$ jest ogólną funkcją Heunego, która jest zdefiniowana jako rozwiązanie równania różniczkowego Heunego

$$\frac{d^2\,\mathrm{H_g}}{dz^2} + \Big(\frac{c}{z} + \frac{d}{z-1} + \frac{e}{z-o}\Big)\frac{d\,\mathrm{H_g}}{dz} + \frac{abz-q}{z(z-1)(z-o)}\,\mathrm{H_g} = 0, \tag{3.50}$$

gdzie $e = 1 + a + b - c - d$, które odpowiada zerującemu się wykładnikowi Frobeniusa w regularnym punkcie osobliwym $z = 0$ [158]. Ogólne warunki całkowalności równania Heunego nie zostały do tej pory zupełnie poznane. Ostatnie, niepełne wyniki na ten temat można znaleźć w pracy Duval i Loday-Richaud [43]. Rozpatrzony tutaj przypadek okazuje się być jednym z tych, dla których równanie Heunego posiada rozwiązania liouville'owskie.

### 3.4.3 Modele wypełnione ścianami domenowymi

Dla modeli ze stałą kosmologiczną, przestrzennie zakrzywionych, wypełnionych ścianami domenowymi ($\gamma = \frac{1}{3}$), równanie Friedmanna (3.16) przyjmuje następującą formę

$$h^2 = \Omega_\Lambda + \Omega_w \frac{1}{x} + \Omega_K \frac{1}{x^2}, \qquad \Omega_K = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_w, \tag{3.51}$$

gdzie przez $\Omega_w$ oznaczamy obecną wartość parametru gęstości energii ścian domenowych. Równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.18) dla tych modeli przyjmuje postać

$$\begin{aligned}4x^2\big(\Omega_\Lambda x^2 + \Omega_w x + \Omega_K\big)\mu'' + 2x\big(4\Omega_\Lambda x^2 + 3\Omega_w x + 2\Omega_K\big)\mu' \\ - \big(8\Omega_\Lambda x^2 + 6\Omega_w x - (\alpha - 4\Omega_K)\big)\mu = 0.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Tabela 3.3: Charakterystyka punktów osobliwych równania (3.52). Oznaczono $v_0 = \sqrt{1 - \frac{4\Omega_\Lambda \Omega_K}{\Omega_w^2}}$.

| punkt osobliwy | rząd | wykładniki charakterystyczne |
|---|---|---|
| $0$ | 1 | $\left\{ i\sqrt{\frac{\alpha}{4\Omega_K} - 1},\, -i\sqrt{\frac{\alpha}{4\Omega_K} - 1} \right\}$ |
| $-\frac{\Omega_w}{2\Omega_\Lambda}(1 - v_0)$ | 1 | $\left\{ \frac{1}{2},\, 0 \right\}$ |
| $-\frac{\Omega_w}{2\Omega_\Lambda}(1 + v_0)$ | 1 | $\left\{ \frac{1}{2},\, 0 \right\}$ |
| $\infty$ | 1 | $\left\{ 2,\, -1 \right\}$ |

Równanie to należy do równań różniczkowych klasy Fuchsa z czterema regularnymi punktami osobliwymi. Równania tego typu nazywane są równaniami różniczkowymi klasy Heunego [157].

Równanie różniczkowe na zmienną $g$ w ansatzu Hermite'a–Darboux dla poszukiwanych rozwiązań równania (3.52) przyjmuje postać

$$
\begin{aligned}
2x^2\big(\Omega_\Lambda x^2 + \Omega_w x + \Omega_K\big)g''' + 3x\big(4\Omega_\Lambda x^2 + 3\Omega_w x + 2\Omega_K\big)g'' \\
- 2\big(2\Omega_\Lambda x^2 + 3\Omega_w x - (\alpha - 3\Omega_K)\big)g' - 2\big(8\Omega_\Lambda x + 3\Omega_w\big)g = 0. \quad (3.53)
\end{aligned}
$$

Rozwiązań powyższego równania poszukujemy metodą Frobeniusa w postaci szeregu potęgowego (3.31) w otoczeniu punktu $x_0 = 0$, który jest jednym z regularnych punktów osobliwych równania (3.52). Wykładnik pomocniczy $s$ może przyjmować następujące dopuszczalne wartości wyznaczające trzy odrębne szeregi

$$
s \in \Big\{0,\, 2N,\, -2N\Big\}, \quad (3.54)
$$

gdzie wielkość $N$, nazywana liczbą falową, zdefiniowana dla $\Omega_K \neq 0$, dana jest równaniem (3.5). Z kolei relacja rekurencyjna, jaką otrzymujemy dla współczynników szeregu, jest następująca

$$
c_{s,1} = -\frac{(s-2)(s+3)(2s+1)\Omega_w}{2(s+1)(s+1-2N)(s+1+2N)\Omega_K} c_{s,0}, \quad (3.55a)
$$

$$
\begin{aligned}
c_{s,n} = &-\frac{(n+s-3)(n+s+2)(2n+2s-1)\Omega_w}{2(n+s)(n+s-2N)(n+s+2N)\Omega_K} c_{s,n-1} \\
&- \frac{(n+s-4)(n+s-1)(n+s+2)\Omega_\Lambda}{(n+s)(n+s-2N)(n+s+2N)\Omega_K} c_{s,n-2},
\end{aligned} \quad (3.55b)
$$

gdzie

$$
n \geqslant 2 \quad \wedge \quad (n+s)(n+s-2N)(n+s+2N) \neq 0.
$$

Przypadek $\Omega_K = 0$ będziemy zmuszeni rozpatrywać osobno. Teraz natomiast rozważymy, czy istnieje możliwość urwania jednego ze wspomnianych szeregów przy $\Omega_K \neq 0$ i uzyskania w ten sposób rozwiązania równania (3.52) w zamkniętej formie. Dla szeregu z wykładnikiem $s = 0$ formalnie nieokreślony pozostaje współczynnik $c_{0,-2N}$, przy ustalonym $-2N \in \mathbb{N}$, oraz współczynnik $c_{0,2N}$, przy ustalonym $2N \in \mathbb{N}$. Należy zauważyć, że to, który współczynnik w szeregu jest nieokreślony, zależy tutaj od parametru falowego $\alpha$, którego fizycznie dopuszczalne wartości zadane są przez równanie (3.3). Warunki nieokreśloności współczynników szeregu narzucane tutaj na wielkość $N$ mogą być potencjalnie spełnione jedynie przy $\Omega_K < 0$, kiedy to $3 \leqslant N \in \mathbb{N}$.[6] Nieokreśloność współczynnika $c_{0,2N}$ skutkuje jednakże redukcją relacji rekurencyjnej (3.55) dla $n \leqslant 2N$, która prowadzi do warunku $c_{0,0} = 0$. W ten sposób współczynniki poprzedzające współczynnik $c_{0,2N}$ zerują się, natomiast wszystkie następne zależą wyłącznie od niego. Stąd urwanie szeregu z wykładnikiem $s = 0$ nie jest możliwe. Dla szeregu z wykładnikiem $s = 2N$ formalnie nieokreślony pozostaje współczynnik $c_{2N,-2N}$, przy ustalonym $-2N \in \mathbb{N}$, oraz współczynnik $c_{2N,-4N}$, przy ustalonym $-4N \in \mathbb{N}$. Ze względu na ograniczenie $3 \leqslant N \in \mathbb{N}$ wspomniane warunki narzucane na wielkość $N$ nigdy nie wystąpią, stąd urwanie szeregu z wykładnikiem $s = 2N$ również nie jest możliwe. Z kolei dla szeregu z wykładnikiem $s = -2N$ formalnie nieokreślony pozostaje współczynnik $c_{-2N,2N}$, przy ustalonym $2N \in \mathbb{N}$, oraz współczynnik $c_{-2N,4N}$, przy ustalonym $4N \in \mathbb{N}$. Przy $3 \leqslant N \in \mathbb{N}$ poza współczynnikiem $c_{-2N,0}$ w szeregu mogą więc wystąpić dwa dodatkowe nieokreślone współczynniki. Ich nieokreśloność pociąga jednak za sobą redukcję relacji rekurencyjnej (3.55) do warunków $c_{-2N,2N} = 0$ i $c_{-2N,0} = 0$, które zerują współczynniki poprzedzające współczynnik $c_{-2N,4N}$, a współczynniki następne czynią zależnym tylko od niego. Nie ma więc możliwości urwania również szeregu z wykładnikiem $s = -2N$. Podsumowując przeprowadzoną analizę, należy stwierdzić, że równanie różniczkowe (3.52) nie posiada liouville'owskich rozwiązań w formie Hermite'a–Darboux z funkcją $g$ w postaci skończonego szeregu Laurenta w zmiennej $x$. Wynik ten znów stanowi pewien szczególny wkład w ogólne zagadnienie całkowalności równania Heunego [43].

Rozwiązania równania różniczkowego (3.52) możemy jedynie podać, posługując się funkcjami specjalnymi

$$\mu = Ax^{N}\,\mathrm{H_g}\Big(2{+}N,\, -(1{-}N),\, 1{+}2N,\, \frac{1}{2};\, -\frac{(1-N)(3+2N)}{w_0};\, \frac{w_1}{w_0}\Big|-\frac{\Omega_w}{2\Omega_K}w_1 x\Big)$$
$$+Bx^{-N}\,\mathrm{H_g}\Big(2{-}N,\, -(1{+}N),\, 1{-}2N,\, \frac{1}{2};\, -\frac{(1+N)(3-2N)}{w_0};\, \frac{w_1}{w_0}\Big|-\frac{\Omega_w}{2\Omega_K}w_1 x\Big), \tag{3.56}$$

[6] Dla $\Omega_K > 0$ mamy bowiem $N \in i(0,\, \infty)$.

gdzie wprowadziliśmy stałe

$$w_1 = 1 + \sqrt{1 - \frac{4\Omega_\Lambda \Omega_K}{\Omega_w^2}}, \qquad w_0 = 1 - \sqrt{1 - \frac{4\Omega_\Lambda \Omega_K}{\Omega_w^2}}, \tag{3.57}$$

oraz funkcja $\mathrm{H_g}$ jest ogólną funkcją Heunego (3.50), liczba falowa $N$ zdefiniowana jest równaniem (3.5), a $A$ i $B$ są pewnymi stałymi zespolonymi.

### Przypadek bez krzywizny przestrzennej

Dla modeli ze stałą kosmologiczną, bez krzywizny przestrzennej ($\Omega_K = 0$), wypełnionych ścianami domenowymi ($\gamma = \frac{1}{3}$), równanie Friedmanna (3.16) przyjmuje formę

$$h^2 = \Omega_\Lambda + \Omega_w \frac{1}{x}, \qquad \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_w. \tag{3.58}$$

Równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych dla tych modeli (3.18) przyjmuje więc postać

$$4x^3\big(\Omega_\Lambda x + \Omega_w\big)\mu'' + 2x^2\big(4\Omega_\Lambda x + 3\Omega_w\big)\mu' \\ - \big(8\Omega_\Lambda x^2 + 6\Omega_w x - \alpha\big)\mu = 0. \tag{3.59}$$

Równanie to posiada trzy punkty osobliwe, dwa regularne i jeden nieregularny rozgałęziony rzędu $\frac{3}{2}$. Należy ono do klasy zredukowanych, pojedynczo konfluentnych równań różniczkowych Heunego [157].

Tabela 3.4: Charakterystyka punktów osobliwych równania (3.59). Dolnym indeksem przy parach wykładników charakterystycznych w nieregularnym punkcie osobliwym będziemy oznaczać ich stopień (zobacz dodatek (B)).

| punkt osobliwy | rząd | wykładniki charakterystyczne |
|---|---|---|
| $0$ | $\frac{3}{2}$ | $\big\{0,\, 0\big\}_0,\ \big\{i\sqrt{\frac{\alpha}{4\Omega_w}},\, -i\sqrt{\frac{\alpha}{4\Omega_w}}\big\}_{1/2}$ |
| $-\frac{\Omega_w}{\Omega_\Lambda}$ | $1$ | $\big\{\frac{1}{2},\, 0\big\}$ |
| $\infty$ | $1$ | $\big\{2,\, -1\big\}$ |

Równanie różniczkowe na zmienną $g$ w ansatzu Hermite'a–Darboux dla rozwiązań równania (3.59) przyjmuje postać

$$2x^3\big(\Omega_\Lambda x + \Omega_w\big)g''' + 3x^2\big(4\Omega_\Lambda x + 3\Omega_w\big)g'' \\ - 2\big(2\Omega_\Lambda x^2 + 3\Omega_w x - \alpha\big)g' - 2\big(8\Omega_\Lambda x + 3\Omega_w\big)g = 0. \tag{3.60}$$

Sprawdzamy, czy powyższe równanie posiada rozwiązania w postaci skończonego szeregu potęgowego (3.31) w otoczeniu punktu $x_0 = 0$, który jest nieregularnym rozgałęzionym punktem osobliwym rzędu $\frac{3}{2}$ równania (3.59). Okazuje się, że wykładnik pomocniczy $s$ może przyjmować tylko jedną dopuszczalną wartość

$$s = 0. \tag{3.61}$$

Dla współczynników szeregu otrzymujemy natomiast następującą relację rekurencyjną

$$c_{0,1} = \frac{3\Omega_w}{\alpha} c_{0,0}, \tag{3.62a}$$

$$c_{0,n} = -\frac{(n-3)(n+2)(2n-1)\Omega_w}{2n\alpha} c_{0,n-1} - \frac{(n-4)(n-1)(n+2)\Omega_\Lambda}{n\alpha} c_{0,n-2}, \tag{3.62b}$$

gdzie $n \geqslant 2$. Wyznaczony w ten sposób szereg nie urywa się w sposób samoczynny, ani nie posiada nieokreślonych współczynników, co również nie stwarza żadnych innych możliwości jego urwania. Uzyskujemy więc, że równanie różniczkowe (3.59) nie posiada liouville'owskich rozwiązań w formie Hermite'a–Darboux z funkcją $g$ w postaci skończonego szeregu Laurenta w zmiennej $x$.

Formalne, asymptotyczne rozwiązania równania różniczkowego (3.59) w pobliżu punktu $x_0 = 0$, który jest jego rozgałęzionym nieregularnym punktem osobliwym rzędu $\frac{3}{2}$, można skonstruować za pomocą subnormalnych szeregów Thomégo [157] (zobacz również dodatek (B)). Podstawiając do równania różniczkowego założenie

$$\mu = x^{s_0} \exp\Big(-\frac{2s_{1/2}}{x^{1/2}}\Big) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n/2}, \tag{3.63}$$

gdzie $s_0$ i $s_{1/2}$ są stałymi nazywanymi wykładnikami Thomégo, otrzymujemy następujące warunki dla wykładników charakterystycznych

$$s_{1/2} \in \Big\{ i\sqrt{\frac{\alpha}{4\Omega_w}}, -i\sqrt{\frac{\alpha}{4\Omega_w}} \Big\}, \qquad s_0 = 0, \tag{3.64}$$

oraz relację rekurencyjną dla współczynników szeregu

$$a_1 = -\frac{2\Omega_\Lambda s_{1/2}^2 - 3\Omega_w}{2\Omega_w s_{1/2}} a_0, \tag{3.65a}$$

$$a_2 = -\frac{\Omega_\Lambda s_{1/2}^2 - \Omega_w}{2\Omega_w s_{1/2}} a_1 - \frac{\Omega_\Lambda}{4\Omega_w} a_0, \tag{3.65b}$$

$$\begin{aligned} a_n = &-\frac{4\Omega_\Lambda s_{1/2}^2 + (n-3)(n+2)\Omega_w}{4n\Omega_w s_{1/2}} a_{n-1} - \frac{(2n-3)\Omega_\Lambda}{2n\Omega_w} a_{n-2} \\ &- \frac{(n-5)(n+1)\Omega_\Lambda}{4n\Omega_w s_{1/2}} a_{n-3}, \end{aligned} \tag{3.65c}$$

gdzie $n \geqslant 3$. Dwa liniowo niezależne rozwiązania wyznaczone są przez dwie dopuszczalne wartości wykładnika $s_{1/2}$.

**Przypadek bez stałej kosmologicznej**

Dla modeli bez stałej kosmologicznej ($\Omega_\Lambda = 0$), przestrzennie zakrzywionych, wypełnionych ścianami domenowymi ($\gamma = \frac{1}{3}$), równanie Friedmanna (3.16) przyjmuje formę

$$h^2 = \Omega_w \frac{1}{x} + \Omega_K \frac{1}{x^2}, \qquad \Omega_K = 1 - \Omega_w. \tag{3.66}$$

Równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.18) dla tych modeli przyjmuje postać

$$4x^2\big(\Omega_w x + \Omega_K\big)\mu'' + 2x\big(3\Omega_w x + 2\Omega_K\big)\mu' - \big(6\Omega_w x - (\alpha - 4\Omega_K)\big)\mu = 0. \tag{3.67}$$

Równanie to posiada trzy regularne punkty osobliwe, należy wobec tego do klasy równań różniczkowych Gaussa [157].

Tabela 3.5: Charakterystyka punktów osobliwych równania (3.67).

| punkt osobliwy | rząd | wykładniki charakterystyczne |
|---|---|---|
| $0$ | 1 | $\left\{i\sqrt{\frac{\alpha}{4\Omega_K} - 1},\, -i\sqrt{\frac{\alpha}{4\Omega_K} - 1}\right\}$ |
| $-\frac{\Omega_K}{\Omega_w}$ | 1 | $\left\{\frac{1}{2},\, 0\right\}$ |
| $\infty$ | 1 | $\left\{\frac{3}{2},\, -1\right\}$ |

Równanie różniczkowe na zmienną $g$ w ansatzu Hermite'a–Darboux dla potencjalnych rozwiązań równania różniczkowego (3.67) przyjmuje postać

$$2x^2\big(\Omega_w x + \Omega_K\big)g''' + 3x\big(3\Omega_w x + 2\Omega_K\big)g'' - 2\big(3\Omega_w x - (\alpha - 3\Omega_K)\big)g' - 6\Omega_w g = 0. \tag{3.68}$$

Rozwiązań powyższego równania poszukujemy metodą Frobeniusa w postaci szeregu potęgowego (3.31) w otoczeniu punktu $x_0 = 0$, który jest jednym z regularnych punktów osobliwych równania (3.67). Wykładnik pomocniczy $s$ może przyjmować następujące dopuszczalne wartości

$$s \in \left\{0,\, 2i\sqrt{\frac{\alpha}{4\Omega_K} - 1},\, -2i\sqrt{\frac{\alpha}{4\Omega_K} - 1}\right\}. \tag{3.69}$$

Relacja rekurencyjna, jaką otrzymujemy dla współczynników szeregu, jest następująca

$$c_{s,n} = -\frac{(n+s-3)(n+s+2)(2n+2s-1)\Omega_w}{2(n+s)(\alpha + (n+s-2)(n+s+2)\Omega_K)} c_{s,n-1}, \tag{3.70}$$

gdzie mamy

$$n \geqslant 1 \quad \wedge \quad (n+s)(\alpha + (n+s-2)(n+s+2)\Omega_K) \neq 0.$$

Uzyskana relacja rekurencyjna jest jedynie dwuskładnikowa, a dany współczynnik w szeregu zależy od współczynnika bezpośrednio go poprzedzającego. Dla wykładnika $s = 0$ szereg urywa się samoczynnie, ponieważ współczynnik $c_{0,3}$ zeruje się, a z nim wszystkie następne. Stąd jednym z rozwiązań równania (3.68) jest

$$g = 9\Omega_w^2 x^2 + 3\Omega_w \alpha x + \alpha(\alpha - 3\Omega_K). \tag{3.71}$$

Stałą $\beta$ wyliczamy, korzystając z formuły (3.24)

$$\beta = \alpha^2(\alpha - 4\Omega_K)(\alpha - 3\Omega_K)^2. \tag{3.72}$$

Widoczne jest, że niezależnie od znaku obecnej wartości parametru gęstości energii stałej krzywizny stała $\beta$ jest dodatnia. Stąd postulowane rozwiązanie w formie Hermite'a–Darboux zawsze będzie miało charakter oscylacyjny. Ostatecznie rozwiązanie równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.67) możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \nu = {} & \frac{\sqrt{9\Omega_w^2 x^2 + 3\Omega_w \alpha x + \alpha(\alpha - 3\Omega_K)}}{\sqrt[4]{\alpha(\alpha - 4\Omega_K)(\alpha - 3\Omega_K)^2}} \\ & \times \exp\left(-\frac{i}{2}\int\limits_1^x \frac{\sqrt{\alpha^2(\alpha - 4\Omega_K)(\alpha - 3\Omega_K)^2}\, dy}{y(9\Omega_w^2 y^2 + 3\Omega_w \alpha y + \alpha(\alpha - 3\Omega_K))\sqrt{\Omega_w y + \Omega_K}}\right). \end{aligned} \tag{3.73}$$

Obecna w rozwiązaniu całka jest elementarna i wyraża się poprzez funkcje cyklometryczne i area. Została ona jawnie wyliczona w podrozdziale (3.5.3). Powyższe rozwiązanie obejmuje również szczególny przypadek modeli wypełnionych ścianami domenowymi, bez stałej kosmologicznej i bez krzywizny przestrzennej.

Ponieważ w rozważanym przypadku równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.67) należy klasy równań różniczkowych Gaussa, jego rozwiązania możemy podać, posługując się funkcją hipergeometryczną. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu = {} & A x^N \,\mathrm{G_g}\Big(\frac{3+2N}{2},\, -(1-N),\, 1+2N \Big|\, -\frac{\Omega_w}{\Omega_K} x\Big) \\ & + B x^{-N} \,\mathrm{G_g}\Big(\frac{3-2N}{2},\, -(1+N),\, 1-2N \Big|\, -\frac{\Omega_w}{\Omega_K} x\Big), \end{aligned} \tag{3.74}$$

gdzie liczba falowa $N$ zdefiniowana jest równaniem (3.5), natomiast $A$ i $B$ są dowolnymi stałymi zespolonymi. Funkcja $\mathrm{G_g}(a,\, b,\, c|\, z)$ jest ogólną funkcją hipergeometryczną (Gaussa), która jest zdefiniowana jako rozwiązanie równania różniczkowego Gaussa

$$\frac{d^2\,\mathrm{G_g}}{dz^2} + \Big(\frac{c}{z} + \frac{d}{z-1}\Big)\frac{d\,\mathrm{G_g}}{dz} + \frac{ab}{z(z-1)}\,\mathrm{G_g} = 0, \tag{3.75}$$

gdzie $d = 1 + a + b - c$, które odpowiada zerującemu się wykładnikowi Frobeniusa w regularnym punkcie osobliwym $z = 0$ [33]. Zauważmy, że twierdzenie Kimury [95, 120][7] dotyczące zagadnienia całkowalności równania Gaussa istotnie przewiduje, że występujące w powyższych rozwiązaniach funkcje hipergeometryczne są liouville'owskie. Tutaj jawnie skonstruowaliśmy te rozwiązania poprzez kwadratury.

### 3.4.4 Modele wypełnione materią ultralekką

Dla modeli ze stałą kosmologiczną, przestrzennie zakrzywionych, wypełnionych materią ultralekką ($\gamma = \frac{5}{3}$), równanie Friedmanna (3.16) przyjmuje następującą formę

$$h^2 = \Omega_\Lambda + \Omega_K \frac{1}{x^2} + \Omega_u \frac{1}{x^5}, \qquad \Omega_K = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_u, \tag{3.76}$$

gdzie przez $\Omega_u$ oznaczamy obecną wartość parametru gęstości energii materii ultralekkiej. Równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.18) dla tych modeli przyjmuje postać

$$4x^2\big(\Omega_\Lambda x^5 + \Omega_K x^3 + \Omega_u\big)\mu'' + 2x\big(4\Omega_\Lambda x^5 + 2\Omega_K x^3 - \Omega_u\big)\mu' \\ - \big(8\Omega_\Lambda x^5 - (\alpha - 4\Omega_K)x^3 - 2\Omega_u\big)\mu = 0. \tag{3.77}$$

Równanie to należy do klasy równań różniczkowych Fuchsa z siedmioma regularnymi punktami osobliwymi.

Tabela 3.6: Charakterystyka punktów osobliwych równania (3.77). Punkty $x_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) stanowią poszczególne pierwiastki równania algebraicznego $\Omega_\Lambda x^5 + \Omega_K x^3 + \Omega_u = 0$.

| punkt osobliwy | rząd | wykładniki charakterystyczne |
|---|---|---|
| $0$ | 1 | $\{1,\ \frac{1}{2}\}$ |
| $x_{1,2,3,4,5}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\ 0\}$ |
| $\infty$ | 1 | $\{2,\ -1\}$ |

Równanie różniczkowe na zmienną $g$ w ansatzu Hermite'a–Darboux dla potencjalnych rozwiązań równania (3.77) przyjmuje postać

$$2x^3\big(\Omega_\Lambda x^5 + \Omega_K x^3 + \Omega_u\big)g''' + 3x^2\big(4\Omega_\Lambda x^5 + 2\Omega_K x^3 - \Omega_u\big)g'' \\ - 2x\big(2\Omega_\Lambda x^5 - (\alpha - 3\Omega_K)x^3 - 3\Omega_u\big)g' - 2\big(8\Omega_\Lambda x^5 + 3\Omega_u\big)g = 0. \tag{3.78}$$

[7] Przy tej okazji zwracamy uwagę, że definicja funkcji hipergeometrycznej użyta w [120] jest niekompatybilna z podanym tam twierdzeniem Kimury.

Rozwiązań powyższego równania poszukujemy metodą Frobeniusa w postaci szeregu potęgowego (3.31) w otoczeniu punktu $x_0 = 0$, który jest jednym z regularnych punktów osobliwych równania (3.77). Wykładnik pomocniczy $s$ szeregu może przyjmować następujące dopuszczalne wartości

$$s \in \left\{2,\ \frac{3}{2},\ 1\right\}. \tag{3.79}$$

Dla współczynników szeregu otrzymujemy natomiast następującą relację rekurencyjną

$$c_{2,1} = 0, \qquad c_{3/2,1} = 0, \tag{3.80a}$$

$$c_{s,2} = 0, \tag{3.80b}$$

$$c_{s,3} = -\frac{2s(\alpha + (s-2)(s+2)\Omega_K)}{(s+1)(s+2)(2s+3)\Omega_u} c_{s,0}, \tag{3.80c}$$

$$c_{s,4} = -\frac{2(s+1)(\alpha + (s-1)(s+3)\Omega_K)}{(s+2)(s+3)(2s+5)\Omega_u} c_{s,1}, \tag{3.80d}$$

$$\begin{aligned} c_{s,n} = &-\frac{2(n+s-3)(\alpha + (n+s-5)(n+s-1)\Omega_K)}{(n+s-2)(n+s-1)(2n+2s-3)\Omega_u} c_{s,n-3} \\ &-\frac{2(n+s-7)(n+s-4)\Omega_\Lambda}{(n+s-2)(2n+2s-3)\Omega_u} c_{s,n-5}, \end{aligned} \tag{3.80e}$$

gdzie $n \geqslant 5$, a współczynniki $c_{s,0}$ i $c_{1,1}$ pozostają nieokreślone. Żaden z szeregów do poszczególnych wartości wykładnika $s$ nie urywa się samoczynnie. Dwa pierwsze szeregi nie posiadają dodatkowych nieokreślonych współczynników, co nie stwarza możliwości urwania żadnego z nich. Ponadto szereg do wykładnika $s = 1$, mimo nieokreśloności współczynnika $c_{1,1}$, również nie daje się urwać. Wnioskujemy stąd, że równanie (3.77) nie posiada liouville'owskich rozwiązań w formie Hermite'a–Darboux z funkcją $g$ w postaci skończonego szeregu Laurenta w zmiennej $x$.

Lokalne rozwiązania równania różniczkowego (3.77) w otoczeniu regularnego punktu osobliwego $x_0 = 0$ możemy podać za pomocą szeregów Frobeniusa. Podstawiając do równania różniczkowego założenie o następującej postaci rozwiązania

$$\mu = (x - x_0)^p \sum_{n=0}^{\infty} a_{p,n}(x - x_0)^n, \tag{3.81}$$

otrzymujemy dwie dopuszczalne wartości dla wykładników Frobeniusa $p$

$$p \in \left\{1,\ \frac{1}{2}\right\}, \tag{3.82}$$

które wyznaczają dwa liniowo niezależne rozwiązania, oraz relację rekurencyjną dla współczynników szeregu

$$a_{p,1} = 0, \tag{3.83a}$$

$$a_{p,2} = 0, \tag{3.83b}$$

$$a_{p,3} = -\frac{\alpha + 4(p-1)(p+1)\Omega_K}{2(p+2)(2p+5)\Omega_u} a_{p,0}, \tag{3.83c}$$

$$a_{p,4} = 0, \tag{3.83d}$$

$$\begin{aligned} a_{p,n} = &-\frac{\alpha + 4(n+p-4)(n+p-2)\Omega_K}{2(n+p-1)(2n+2p-1)\Omega_u} a_{p,n-3} \\ &- \frac{2(n+p-6)(n+p-3)\Omega_\Lambda}{(n+p-1)(2n+2p-1)\Omega_u} a_{p,n-5}, \end{aligned} \tag{3.83e}$$

gdzie $n \geqslant 5$. Szeregi (3.81) są zbieżne (na płaszczyźnie zespolonej zmiennej $x$) w kole o środku w punkcie $x_0 = 0$ i promieniu równym odległości do najbliższego punktu osobliwego. Ze względu na to, że równanie algebraiczne wyznaczające położenie punktów osobliwych jest tutaj nieredukowalnym równaniem piątego stopnia, nie możemy jawnie wypisać jego pierwiastków. Stąd nie możemy również jawnie podać promienia zbieżności uzyskanych szeregów Frobeniusa.

### Przypadek bez krzywizny przestrzennej

Dla modeli ze stałą kosmologiczną, bez krzywizny przestrzennej ($\Omega_K = 0$), wypełnionych materią ultralekką ($\gamma = \frac{5}{3}$), równanie Friedmanna (3.16) przyjmuje formę

$$h^2 = \Omega_\Lambda + \Omega_u \frac{1}{x^5}, \qquad \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_u. \tag{3.84}$$

Równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.18) dla tych modeli przyjmuje więc postać

$$\begin{aligned} 4x^2\big(\Omega_\Lambda x^5 + \Omega_u\big)\mu'' + 2x\big(4\Omega_\Lambda x^5 - \Omega_u\big)\mu' \\ - \big(8\Omega_\Lambda x^5 - \alpha x^3 - 2\Omega_u\big)\mu = 0. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Równanie to należy do klasy równań różniczkowych Fuchsa z siedmioma regularnymi punktami osobliwymi.

W porównaniu do rozważanego wyżej przypadku z niezerową krzywizną przestrzenną typ równania różniczkowego opisującego ewolucję pierwotnych fal grawitacyjnych nie ulega tutaj zmianie. Podobnie jak wtedy dochodzimy do wniosku, że równanie (3.85) nie posiada liouville'owskich rozwiązań w formie Hermite'a–Darboux z funkcją $g$ w postaci skończonego szeregu Laurenta w zmiennej $x$.

Dwa liniowo niezależne rozwiązania lokalne równania różniczkowego (3.85) w otoczeniu regularnego punktu osobliwego $x_0 = 0$ dane są szeregami Frobeniusa (3.81) do wykładników (3.82), w których współczynniki szeregu spełniają relację rekurencyjną (3.83) z $\Omega_K = 0$. Promień zbieżności tych szeregów możemy podać tutaj wprost i wynosi on $r = \left(\frac{\Omega_u}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Tabela 3.7: Charakterystyka punktów osobliwych równania (3.85).

| punkt osobliwy | rząd | wykładniki charakterystyczne |
|---|---|---|
| $0$ | 1 | $\{1,\ \frac{1}{2}\}$ |
| $-\left(\frac{\Omega_u}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{5}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\ 0\}$ |
| $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+i\sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}}\right)\left(\frac{\Omega_u}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{5}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\ 0\}$ |
| $-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-i\sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}}\right)\left(\frac{\Omega_u}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{5}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\ 0\}$ |
| $-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+i\sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}}\right)\left(\frac{\Omega_u}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{5}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\ 0\}$ |
| $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-i\sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}}\right)\left(\frac{\Omega_u}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{5}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\ 0\}$ |
| $\infty$ | 1 | $\{2,\ -1\}$ |

### Przypadek bez stałej kosmologicznej

Dla modeli bez stałej kosmologicznej ($\Omega_\Lambda = 0$), przestrzennie zakrzywionych, wypełnionych materią ultralekką ($\gamma = \frac{5}{3}$), równanie Friedmanna (3.16) przyjmuje formę

$$h^2 = \Omega_K \frac{1}{x^2} + \Omega_u \frac{1}{x^5}, \qquad \Omega_K = 1 - \Omega_u. \tag{3.86}$$

Równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.18) dla tych modeli przyjmuje postać

$$\begin{aligned} 4x^2\big(\Omega_K x^3 + \Omega_u\big)\mu'' + 2x\big(2\Omega_K x^3 - \Omega_u\big)\mu' \\ + \big((\alpha - 4\Omega_K)x^3 + 2\Omega_u\big)\mu = 0. \end{aligned} \tag{3.87}$$

Równanie to należy do klasy równań różniczkowych Fuchsa z pięcioma regularnymi punktami osobliwymi.

Tabela 3.8: Charakterystyka punktów osobliwych równania (3.87).

| punkt osobliwy | rząd | wykładniki charakterystyczne |
|---|---|---|
| $0$ | 1 | $\{1,\ \frac{1}{2}\}$ |
| $-\left(\frac{\Omega_u}{\Omega_K}\right)^{\frac{1}{3}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\ 0\}$ |
| $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\left(\frac{\Omega_u}{\Omega_K}\right)^{\frac{1}{3}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\ 0\}$ |
| $\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\left(\frac{\Omega_u}{\Omega_K}\right)^{\frac{1}{3}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\ 0\}$ |
| $\infty$ | 1 | $\{i\sqrt{\frac{\alpha}{4\Omega_K}-1},\ -i\sqrt{\frac{\alpha}{4\Omega_K}-1}\}$ |

Równanie różniczkowe (3.87) nie jest jednak nieredukowalne ze względu na liczbę punktów osobliwych. Dokonując potęgowej transformacji zmiennej niezależnej przy równoczesnej zamianie zmiennej zależnej postaci

$$z = -\frac{\Omega_K}{\Omega_u}x^3, \qquad \mu = z^a f, \qquad a \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\}, \tag{3.88}$$

gdzie $f$ jest funkcją nowo wprowadzonej zmiennej niezależnej $z$, możemy przekształcić je do równania różniczkowego Gaussa, które posiada trzy regularne punkty osobliwe. Stąd rozwiązania równania (3.87) możemy podać jako

$$\begin{aligned}\mu = Ax\,\mathrm{G_g}\Big(\frac{1+N}{3}, \frac{1-N}{3}, \frac{7}{6}\Big| -\frac{\Omega_K}{\Omega_u}x^3\Big)&\\ + B\sqrt{x}\,\mathrm{G_g}\Big(\frac{1+2N}{6}, \frac{1-2N}{6}, \frac{5}{6}\Big| -\frac{\Omega_K}{\Omega_u}x^3\Big),&\end{aligned} \tag{3.89}$$

gdzie funkcja $\mathrm{G_g}$ jest ogólną funkcją hipergeometryczną (3.75), liczba falowa $N$ zdefiniowana jest równaniem (3.5), a $A$ i $B$ są pewnymi stałymi zespolonymi. Przypominamy, że dla $\Omega_K > 0$ mamy $N \in i(0, \infty)$, natomiast dla $\Omega_K < 0$ zachodzi $N \in \{n\colon 3 \leqslant n \in \mathbb{N}\}$.

Twierdzenie Kimury [95, 120] zastosowane do funkcji hipergeometrycznych występujących w uzyskanych rozwiązaniach, przy uwzględnieniu dopuszczalnych wartości jakie w zależności od krzywizny może przyjmować wielkość $N$, przewiduje, że rozwiązania te mają postać liouville'owską jedynie dla krzywizny dodatniej poza przypadkami, gdy $N \in \{3n\colon 1 \leqslant n \in \mathbb{N}\}$. Ich jawną formę możemy znaleźć, posługując się metodą Hermite'a–Darboux. Początkowa analiza zmierzająca do wyznaczenia występującej w ansatzu funkcji $g$ przebiega analogicznie jak dla przypadku z niezerową stałą kosmologiczną. W jej wyniku uzyskujemy te same dopuszczalne wartości dla wykładnika pomocniczego (3.79) i relację rekurencyjną (3.80) z $\Omega_\Lambda = 0$.

Tym razem obserwujemy, że uzyskana relacja rekurencyjna jest dwuskładnikowa i dany współczynnik w szeregu zależy jedynie od trzeciego z kolei poprzedzającego go współczynnika. Ten fakt ma bezpośredni związek z istnieniem wykorzystanej wyżej sześciennej transformacji zmiennej niezależnej obniżającej liczbę punktów osobliwych równania różniczkowego. Szereg do wykładnika $s = 1$ zawiera dwie wzajemnie niezależne serie, z których ta inicjowana współczynnikiem $c_{1,1}$ jest tożsama z szeregiem do wykładnika $s = 2$. Występują dwie generyczne sytuacje, w których dochodzi do samoczynnego urwania jednego z uzyskanych szeregów. Pierwsza, gdy $N \in \{3n + 1\colon 1 \leqslant n \in \mathbb{N}\}$, wówczas w szeregu do wykładnika $s = 2$ zeruje się współczynnik $c_{2,2N+1}$ i wszystkie następne. Z drugą taką sytuacją mamy do czynienia, gdy $N \in \{3n + 2\colon 1 \leqslant n \in \mathbb{N}\}$, wówczas w szeregu do wykładnika $s = 1$, przy ustalonym $c_{1,1} = 0$, zerują się wszystkie współczynniki począwszy od $c_{1,2N+2}$. Stąd za rozwiązanie równania różniczkowego na funkcję $g$ dla $N \in \{3n+1\colon 1 \leqslant n \in \mathbb{N}\}$ możemy przyjąć

$$g = x^2 \sum_{n=0}^{\frac{2N-2}{3}} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{2+2N}{3}\right)_n \left(\frac{2-2N}{3}\right)_n}{n! \left(\frac{4}{3}\right)_n \left(\frac{7}{6}\right)_n} \left(-\frac{\Omega_K}{\Omega_u} x^3\right)^n, \tag{3.90}$$

gdzie przez $(z)_n = \frac{\Gamma(n+z)}{\Gamma(z)}$ oznaczamy symbol Pochhammera, natomiast dla $N \in \{3n+2\colon 1 \leqslant n \in \mathbb{N}\}$ przyjmujemy

$$g = x \sum_{n=0}^{\frac{2N-1}{3}} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{1+2N}{3}\right)_n \left(\frac{1-2N}{3}\right)_n}{n! \left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n} \left(-\frac{\Omega_K}{\Omega_u} x^3\right)^n. \tag{3.91}$$

Wyliczenie dla powyższych funkcji $g$ stałej $\beta$, przy wykorzystaniu formuły (3.24), prowadzi do wniosku, że w obu przypadkach mamy

$$\beta = 0. \tag{3.92}$$

Okazuje się więc, że w tych przypadkach rozwiązania równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.87) są algebraiczne lub są całkami z wyrażeń algebraicznych i nie mają charakteru oscylacyjnego. Fizycznie oznacza to, że w rozważanych modelach propagacja swobodnych zaburzeń tensorowych charakteryzowanych wspomnianymi wartościami liczby falowej $N$ jest niedozwolona. Dopuszczalne są jedynie zaburzenia w postaci fal stojących.

Ze względu na zerowanie się stałej $\beta$ metoda Hermite'a–Darboux daje nam tutaj jedynie jedno rozwiązanie. Przy jego znajomości drugie liniowo niezależne rozwiązanie może być znalezione metodą obniżania rzędu równania różniczkowego omówioną na przykład u Ince'a [86]. Dla przykładu podamy jawne rozwiązania równania różniczkowego (3.87) dla dwóch najniższych wartości liczby falowej $N$, przy których rozwiązania należą do klasy funkcji liouville'owskich. Dla $N = 4$ mamy

$$\begin{aligned} \mu = {} & Ax(10\Omega_K x^3 + 7\Omega_u) \\ & + Bx(10\Omega_K x^3 + 7\Omega_u) \int_1^x \frac{dy}{y(10\Omega_K y^3 + 7\Omega_u)^2 \sqrt{y(\Omega_K y^3 + \Omega_u)}}, \end{aligned} \tag{3.93}$$

z kolei dla $N = 5$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu = {} & A\sqrt{x(\Omega_K x^3 + \Omega_u)}(14\Omega_K x^3 + 5\Omega_u) + B\sqrt{x(\Omega_K x^3 + \Omega_u)}(14\Omega_K x^3 + 5\Omega_u) \\ & \times \int_1^x \frac{dy}{(\Omega_K y^3 + \Omega_u)(14\Omega_K y^3 + 5\Omega_u)^2 \sqrt{y(\Omega_K y^3 + \Omega_u)}}, \end{aligned} \tag{3.94}$$

gdzie $A$ i $B$ są dowolnymi stałymi zespolonymi.

**Przypadek bez krzywizny przestrzennej i bez stałej kosmologicznej**

Dla modeli bez stałej kosmologicznej ($\Omega_\Lambda = 0$) i bez krzywizny przestrzennej ($\Omega_K = 0$), wypełnionych materią ultralekką ($\gamma = \frac{5}{3}$, $\Omega_u = 1$), równanie Friedmanna (3.16) przyjmuje formę

$$h^2 = \frac{1}{x^5}. \tag{3.95}$$

Stąd równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.18) dla tych modeli przyjmuje postać

$$4x^2\mu'' - 2x\mu' + \big(\alpha x^3 + 2\big)\mu = 0. \tag{3.96}$$

Równanie to posiada dwa punkty osobliwe, jeden regularny w zerze i jeden nieregularny rozgałęziony rzędu $\frac{5}{2}$ w nieskończoności. Należy ono wobec tego do klasy zredukowanych, bikonfluentnych równań różniczkowych Heunego [157].

Tabela 3.9: Charakterystyka punktów osobliwych równania (3.96).

| punkt osobliwy | rząd | wykładniki charakterystyczne |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $\big\{1,\, \frac{1}{2}\big\}$ |
| $\infty$ | $\frac{5}{2}$ | $\big\{0,\,0\big\}_0,\ \big\{0,\,0\big\}_{1/2},\ \big\{0,\,0\big\}_1,\ \big\{i\frac{\sqrt{\alpha}}{2},\, -i\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\big\}_{3/2}$ |

Rząd punktu osobliwego w nieskończoności może zostać obniżony poprzez zastosowanie odpowiedniej transformacji potęgowej zmiennej niezależnej. W wyniku zamiany zmiennych postaci

$$z = -\frac{\alpha}{36}x^3, \qquad \mu = z^a f, \qquad a \in \left\{\frac{1}{3},\, \frac{1}{6}\right\}, \tag{3.97}$$

gdzie $f$ jest funkcją nowej zmiennej niezależnej $z$, sprowadzamy równanie (3.96) do zredukowanego, pojedynczo konfluentnego równania różniczkowego Gaussa, które posiada regularny punkt osobliwy w zerze i nieregularny rozgałęziony punkt osobliwy rzędu $\frac{3}{2}$ w nieskończoności. Stąd rozwiązania równania (3.96) możemy zapisać jako

$$\mu = Ax\,\mathrm{G_{sc}}\Big(\frac{7}{6},\, 0\Big|\, -\frac{\alpha}{36}x^3\Big) + B\sqrt{x}\,\mathrm{G_{sc}}\Big(\frac{5}{6},\, 0\Big|\, -\frac{\alpha}{36}x^3\Big), \tag{3.98}$$

gdzie $A$ i $B$ są pewnymi stałymi zespolonymi. Funkcja $\mathrm{G_{sc}}(c,\, s|\, z)$ jest pojedynczo konfluentną funkcją hipergeometryczną (Gaussa), która jest zdefiniowana jako rozwiązanie pojedynczo konfluentnego równania różniczkowego Gaussa

$$\frac{d^2\,\mathrm{G_{sc}}}{dz^2} + \Big(\frac{c}{z} + s\Big)\frac{d\,\mathrm{G_{sc}}}{dz} - \frac{1 - s\frac{c}{2}}{z}\,\mathrm{G_{sc}} = 0, \tag{3.99}$$

które odpowiada zerującemu się wykładnikowi Frobeniusa w regularnym punkcie osobliwym $z = 0$ [32]. Zagadnienie całkowalności konfluentnych równań różniczkowych Gaussa poprzez funkcje liouville'owskie było badane przez Martineta i Ramisa [115] i zostało podsumowane w pracy Duval i Loday-Richaud [43]. Wyniki tych badań wskazują, że uzyskane wyżej rozwiązania nie mają postaci liouville'owskiej.

### 3.4.5 Modele wypełnione materią sztywną

Dla modeli ze stałą kosmologiczną, przestrzennie zakrzywionych, wypełnionych materią sztywną ($\gamma = 2$), równanie Friedmanna (3.16) przyjmuje następującą formę

$$h^2 = \Omega_\Lambda + \Omega_K \frac{1}{x^2} + \Omega_s \frac{1}{x^6}, \qquad \Omega_K = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_s, \tag{3.100}$$

gdzie przez $\Omega_s$ oznaczamy obecną wartość parametru gęstości energii materii sztywnej. Równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.18) dla tych modeli przyjmuje postać

$$\begin{aligned} 4x^2\big(\Omega_\Lambda x^6 + \Omega_K x^4 + \Omega_s\big)\mu'' + 4x\big(2\Omega_\Lambda x^6 + \Omega_K x^4 - \Omega_s\big)\mu' \\ - \big(8\Omega_\Lambda x^6 - (\alpha - 4\Omega_K)x^4 - 4\Omega_s\big)\mu = 0. \end{aligned} \tag{3.101}$$

Równanie to należy do klasy równań różniczkowych Fuchsa z ośmioma regularnymi punktami osobliwymi.

Tabela 3.10: Charakterystyka punktów osobliwych równania (3.101). Oznaczono $v_0 = \left(\sqrt{1 + \frac{4\Omega_K^3}{27\Omega_\Lambda^2 \Omega_s}} + 1\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{1 + \frac{4\Omega_K^3}{27\Omega_\Lambda^2 \Omega_s}} - 1\right)^{\frac{1}{3}}$ oraz $v_1 = \left(\sqrt{1 + \frac{4\Omega_K^3}{27\Omega_\Lambda^2 \Omega_s}} + 1\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\sqrt{1 + \frac{4\Omega_K^3}{27\Omega_\Lambda^2 \Omega_s}} - 1\right)^{\frac{1}{3}}$, a ponadto $x_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2\Omega_s}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{6}} v_0 \left(\sqrt{\sqrt{1 + \frac{3v_1^2}{v_0^2}} + 1} + i\sqrt{\sqrt{1 + \frac{3v_1^2}{v_0^2}} - 1}\right)$, $x_4 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2\Omega_s}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{6}} v_0 \left(\sqrt{\sqrt{1 + \frac{3v_1^2}{v_0^2}} + 1} - i\sqrt{\sqrt{1 + \frac{3v_1^2}{v_0^2}} - 1}\right)$, $x_5 = x_4^*$, $x_6 = x_3^*$.

| punkt osobliwy | rząd | wykładniki charakterystyczne |
|---|---|---|
| $0$ | 1 | $\{1,\, 1\}$ |
| $i\left(\frac{2\Omega_s}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{v_0}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\, 0\}$ |
| $-i\left(\frac{2\Omega_s}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{v_0}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\, 0\}$ |
| $x_{3,4,5,6}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\, 0\}$ |
| $\infty$ | 1 | $\{2,\, -1\}$ |

Pod działaniem potęgowej transformacji zmiennej niezależnej liczba punktów osobliwych równania różniczkowego (3.101) może zostać obniżona. W wyniku zamiany zmiennych postaci

$$z = x^2, \qquad \mu = \sqrt{z} f, \tag{3.102}$$

gdzie $f$ jest funkcją nowej zmiennej niezależnej $z$, równanie (3.101) przechodzi w nowe równanie różniczkowe posiadające pięć regularnych punktów osobliwych. Zabieg ten nie jest jednak pomocny dla znalezienia liouville'owskich rozwiązań równania (3.101), bowiem warunki całkowalności dla równań różniczkowych klasy Fuchsa z pięcioma punktami osobliwymi nie są znane w literaturze. Posłużymy się zatem ponownie metodą Hermite'a–Darboux.

Równanie różniczkowe na zmienną $g$ w ansatzu Hermite'a–Darboux dla potencjalnych rozwiązań równania (3.101) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} &x^3\big(\Omega_\Lambda x^6 + \Omega_K x^4 + \Omega_s\big)g''' + 3x^2\big(2\Omega_\Lambda x^6 + \Omega_K x^4 - \Omega_s\big)g'' \\ &\qquad - x\big(2\Omega_\Lambda x^6 - (\alpha - 3\Omega_K)x^4 - 7\Omega_s\big)g' - 8\big(\Omega_\Lambda x^6 + \Omega_s\big)g = 0. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Rozwiązań powyższego równania poszukujemy metodą Frobeniusa w postaci szeregu potęgowego (3.31) w otoczeniu punktu $x_0 = 0$, który jest jednym z regularnych punktów osobliwych równania (3.101). Wykładnik pomocniczy $s$ szeregu może przyjmować jedynie jedną (potrójną) dopuszczalną wartość

$$s = 2, \tag{3.104}$$

a współczynniki szeregu spełniają następującą relację rekurencyjną

$$c_{2,1} = 0, \tag{3.105a}$$

$$c_{2,2} = 0, \tag{3.105b}$$

$$c_{2,3} = 0, \tag{3.105c}$$

$$c_{2,4} = -\frac{\alpha}{32\Omega_s} c_{2,0}, \tag{3.105d}$$

$$c_{2,5} = 0, \tag{3.105e}$$

$$c_{2,n} = -\frac{(n-2)(\alpha + (n-4)n\Omega_K)}{n^3\Omega_s} c_{2,n-4} - \frac{(n-6)(n-3)\Omega_\Lambda}{n^2\Omega_s} c_{2,n-6}, \tag{3.105f}$$

gdzie $n \geqslant 6$. Widoczne jest, że ze względu na istnienie kwadratowej transformacji zmiennej niezależnej obniżającej liczbę punktów osobliwych równania różniczkowego wszystkie nieparzyste wyrazy uzyskanego szeregu się zerują. Szereg ten nie urywa się samoczynnie, ani nie posiada dodatkowych nieokreślonych współczynników, które mogłyby stworzyć możliwość jego urwania. Stąd możemy stwierdzić, że równanie różniczkowe (3.101) nie posiada liouville'owskich rozwiązań w formie Hermite'a–Darboux z funkcją $g$ w postaci skończonego szeregu Laurenta w zmiennej $x$.

Lokalne rozwiązania równania różniczkowego (3.101) w otoczeniu regularnego punktu osobliwego $x_0 = 0$ możemy podać za pomocą szeregów Frobeniusa. Zakładając postać rozwiązania w formie szeregu (3.81), otrzymujemy jedną (podwójną) dopuszczalną wartość dla wykładnika Frobeniusa $p$

$$p = 1, \tag{3.106}$$

oraz następującą relację rekurencyjną dla współczynników

$$a_{1,1} = 0, \tag{3.107a}$$

$$a_{1,2} = 0, \tag{3.107b}$$

$$a_{1,3} = 0, \tag{3.107c}$$

$$a_{1,4} = -\frac{\alpha}{64\Omega_s} a_{1,0}, \tag{3.107d}$$

$$a_{1,5} = 0, \tag{3.107e}$$

$$a_{1,n} = -\frac{\alpha + 4(n-4)(n-2)\Omega_K}{4n^2\Omega_s} a_{1,n-4} - \frac{(n-6)(n-3)\Omega_\Lambda}{n^2\Omega_s} a_{1,n-6}, \tag{3.107f}$$

gdzie $n \geqslant 6$. Ponieważ uzyskany wykładnik Frobeniusa jest podwójny, drugie liniowo niezależne rozwiązanie zawiera człon logarytmiczny i ma postać

$$\mu = x \ln x \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n} x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} b_{1,n} x^n, \tag{3.108}$$

gdzie współczynniki $a_{1,n}$ dane są relacją rekurencyjną (3.107), natomiast współczynniki $b_{1,n}$ spełniają następującą relację

$$b_{1,0} = 0, \tag{3.109a}$$

$$b_{1,1} = 0, \tag{3.109b}$$

$$b_{1,2} = 0, \tag{3.109c}$$

$$b_{1,3} = 0, \tag{3.109d}$$

$$b_{1,4} = \frac{\alpha - 16\Omega_K}{128\Omega_s} a_{1,0}, \tag{3.109e}$$

$$b_{1,5} = 0, \tag{3.109f}$$

$$\begin{aligned} b_{1,n} = &-\frac{\alpha + 4(n-4)(n-2)\Omega_K}{4n^2\Omega_s} b_{1,n-4} - \frac{(n-6)(n-3)\Omega_\Lambda}{n^2\Omega_s} b_{1,n-6} \\ &+ \frac{\alpha - 4(3n-8)\Omega_K}{2n^3\Omega_s} a_{1,n-4} - \frac{9(n-4)\Omega_\Lambda}{n^3\Omega_s} a_{1,n-6}, \end{aligned} \tag{3.109g}$$

gdzie $n \geqslant 6$. Szeregi w rozwiązaniach Frobeniusa (3.81) i (3.108) są zbieżne w kole o środku w punkcie $x_0 = 0$ i promieniu równym odległości do najbliższego punktu osobliwego równania różniczkowego (3.101). Najbliżej punktu $x_0 = 0$ rozłożone są punkty $x_{3,4,5,6}$, stąd promień zbieżności tych szeregów wynosi $r = \frac{1}{2}\big(\frac{2\Omega_s}{\Omega_\Lambda}\big)^{\frac{1}{6}} v_0 \big(1+\frac{3v_1^2}{v_0^2}\big)^{\frac{1}{4}}$, gdzie pomocnicze wielkości $v_0$ i $v_1$ zostały zdefiniowane w tabeli (3.10).

### Przypadek bez krzywizny przestrzennej

Dla modeli ze stałą kosmologiczną, bez krzywizny przestrzennej ($\Omega_K = 0$), wypełnionych materią sztywną ($\gamma = 2$), równanie Friedmanna (3.16) przyjmuje formę

$$h^2 = \Omega_\Lambda + \Omega_s \frac{1}{x^6}, \qquad \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_s. \tag{3.110}$$

Stąd równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.18) dla tych modeli przyjmuje postać

$$4x^2\big(\Omega_\Lambda x^6 + \Omega_s\big)\mu'' + 4x\big(2\Omega_\Lambda x^6 - \Omega_s\big)\mu' - \big(8\Omega_\Lambda x^6 - \alpha x^4 - 4\Omega_s\big)\mu = 0. \tag{3.111}$$

Równanie to należy do klasy równań różniczkowych Fuchsa z ośmioma regularnymi punktami osobliwymi.

Tabela 3.11: Charakterystyka punktów osobliwych równania (3.111).

| punkt osobliwy | rząd | wykładniki charakterystyczne |
|---|---|---|
| $0$ | 1 | $\{1,\ 1\}$ |
| $i\big(\frac{\Omega_s}{\Omega_\Lambda}\big)^{\frac{1}{6}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\ 0\}$ |
| $-i\big(\frac{\Omega_s}{\Omega_\Lambda}\big)^{\frac{1}{6}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\ 0\}$ |
| $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\big(\frac{\Omega_s}{\Omega_\Lambda}\big)^{\frac{1}{6}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\ 0\}$ |
| $-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)\big(\frac{\Omega_s}{\Omega_\Lambda}\big)^{\frac{1}{6}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\ 0\}$ |
| $-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\big(\frac{\Omega_s}{\Omega_\Lambda}\big)^{\frac{1}{6}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\ 0\}$ |
| $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)\big(\frac{\Omega_s}{\Omega_\Lambda}\big)^{\frac{1}{6}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\ 0\}$ |
| $\infty$ | 1 | $\{2,\ -1\}$ |

Z porównania charakterystyk punktów osobliwych równań różniczkowych (3.101) i (3.111) widoczne jest, że analiza równania (3.111) będzie jakościowo przebiegała podobnie jak dla równania (3.101). Również w tym przypadku istnieje kwadratowa transformacja zmiennej niezależnej, która obniża liczbę regularnych punktów osobliwych równania różniczkowego z ośmiu do pięciu. Poszukiwanie rozwiązań liouville'owskich równania (3.111) metodą Hermite'a–Darboux daje rezultat negatywny mówiący, że równanie to nie posiada takich rozwiązań w formie Hermite'a–Darboux z funkcją $g$ w postaci skończonego szeregu Laurenta w zmiennej $x$.

Dwa liniowo niezależne rozwiązania lokalne równania różniczkowego (3.111) w otoczeniu regularnego punktu osobliwego $x_0 = 0$ dane są szeregami Frobeniusa (3.81) (do wykładnika (3.106)) oraz (3.108), których współczynniki spełniają relacje rekurencyjne (3.107) i (3.109) z zerującym się parametrem gęstości energii stałej krzywizny ($\Omega_K = 0$). Promień zbieżności tych szeregów na płaszczyźnie zespolonej zmiennej $x$ wynosi $r = \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{6}}$.

### Przypadek bez stałej kosmologicznej

Dla modeli bez stałej kosmologicznej ($\Omega_\Lambda = 0$), przestrzennie zakrzywionych, wypełnionych materią sztywną ($\gamma = 2$), równanie Friedmanna (3.16) przyjmuje formę

$$h^2 = \Omega_K \frac{1}{x^2} + \Omega_s \frac{1}{x^6}, \qquad \Omega_K = 1 - \Omega_s. \tag{3.112}$$

Stąd równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.18) dla tych modeli przyjmuje postać

$$\begin{aligned} 4x^2\big(\Omega_K x^4 + \Omega_s\big)\mu'' + 4x\big(\Omega_K x^4 - \Omega_s\big)\mu' \\ + \big((\alpha - 4\Omega_K)x^4 + 4\Omega_s\big)\mu = 0. \end{aligned} \tag{3.113}$$

Równanie to należy do klasy równań różniczkowych Fuchsa z sześcioma regularnymi punktami osobliwymi.

Tabela 3.12: Charakterystyka punktów osobliwych równania (3.113).

| punkt osobliwy | rząd | wykładniki charakterystyczne |
|---|---|---|
| $0$ | 1 | $\{1,\, 1\}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_K}\right)^{\frac{1}{4}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\, 0\}$ |
| $-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_K}\right)^{\frac{1}{4}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\, 0\}$ |
| $-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_K}\right)^{\frac{1}{4}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\, 0\}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_K}\right)^{\frac{1}{4}}$ | 1 | $\{\frac{1}{2},\, 0\}$ |
| $\infty$ | 1 | $\{i\sqrt{\frac{\alpha}{4\Omega_K} - 1},\, -i\sqrt{\frac{\alpha}{4\Omega_K} - 1}\}$ |

W równaniu różniczkowym (3.113) możliwe jest przeprowadzenie potęgowej transformacji zmiennej niezależnej, która obniża liczbę punktów osobliwych równania z sześciu do trzech. Dokonując zamiany zmiennych postaci

$$z = -\frac{\Omega_K}{\Omega_s} x^4, \qquad \mu = z^{\frac{1}{4}} f, \tag{3.114}$$

gdzie $f$ jest funkcją nowo wprowadzonej zmiennej niezależnej $z$, przekształcamy równanie (3.113) do równania różniczkowego Gaussa. Dla tego równania wykładniki charakterystyczne w regularnym punkcie osobliwym w zerze są identyczne, podobnie jak miało to miejsce dla równania oryginalnego (zobacz tabelę (3.12)). Stąd jedno z jego liniowo niezależnych rozwiązań będzie zawierało człon logarytmiczny. Rozwiązania równania różniczkowego (3.113) możemy więc przedstawić następująco

$$\begin{aligned}\mu = A x \,\mathrm{G_g}\Big(\frac{1+N}{4}, \frac{1-N}{4}, 1\Big| -\frac{\Omega_K}{\Omega_s}x^4\Big) \\ + B\bigg(x\ln x\,\mathrm{G_g}\Big(\frac{1+N}{4}, \frac{1-N}{4}, 1\Big| -\frac{\Omega_K}{\Omega_s}x^4\Big) + x\sum_{n=0}^{\infty} b_{1,n}x^n\bigg),\end{aligned} \tag{3.115}$$

gdzie funkcja $\mathrm{G_g}$ jest ogólną funkcją hipergeometryczną (3.75), liczba falowa $N$ zdefiniowana jest równaniem (3.5), a $A$ i $B$ są pewnymi stałymi zespolonymi. Ponadto współczynniki $b_{1,n}$ w występującym w rozwiązaniach szeregu dane są formułą (3.109) z zastrzeżeniem, że zeruje się parametr gęstości energii stałej kosmologicznej ($\Omega_\Lambda = 0$). Promień zbieżności tego szeregu na płaszczyźnie zespolonej zmiennej $x$ wynosi $r = \big(\frac{\Omega_s}{\Omega_K}\big)^{\frac{1}{4}}$.

Zastosowanie twierdzenia Kimury [95, 120] do funkcji hipergeometrycznej występującej w otrzymanych rozwiązaniach pokazuje, że rozwiązania te mają postać liouville'owską tylko dla dodatniej krzywizny przestrzennej, gdy $N \in \{2n+1\colon 1 \leqslant n \in \mathbb{N}\}$. Jawną formę tych rozwiązań znajdziemy, wykorzystując metodę Hermite'a–Darboux. Postępując podobnie jak w przypadku z niezerową stałą kosmologiczną, występującą w ansatzu funkcję $g$ staramy się wyznaczyć w postaci szeregu potęgowego, posługując się metodą Frobeniusa. Stąd uzyskujemy jedną (potrójną) dopuszczalną wartość dla wykładnika pomocniczego (3.104) oraz relację rekurencyjną dla współczynników szeregu (3.105) z $\Omega_\Lambda = 0$.

Otrzymana w ten sposób relacja rekurencyjna jest dwuskładnikowa. Ponieważ, jak pamiętamy, dla rozważanego równania różniczkowego istnieje przekształcenie potęgowe czwartego stopnia zmiennej niezależnej redukujące je do równania Gaussa, dany współczynnik w szeregu zależy wyłącznie od czwartego z kolei go poprzedzającego. Widoczne jest, że w sytuacji, gdy $N \in \{2n+1\colon 1 \leqslant n \in \mathbb{N}\}$, dochodzi do samoczynnego urwania szeregu, bowiem wówczas zeruje się współczynnik $c_{2,2N+2}$ i wszystkie następne. Stąd za rozwiązanie równania różniczkowego na funkcję $g$ dla $N \in \{2n+1\colon 1 \leqslant n \in \mathbb{N}\}$ można przyjąć

$$g = x^2 \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\big(\frac{1}{2}\big)_n\big(\frac{1+N}{2}\big)_n\big(\frac{1-N}{2}\big)_n}{(n!)^3}\Big(-\frac{\Omega_K}{\Omega_s}x^4\Big)^n. \tag{3.116}$$

Wyliczając dla powyższej funkcji $g$ stałą $\beta$ za pomocą formuły (3.24), otrzymujemy w rezultacie

$$\beta = 0. \tag{3.117}$$

Możemy stąd bezpośrednio stwierdzić, że w przypadkach, gdy $N \in \{2n+1\colon 1 \leqslant n \in \mathbb{N}\}$, rozwiązania równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.113) są algebraiczne lub są całkami z wyrażeń algebraicznych. Nieoscylacyjny charakter tych rozwiązań oznacza, że fizycznie opisywane nimi zaburzenia mają jedynie postać fal stojących i nie mogą się one propagować.

Dla porządku podajemy poniżej jawne rozwiązania równania różniczkowego (3.113) dla dwóch najniższych wartości liczby falowej $N$, przy których rozwiązania należą do klasy funkcji liouville'owskich. Z powodu zerowania się stałej $\beta$, drugie liniowo niezależne rozwiązanie jest tutaj wyznaczane metodą obniżania rzędu równania różniczkowego. Przy $N = 3$ mamy

$$\begin{aligned} \mu = {} & Ax\sqrt{\Omega_K x^4 + \Omega_s} \\ & + Bx\sqrt{\Omega_K x^4 + \Omega_s}\int\limits_1^x \frac{dy}{y(\Omega_K y^4 + \Omega_s)\sqrt{\Omega_K y^4 + \Omega_s}}, \end{aligned} \tag{3.118}$$

natomiast dla $N = 5$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu = {} & Ax(3\Omega_K x^4 + 2\Omega_s) \\ & + Bx(3\Omega_K x^4 + 2\Omega_s)\int\limits_1^x \frac{dy}{y(3\Omega_K y^4 + 2\Omega_s)^2\sqrt{\Omega_K y^4 + \Omega_s}}, \end{aligned} \tag{3.119}$$

gdzie $A$ i $B$ są dowolnymi stałymi zespolonymi.

### Przypadek bez krzywizny przestrzennej i bez stałej kosmologicznej

Dla modeli bez stałej kosmologicznej ($\Omega_\Lambda = 0$) i bez krzywizny przestrzennej ($\Omega_K = 0$), wypełnionych materią sztywną ($\gamma = 2$, $\Omega_s = 1$), równanie Friedmanna (3.16) przyjmuje formę

$$h^2 = \frac{1}{x^6}. \tag{3.120}$$

Równanie ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (3.18) dla tych modeli przyjmuje w związku z tym postać

$$4x^2\mu'' - 4x\mu' + \big(\alpha x^4 + 4\big)\mu = 0. \tag{3.121}$$

Równanie to posiada dwa punkty osobliwe, jeden regularny w zerze i jeden nieregularny nierozgałęziony rzędu 3 w nieskończoności. Należy ono wobec tego do klasy bikonfluentnych równań różniczkowych Heunego [157].

Tabela 3.13: Charakterystyka punktów osobliwych równania (3.121).

| punkt osobliwy | rząd | wykładniki charakterystyczne |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $\{1,\, 1\}$ |
| $\infty$ | 3 | $\{0,\, 0\}_0,\, \{0,\, 0\}_1,\, \{i\frac{\sqrt{\alpha}}{2},\, -i\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\}_2$ |

Podobnie jak w rozważanym poprzednio analogicznym przypadku modeli wypełnionych materią ultralekką, również tutaj istnieje potęgowe przekształcenie zmiennej niezależnej, które obniża rząd punktu osobliwego w nieskończoności. Pod działaniem zamiany zmiennych postaci

$$z = -\frac{\alpha}{64}x^4, \qquad \mu = z^{\frac{1}{4}} f, \tag{3.122}$$

gdzie $f$ jest funkcją nowej zmiennej niezależnej $z$, równanie (3.121) przechodzi w zredukowane, pojedynczo konfluentne równanie różniczkowe Gaussa, posiadające regularny punkt osobliwy w zerze i nieregularny rozgałęziony punkt osobliwy rzędu $\frac{3}{2}$ w nieskończoności. Ponieważ wykładnik charakterystyczny w punkcie osobliwym w zerze jest podwójny, drugie z rozwiązań będzie posiadało człon logarytmiczny. Jako rozwiązania równania różniczkowego (3.121) otrzymujemy więc

$$\begin{aligned}\mu = A x\, \mathrm{G_{sc}}\Big(1,\, 0\Big| -\frac{\alpha}{64}x^4\Big)& \\ + B\bigg(x \ln x\, \mathrm{G_{sc}}\Big(1,\, 0\Big| -\frac{\alpha}{64}x^4\Big) + x\sum_{n=0}^{\infty} b_{1,n}x^n\bigg)&, \end{aligned}\tag{3.123}$$

gdzie funkcja $\mathrm{G_{sc}}$ jest pojedynczo konfluentną funkcją hipergeometryczną (3.99), a $A$ i $B$ są pewnymi stałymi zespolonymi. Współczynniki $b_{1,n}$ w występującym w rozwiązaniach szeregu dane są formułą (3.109) z uwzględnieniem warunków $\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega_K = 0$ i $\Omega_s = 1$. Promień zbieżności tego szeregu na płaszczyźnie zespolonej zmiennej $x$ wynosi $r = \infty$.

Zgodnie z wynikami badań Martineta i Ramisa [115, 43] dotyczącymi warunków całkowalności konfluentnych równań różniczkowych Gaussa poprzez funkcje liouville'owskie uzyskane wyżej rozwiązania nie mają postaci liouville'owskiej.

## 3.5 Całki występujące w rozwiązaniach

W tym podrozdziale podamy jawne formy całek występujących w uzyskanych liouville'owskich rozwiązaniach równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych. Będą to całki kolejno dla modeli pyłowych, promienistych i wypełnionych ścianami domenowymi. W pierwszych dwóch przypadkach całki te wyrażają się poprzez całki eliptyczne, natomiast w ostatnim przypadku całka jest elementarna i wyraża się poprzez funkcje cyklometryczne i funkcje area.

Wyliczenie tych całek jest swego rodzaju dopełnieniem formalnego procesu znajdowania rozwiązań rozważanego równania różniczkowego. Dla dozwolonych wartości parametru falowego, przy obecnych wartościach parametrów gęstości energii z fizycznie interesującego zakresu[8] wyrażenia podcałkowe w tych całkach nie zmieniają znaku na przedziale $x \in (0, \infty)$. Stąd całki te są monotonicznymi funkcjami czynnika skali. W związku z tym ich wkład w wewnętrzną strukturę rozwiązań jest raczej subtelny, sprowadza się jedynie do kontrolowania oscylacji i nie ma wpływu na globalny trend rozwiązań. Mimo to ich obliczenie jest nadal ciekawe z poznawczego punktu widzenia. W szczególności rozważania nad całką dla modeli pyłowych doprowadziły nas do badań nad transformacją zespolonej charakterystyki dla całki eliptycznej trzeciego rodzaju. W ich konsekwencji rozszerzyliśmy zakres bezpośredniej stosowalności tejże transformacji, co okazało się konieczne, by uzyskać rozwiązanie w jawnej, zwartej formie. Ponadto dokonaliśmy odkrycia nowej, nieznanej wcześniej tożsamości dla tej całki specjalnej, o czym piszemy w dodatku (C) rozprawy.

W obliczeniach będziemy postępować według procedury dobranej odpowiednio do charakteru całek, z którymi mamy do czynienia, posługując się przy tym metodami zaczerpniętymi z klasycznych podręczników i tablic [54, 68, 24]. Początkowo będziemy rozkładać obecne pod całką wyrażanie wymierne na ułamki proste. Następnie, po znalezieniu i wykonaniu podstawienia odpowiednio aranżującego wyrażenie podpierwiastkowe, będziemy wydzielać z nowo uzyskanego wyrażenia wymiernego części składowe, kolejno całkowitą, parzystą i nieparzystą. Ostatecznie tak wyodrębnione składniki będziemy już całkować bezpośrednio. Zwracamy uwagę, że aby utrzymać prostotę rachunków, dolne granice całkowania w rozważanych całkach zostały wybrane inaczej niż wybrano je w przedstawieniach poszczególnych rozwiązań równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych.

### 3.5.1 Modele wypełnione pyłem

Rozkład całki pojawiającej się w rozwiązaniu równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych w modelach ze stałą kosmologiczną, przestrzennie zakrzywionych, wypełnionych pyłem (3.37) przedstawia się następująco

[8] Dla rozpatrywanych tutaj modeli pyłowych przyjmujemy, że jest to zakres $(\Omega_d, \Omega_\Lambda) \in (0, 1) \times (0, 1)$, dla modeli promienistych $(\Omega_r, \Omega_\Lambda) \in (0, 1) \times (0, 1)$, a dla modeli wypełnionych ścianami domenowymi $\Omega_w \in (0, 2)$.

$$\int_0^x \frac{y\,dy}{(4\Omega_\Lambda(\alpha-3\Omega_K)y^3+\alpha(\alpha-3\Omega_K)y+\Omega_d\alpha)\sqrt{y(\Omega_\Lambda y^3+\Omega_K y+\Omega_d)}} = h_0(I_1+I_2), \quad (3.124)$$

gdzie

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{ab}}\frac{1}{\frac{au_1}{a+b}-a_1}\Big(\mathrm{arccn}(y|m) - \Big(\frac{a-b}{a+b}-b_0\Big)(I_{11}+I_{12})\Big), \quad (3.125a)$$

$$b_0 = \frac{\frac{au_1}{a+b}-\frac{a-b}{a+b}a_1}{\frac{au_1}{a+b}-a_1}, \quad (3.125b)$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{ab}}\frac{-\frac{au_1}{a+b}+\frac{a_0}{a_1}}{(\frac{au_1}{a+b})^2+a_1\frac{au_1}{a+b}+a_0}\Big(\mathrm{arccn}(y|m) - \frac{(\frac{a-b}{a+b})^2+c_1\frac{a-b}{a+b}+c_0}{\frac{a-b}{a+b}+d_0}(I_{21}+I_{22})\Big), \quad (3.126a)$$

$$d_0 = \frac{-(\frac{au_1}{a+b})^2+(1+\frac{a-b}{a+b})\frac{a_0}{a_1}\frac{au_1}{a+b}+2\frac{a-b}{a+b}a_0}{(\frac{au_1}{a+b})^2-2\frac{a_0}{a_1}\frac{au_1}{a+b}-2a_0}, \quad (3.126b)$$

$$c_1 = \frac{-2(\frac{au_1}{a+b})^2-(1+\frac{a-b}{a+b})a_1\frac{au_1}{a+b}-2\frac{a-b}{a+b}a_0}{(\frac{au_1}{a+b})^2+a_1\frac{au_1}{a+b}+a_0},$$
$$c_0 = \frac{(\frac{au_1}{a+b})^2+\frac{a-b}{a+b}a_1\frac{au_1}{a+b}+(\frac{a-b}{a+b})^2a_0}{(\frac{au_1}{a+b})^2+a_1\frac{au_1}{a+b}+a_0}, \quad (3.126c)$$

oraz

$$h_0 = -\frac{1}{4\sqrt{\Omega_\Lambda}}\Big(\frac{1}{\Omega_\Lambda^2\Omega_d\alpha(\alpha-3\Omega_K)^2}\Big)^{\frac{1}{3}}\frac{q_0^2}{q_0^3+1}, \quad (3.127a)$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\Omega_d\alpha}{\Omega_\Lambda(\alpha-3\Omega_K)}\Big)^{\frac{1}{3}}q_0, \qquad a_0 = \frac{1}{2}\Big(\frac{\Omega_d\alpha}{\Omega_\Lambda(\alpha-3\Omega_K)}\Big)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{q_0}, \quad (3.127b)$$

$$q_0 = \Bigg(\sqrt{1+\frac{\alpha(\alpha-3\Omega_K)^2}{27\Omega_\Lambda\Omega_d^2}}+1\Bigg)^{\frac{1}{3}} - \Bigg(\sqrt{1+\frac{\alpha(\alpha-3\Omega_K)^2}{27\Omega_\Lambda\Omega_d^2}}-1\Bigg)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.127c)$$

a ponadto

$$y = \frac{\frac{a-b}{a+b}x-\frac{au_1}{a+b}}{x-\frac{au_1}{a+b}}, \quad (3.128a)$$

$$a=\sqrt{u_0}, \qquad b=\sqrt{2u_1^2+u_0}, \qquad m=\frac{1}{2}+\frac{u_1^2+2u_0}{4ab}, \quad (3.128b)$$

$$u_1 = -\Big(\frac{\Omega_d}{2\Omega_\Lambda}\Big)^{\frac{1}{3}}v_0, \qquad u_0 = \frac{1}{2}\Big(\frac{4\Omega_d}{\Omega_\Lambda}\Big)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{v_0}, \quad (3.128c)$$

$$v_0 = \Bigg(\sqrt{1+\frac{4\Omega_K^3}{27\Omega_\Lambda\Omega_d^2}}+1\Bigg)^{\frac{1}{3}} - \begin{cases}\Bigg(\sqrt{1+\frac{4\Omega_K^3}{27\Omega_\Lambda\Omega_d^2}}-1\Bigg)^{\frac{1}{3}}, & \Omega_K \geqslant 0,\\ -\Bigg(1-\sqrt{1+\frac{4\Omega_K^3}{27\Omega_\Lambda\Omega_d^2}}\Bigg)^{\frac{1}{3}}, & \Omega_K < 0.\end{cases} \quad (3.128d)$$

Wynikłe w ten sposób cztery całki składowe przyjmują po wyliczeniu następujące formy

$$I_{11} = b_0 n\, \mathit{\Pi}(\arccos y|m,\, n), \tag{3.129}$$

gdzie

$$n = \frac{1}{1-b_0^2}, \tag{3.130}$$

oraz

$$I_{12} = n\frac{1}{\sqrt{m-n}}\arctan\!\left(\frac{\sqrt{m-n}\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-m(1-y^2)}}\right), \tag{3.131}$$

a następnie

$$\begin{aligned} I_{21} = {} & \frac{2}{\sigma_1\tau_2-\sigma_2\tau_1} \\ \times & \Big((e_1\tau_2+e_2\sigma_2)\big(\operatorname{arccn}(y|m)+\nu_1\,\mathit{\Pi}(\arccos y|m,\, n_1)+\mu_1\frac{1}{\sqrt{\eta_1}}(\arctan z_1 + c)\big) \\ & - (e_1\tau_1+e_2\sigma_1)\big(\operatorname{arccn}(y|m)+\nu_2\,\mathit{\Pi}(\arccos y|m,\, n_2)+\mu_2\frac{1}{\sqrt{\eta_2}}\operatorname{artanh} z_2\big)\Big), \end{aligned} \tag{3.132}$$

gdzie $(i = 1,\, 2)$

$$c = \begin{cases} 0, & 1-\mu_1 > 0, \\ \pi\left\lfloor \dfrac{\arccos y}{\pi}+\dfrac{1}{2}\right\rfloor, & 1-\mu_1 = 0,\ \text{i } 1-\mu_1(1-y^2) > 0, \\ \pi\left(\left\lfloor \dfrac{\arccos y}{\pi}\right\rfloor+\dfrac{1}{2}\right), & 1-\mu_1 = 0,\ \text{i } 1-\mu_1(1-y^2) = 0, \\ 2\pi\left\lfloor \dfrac{\arccos y}{\pi}+\dfrac{1}{2}\right\rfloor, & 1-\mu_1 < 0,\ \text{i } 1-\mu_1(1-y^2) > 0, \\ \pi\left(\left\lfloor \dfrac{2\arccos y}{\pi}\right\rfloor+\dfrac{1}{2}\right), & 1-\mu_1 < 0,\ \text{i } 1-\mu_1(1-y^2) = 0, \\ 2\pi\left(\left\lfloor \dfrac{\arccos y}{\pi}\right\rfloor+\dfrac{1}{2}\right), & 1-\mu_1 < 0,\ \text{i } 1-\mu_1(1-y^2) < 0, \end{cases} \tag{3.133a}$$

$$z_i = \frac{\sqrt{\eta_i}\,y\sqrt{1-y^2}}{(1-\mu_i(1-y^2))\sqrt{1-m(1-y^2)}}, \tag{3.133b}$$

$$e_1 = -\frac{1}{2}\frac{c_1-(1+c_0)d_0}{(1+c_0)^2-c_1^2}, \qquad e_2 = -\frac{1}{2}\frac{2c_0(1+c_0)-c_1^2+(1-c_0)c_1d_0}{((1+c_0)^2-c_1^2)\sqrt{4c_0-c_1^2}}, \tag{3.133c}$$

$$\sigma_i = \nu_i+\mu_i+1, \qquad \tau_i = \frac{(n_i-o_1)\nu_i+\mu_i^2+(n_i+o_1-2)\mu_i-o_1}{o_2}, \tag{3.133d}$$

$$\nu_i = \frac{-\mu_i(n_i^2+(\mu_i-2)n_i-m(2\mu_i-1))-(o_1^2+o_2^2)}{(n_i-o_1)^2+o_2^2}, \tag{3.133e}$$

$$n_i = \frac{m}{o_1^2+o_2^2}\mu_i^2, \qquad \eta_{1,2} = \pm\frac{(m-o_1)^2+o_2^2}{m(1-m)}(n_i-m), \tag{3.133f}$$

$$\mu_{1,2} = \frac{\frac{o_1^2+o_2^2}{m} \pm \sqrt{\frac{o_1^2+o_2^2}{m}\frac{(1-o_1)^2+o_2^2}{1-m}\frac{(m-o_1)^2+o_2^2}{m(1-m)}}}{1+\frac{(m-o_1)^2+o_2^2}{m(1-m)}}, \tag{3.133g}$$

$$o_1 = \frac{1}{2}\frac{2+2c_0-c_1^2}{(1+c_0)^2-c_1^2}, \qquad o_2 = \frac{1}{2}\frac{c_1\sqrt{4c_0-c_1^2}}{(1+c_0)^2-c_1^2}, \tag{3.133h}$$

oraz

$$\begin{aligned} I_{22} = g_0 \frac{\sqrt{4f_0-f_1^2}}{2} & \\ \times \Bigg(\arctan\Bigg(\frac{2}{\sqrt{4f_0-f_1^2}}\Bigg(\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-m(1-y^2)}}+\frac{f_1}{2}\Bigg)\Bigg) & \\ + \arctan\Bigg(\frac{2}{\sqrt{4f_0-f_1^2}}\Bigg(\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-m(1-y^2)}}-\frac{f_1}{2}\Bigg)\Bigg)\Bigg), & \end{aligned} \tag{3.134}$$

gdzie

$$g_0 = \frac{2(c_1-2d_0)(1-m(1+c_0-c_1d_0))}{c_1(4c_0-c_1^2)(1-2m(1+c_0-c_1d_0))}, \tag{3.135a}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \sqrt{\frac{-c_1(c_1-2d_0)}{(1-m(2+2c_0-c_1^2))(1-m(1+c_0-c_1d_0))^2}}, \\ f_0 &= \frac{-(1+c_0-c_1d_0)}{1-m(1+c_0-c_1d_0)}. \end{aligned} \tag{3.135b}$$

Więcej szczegółów na temat całki $I_{21}$ i tego, jak została wyznaczona, można znaleźć w dołączonym do pracy dodatku (C) na temat transformacji zespolonej charakterystyki dla całki eliptycznej trzeciego rodzaju.

### 3.5.2 Modele wypełnione promieniowaniem

Całka występująca w rozwiązaniu równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych w modelach ze stałą kosmologiczną, przestrzennie zakrzywionych, wypełnionych promieniowaniem (3.46) rozkłada się następująco

$$\int_{\infty}^{x} \frac{dy}{(4\Omega_\Lambda y^2+\alpha)\sqrt{\Omega_\Lambda y^4+\Omega_K y^2+\Omega_r}} = h_0 I_1, \tag{3.136}$$

gdzie

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{u_0}}\frac{1}{u_0-a_0}\Big(\mathrm{arccn}(y|m)-(1-b_0)(I_{11}+I_{12})\Big), \tag{3.137a}$$

$$b_0 = \frac{-u_0-a_0}{u_0-a_0}, \tag{3.137b}$$

oraz

$$h_0 = \frac{1}{4\sqrt{\Omega_\Lambda}\Omega_\Lambda}, \tag{3.138a}$$

$$a_0 = \frac{\alpha}{4\Omega_\Lambda}, \tag{3.138b}$$

a ponadto

$$y = \frac{x^2 - u_0}{x^2 + u_0}, \tag{3.139a}$$

$$m = \frac{u_1^2}{4u_0}, \tag{3.139b}$$

$$u_1 = -\left(\frac{4\Omega_r}{\Omega_\Lambda}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 - \frac{\Omega_K}{2\sqrt{\Omega_\Lambda \Omega_r}}}, \qquad u_0 = \sqrt{\frac{\Omega_r}{\Omega_\Lambda}}. \tag{3.139c}$$

Wydzielone w ten sposób dwie całki składowe po obliczeniach przyjmują następujące formy

$$I_{11} = b_0 n\, \Pi(\arccos y | m,\, n), \tag{3.140}$$

gdzie

$$n = \frac{1}{1 - b_0^2}, \tag{3.141}$$

oraz

$$I_{12} = n \frac{1}{\sqrt{m-n}} \arctan\left(\frac{\sqrt{m-n}\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1 - m(1-y^2)}}\right). \tag{3.142}$$

Jak widać, uniwersalność procedury stosowanej do obliczania rozważanych całek sprawia, że powyższy rezultat uzyskany w przypadku promieniowania jest w formie bardzo zbliżony do wyniku całkowania uzyskanego dla pyłu.

### 3.5.3 Modele wypełnione ścianami domenowymi

Poniżej rozpatrujemy całkę obecną w rozwiązaniu równaniu ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych w modelach bez stałej kosmologicznej, przestrzennie zakrzywionych, wypełnionych ścianami domenowymi (3.73), której rozkład wygląda następująco

$$\int_\infty^x \frac{dy}{y(9\Omega_w^2 y^2 + 3\Omega_w \alpha y + \alpha(\alpha - 3\Omega_K))\sqrt{\Omega_w y + \Omega_K}} = h_0(I_1 + I_2), \tag{3.143}$$

gdzie

$$I_1 = -2\sqrt{s_0}\frac{1}{u_0 + s_0}(I_{11} + I_{12}), \tag{3.144a}$$

$$b_0 = \frac{u_0 - s_0}{u_0 + s_0}, \tag{3.144b}$$

$$I_2 = 2\sqrt{s_0}\frac{u_0 + s_0 - a_1}{(u_0+s_0)^2 - a_1(u_0+s_0) + a_0}(I_{21} + I_{22}), \tag{3.145a}$$

$$d_0 = \frac{-(u_0 - s_0) + a_1}{u_0 + s_0 - a_1}, \tag{3.145b}$$

$$c_1 = \frac{-2(u_0 - s_0)(u_0 + s_0) + 2a_1 u_0 - 2a_0}{(u_0 + s_0)^2 - a_1(u_0 + s_0) + a_0}, \quad c_0 = \frac{(u_0 - s_0)^2 - a_1(u_0 - s_0) + a_0}{(u_0 + s_0)^2 - a_1(u_0 + s_0) + a_0}, \tag{3.145c}$$

oraz

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{\Omega_w}\alpha(\alpha - 3\Omega_K)}, \tag{3.146a}$$

$$a_1 = \frac{\alpha}{3\Omega_w}, \qquad a_0 = \frac{\alpha(\alpha - 3\Omega_K)}{9\Omega_w^2}, \tag{3.146b}$$

a ponadto

$$y = \frac{x + u_0 - s_0}{x + u_0 + s_0}, \tag{3.147a}$$

$$s_0 = \begin{cases} \dfrac{u_0}{2}, & \Omega_K > 0, \\ -\dfrac{u_0}{2}, & \Omega_K < 0, \end{cases} \tag{3.147b}$$

$$u_0 = \frac{\Omega_K}{\Omega_w}. \tag{3.147c}$$

Zwracamy uwagę, że parametr $s_0$ pełni tutaj rolę regularyzacyjną, a dzięki jego wprowadzeniu możliwe jest równoczesne traktowanie rozważanej całki i dla modeli przestrzennie otwartych i zamkniętych. Cztery całki składowe, które pojawiają się po przeprowadzonym rozkładzie, przyjmują następujące formy

$$I_{11} = b_0 n \frac{1}{\sqrt{n-1}} \operatorname{artanh}\left(\frac{\sqrt{n-1}\sqrt{1-y^2}}{y}\right), \tag{3.148}$$

gdzie

$$n = \frac{1}{1 - b_0^2}, \tag{3.149}$$

oraz

$$I_{12} = n \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{artanh}\left(\sqrt{n}\sqrt{1-y^2}\right), \tag{3.150}$$

a następnie

$$\begin{aligned} I_{21} = {} & \frac{2}{\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1} \\ & \times \left((e_1\tau_2 + e_2\sigma_2)\mu_1 \frac{1}{\sqrt{\eta_1}}(\arctan z_1 + c) - (e_1\tau_1 + e_2\sigma_1)\mu_2 \frac{1}{\sqrt{\eta_2}} \operatorname{artanh} z_2\right), \end{aligned} \tag{3.151}$$

gdzie ($i = 1,\, 2$)

$$c = \begin{cases} 0, & 1-\mu_1 > 0, \\ \pi\left\lfloor \dfrac{\arccos y}{\pi} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor, & 1-\mu_1 = 0, \text{ i } 1-\mu_1(1-y^2) > 0, \\ \pi\left(\left\lfloor \dfrac{\arccos y}{\pi} \right\rfloor + \dfrac{1}{2}\right), & 1-\mu_1 = 0, \text{ i } 1-\mu_1(1-y^2) = 0, \\ 2\pi\left\lfloor \dfrac{\arccos y}{\pi} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor, & 1-\mu_1 < 0, \text{ i } 1-\mu_1(1-y^2) > 0, \\ \pi\left(\left\lfloor \dfrac{2\arccos y}{\pi} \right\rfloor + \dfrac{1}{2}\right), & 1-\mu_1 < 0, \text{ i } 1-\mu_1(1-y^2) = 0, \\ 2\pi\left(\left\lfloor \dfrac{\arccos y}{\pi} \right\rfloor + \dfrac{1}{2}\right), & 1-\mu_1 < 0, \text{ i } 1-\mu_1(1-y^2) < 0, \end{cases} \tag{3.152a}$$

$$z_i = \frac{\sqrt{\eta_i}\, y\sqrt{1-y^2}}{1-\mu_i(1-y^2)}, \tag{3.152b}$$

$$e_1 = -\frac{1}{2}\frac{c_1-(1+c_0)d_0}{(1+c_0)^2-c_1^2}, \qquad e_2 = -\frac{1}{2}\frac{2c_0(1+c_0)-c_1^2+(1-c_0)c_1d_0}{((1+c_0)^2-c_1^2)\sqrt{4c_0-c_1^2}}, \tag{3.152c}$$

$$\sigma_i = \mu_i, \qquad \tau_i = \frac{\mu_i^2+(o_1-2)\mu_i}{o_2}, \tag{3.152d}$$

$$\eta_{1,2} = \pm\big(\mu_i^2-(o_1^2+o_2^2)\big), \tag{3.152e}$$

$$\mu_{1,2} = 1 \pm \sqrt{(1-o_1)^2+o_2^2}, \tag{3.152f}$$

$$o_1 = \frac{1}{2}\frac{2+2c_0-c_1^2}{(1+c_0)^2-c_1^2}, \qquad o_2 = \frac{1}{2}\frac{c_1\sqrt{4c_0-c_1^2}}{(1+c_0)^2-c_1^2}, \tag{3.152g}$$

oraz

$$\begin{aligned} I_{22} = g_0\frac{\sqrt{4f_0-f_1^2}}{2} & \\ \times\Bigg(\arctan&\left(\frac{2}{\sqrt{4f_0-f_1^2}}\left(\sqrt{1-y^2}+\frac{f_1}{2}\right)\right) \\ &+\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{4f_0-f_1^2}}\left(\sqrt{1-y^2}-\frac{f_1}{2}\right)\right)\Bigg), \end{aligned} \tag{3.153}$$

gdzie

$$g_0 = \frac{2(c_1-2d_0)}{c_1(4c_0-c_1^2)}, \tag{3.154a}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \sqrt{-c_1(c_1-2d_0)}, \\ f_0 &= -(1+c_0-c_1d_0). \end{aligned} \tag{3.154b}$$

Zauważmy, że całki $I_{21}$ i $I_{22}$ obecne w powyższych formułach dla modeli wypełnionych ścianami domenowymi stanowią graniczne przypadki odpowiednich całek występujących w formułach dla modeli wypełnionych pyłem przy parametrze $m \to 0$.

# Rozdział 4

# Zastosowania rozwiązań równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych

W tym rozdziale przedstawimy potencjalne zastosowania rozwiązań równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych. Zaprezentujemy dwie sytuacje, w których wykorzystywane są jawne rozwiązania tego równania. Pierwszą będzie propagacja pierwotnych fal grawitacyjnych przez przejście fazowe w modelu kosmologicznym złożonym z dwóch następujących po sobie epok dominacji dwóch różnych płynów kosmicznych. W warunkach tych dochodzi do produkcji grawitonów w tak zwanym efekcie Grishchuka [72]. Drugi przykład dotyczy badań nad wpływem małych niejednorodności o wysokiej częstotliwości na globalną ewolucję modelu kosmologicznego. Wypracowany przez Greena i Walda [69] schemat uśredniania takich zaburzeń na modelu tła wskazuje, że efektywnie manifestują się one co najwyżej jako promieniowanie.

## 4.1 Produkcja grawitonów w efekcie Grishchuka

Kreacja grawitonów na przejściu fazowym pomiędzy dwoma różnymi epokami ewolucji modelu kosmologicznego jest stosunkowo najszerzej znanym efektem towarzyszącym propagacji pierwotnych fal grawitacyjnych. Zjawisko to zostało po raz pierwszy opisane przez Grishchuka w pracach [72, 73, 74]. Badania nad jego konsekwencjami dla różnorodnych konfiguracji modeli tła, w tym modeli inflacyjnych, były prowadzone między innymi przez Forda i Parkera [55], Abbotta, Harariego i Wise'a [2, 1], Allena, Caldwella i Korandę [5, 7, 6, 98], Sahniego [152], Barrowa, de Garcia Maię i Limę [35, 36, 37], Henriquesa, Mendesa i Moorhouse'a [79, 119, 117, 80], Ng [125] oraz Durrer i Rinaldiego [42]. Podobny mechanizm kreacji cząstek został zaproponowany dla pola fononowego przez Lukasha [109, 108], a rozwinięty został przez Friemana, Siemieniec-Oziębło, Turnera i Woszczynę [56, 155], natomiast dla pierwotnych pól magnetycznych był rozważany przez Barrowa, Kandus, Tsagasa, Turnera, Widrowa i Yamamoto [176, 175, 9].

Wspomniane wyżej analizy były wykonywane głównie w kontekście poszukiwań widma i gęstości energii pierwotnych fal grawitacyjnych, a także badań ich wpływu na obserwowaną anizotropię kosmicznego mikrofalowego promieniowania tła. Żadna z nich nie obejmowała ani modeli zawierających stałą kosmologiczną, ani modeli wypełnionych ścianami domenowymi. Znalezione przez nas oscylacyjne liouville'owskie rozwiązania równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych mogą z powodzeniem posłużyć do rozszerzenia tychże analiz o tego typu modele kosmologiczne.

Kreacja grawitonów rozumianych jako cząstki elementarne przenoszące oddziaływanie grawitacyjne jest zjawiskiem o naturze kwantowo-mechanicznej, nieklasycznej.[1] Jego powszechnie przytaczana klasyczna interpretacja jako wzmacniania fal grawitacyjnych nie posiada, jak wskazujemy poniżej, zadowalającego uzasadnienia. Ponieważ niniejsza praca poświęcona jest klasycznemu ujęciu teorii zaburzeń kosmologicznych w ramach ogólnej teorii względności, nie będziemy rozpatrywać szczegółów tego efektu, lecz ograniczymy się jedynie do jego jakościowego scharakteryzowania.

Wieloepokowe modele kosmologiczne są prostymi uogólnieniami modeli wypełnionych jedną ustaloną formą materii. Stanowią one ciągi następujących po sobie w czasie modeli, których ewolucja napędzana jest odmiennymi rodzajami płynu kosmicznego, i które w tym kontekście nazywane są epokami. Zakłada się, że na granicach pomiędzy poszczególnymi epokami dochodzi do przejścia fazowego i skokowej zmiany postaci równania stanu płynu wypełniającego model. Kryteria zszycia sąsiednich epok na przejściu fazowym wyznaczane są przez warunki Darmois–Israela [90, 91, 78]. Żądają one ciągłości pierwszej i drugiej formy metrycznej na hiperpowierzchni dzielącej epoki. Dla modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a zawierających zaburzenia wyłącznie o charakterze pier-

[1] Z tego powodu wspomnieliśmy wyżej jedynie o rozwiązaniach oscylacyjnych, gdyż tylko te są normowalne i jako takie poddają się kwantowaniu.

wotnych fal grawitacyjnych warunki te pociągają za sobą konieczność ciągłości kosmicznego czynnika skali i jego pierwszej pochodnej względem współrzędnej czasowej oraz ciągłość funkcji opisującej czasową ewolucję pierwotnych fal grawitacyjnych i również jej pochodnej czasowej. Ponieważ przejście fazowe zachodzi nie w przestrzeni, lecz w czasie, przestrzenne własności metryki nie ulegają zmianie. Podobnie funkcje opisujące przestrzenną zmienność pierwotnych fal grawitacyjnych składające się na harmoniki tensorowe w obu epokach pozostają takie same.

Rozważmy dwuepokowy model kosmologiczny, w historii którego w chwili $\eta_1$ doszło do przejścia fazowego z epoki $b$ do epoki $a$, w którym propaguje się ustalone, monochromatyczne, oscylacyjne zaburzenie w postaci swobodnej fali grawitacyjnej. Czasowa ewolucja tego zaburzenia w poszczególnych epokach dana jest ogólnym rozwiązaniem równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (2.61) dla tychże epok

$$\mu = \begin{cases} \mu_b = A_b \nu_b + B_b \nu_b^*, & \text{dla } \eta < \eta_1, \\ \mu_a = A_a \nu_a + B_a \nu_a^*, & \text{dla } \eta \geqslant \eta_1, \end{cases} \tag{4.1}$$

gdzie funkcje $\nu_b$ i $\nu_a$ są pewnymi rozwiązaniami szczególnymi tego równania, a $A_b$, $B_b$ oraz $A_a$, $B_a$ są pewnymi stałymi zespolonymi. Zgodnie z warunkami zszycia Darmois–Israela dla powyższych funkcji w momencie przejścia fazowego powinno zachodzić

$$\mu_a|_{\eta=\eta_1} = \mu_b|_{\eta=\eta_1}, \qquad \dot{\mu}_a|_{\eta=\eta_1} = \dot{\mu}_b|_{\eta=\eta_1}. \tag{4.2}$$

Ze związków tych otrzymuje się następujące formuły dla wprowadzonych stałych zespolonych w epoce $a$

$$A_a = \left.\frac{\mu_b \dot{\nu}_a^* - \dot{\mu}_b \nu_a^*}{\nu_a \dot{\nu}_a^* - \dot{\nu}_a \nu_a^*}\right|_{\eta=\eta_1}, \qquad B_a = \left.\frac{\nu_a \dot{\mu}_b - \dot{\nu}_a \mu_b}{\nu_a \dot{\nu}_a^* - \dot{\nu}_a \nu_a^*}\right|_{\eta=\eta_1}. \tag{4.3}$$

Parom współczynników $A$ i $B$ w obu epokach nadaje się ten sam sens fizyczny poprzez ujednolicenie wyboru funkcji $\nu$ w poszczególnych epokach. Funkcje te spełniają jednorodne, liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu w postaci normalnej, dla którego wrońskian pary liniowo niezależnych rozwiązań jest stały, niezależny od zmiennej niezależnej. Stąd naturalne jest odwołanie się do tego dostępnego kryterium normalizacyjnego i żądanie, by zachodził warunek

$$\nu_a \dot{\nu}_a^* - \dot{\nu}_a \nu_a^* = \nu_b \dot{\nu}_b^* - \dot{\nu}_b \nu_b^* = \text{const.} \tag{4.4}$$

Wówczas stałe współczynniki przed funkcjami $\nu$ nabierają znaczenia zespolonych amplitud. Warunki zszycia Darmois–Israela w połączeniu z powyższym warunkiem normalizacyjnym implikują następującą ogólną relację dla amplitud

$$|A_a|^2 - |B_a|^2 = |A_b|^2 - |B_b|^2. \tag{4.5}$$

Rozważmy dalej sytuację szczególną, w której w epoce $b$ poprzedzającej przejście fazowe zadane jest zaburzenie, którego propagacja w pełni opisana jest falą o amplitudzie $A_b$, a amplituda $B_b$ znika. Wtedy w epoce $a$ następującej po przejściu fazowym zaburzenie staje się superpozycją propagujących się naprzeciw siebie fal o amplitudach $A_a$ i $B_a$. W tym przypadku relacja (4.5) prowadzi do następującego wniosku

$$\frac{|A_a|^2}{|A_b|^2} = 1 + \frac{|B_a|^2}{|A_b|^2} > 1. \tag{4.6}$$

Widoczne jest, że fala przechodząca o amplitudzie $A_a$ zostaje wzmocniona w stosunku do fali padającej o amplitudzie $A_b$. Wynik ten jest ogólny i nie zależy od szczegółów modelu kosmologicznego, zależy już jednak od nich kształt samego widma wzmocnienia. Fakt występowania wzmacniania pierwotnych fal grawitacyjnych w tego rodzaju przypadkach jest podstawą dla sformułowania kwantowo-mechanicznego procesu kreacji grawitonów na przejściu fazowym. W tym podejściu dokonuje się standardowej kwantyzacji pierwotnych fal grawitacyjnych. Rolę współczynników (4.3) przejmują współczynniki Bogolubova, a wartość stałej w warunku normalizacyjnym (4.4) zostaje podyktowana przez kanoniczne relacje komutacyjne dla operatorów kreacji i anihilacji. Istota zjawiska zawarta jest w spostrzeżeniu, że z powodu ewolucji czasoprzestrzeni definicje stanów cząstkowych w epokach przed i po przejściu fazowym są nierównoważne, gdyż nierównoważne są definicje stanu próżni w tych epokach. Przebiegowi procesu nadaje się więc interpretację kreacji cząstek przez kosmiczną ekspansję poprzez przejście od stanu próżni do stanu cząstkowego. Ostateczny rezultat procesu charakteryzowany widmem powstałych cząstek zależy wprawdzie od wyboru początkowego stanu próżni, który jak wiadomo w niestatycznych czasoprzestrzeniach nie jest jednoznacznie określony, ale tylko w wymiarze ilościowym, a nie jakościowym. Formalną i szczegółową analizę tego mechanizmu można znaleźć w pracach Parkera [136, 137, 138] oraz książce Birrella i Daviesa [12].

Zaprezentowany wyżej szczególny przykład wzmocnienia zaburzenia nie uprawnia do stwierdzenia, że w ramach klasycznego ujęcia na przejściu fazowym dochodzi do wzmacniania pierwotnych fal grawitacyjnych w ogóle. Nie zostało to do tej pory dostrzeżone, a by się o tym przekonać, wystarczy odwrócić przedstawioną wcześniej sytuację. Wybierając w epoce $a$ następującej po przejściu fazowym dowolne zaburzenie opisane zupełnie falą o amplitudzie $A_a$, dla którego fala o amplitudzie $B_a$ nie występuje, mamy możliwość zadania pytania o własności tego zaburzenia w epoce $b$ poprzedzającej przejście fazowe. Gdyby na przejściu fazowym miało zachodzić ogólne wzmacnianie zaburzeń, należałoby się spodziewać, że amplitudy fal składających się na zaburzenie w epoce $b$ będą mniejsze od amplitudy $A_a$. Okazuje się, że tak jednak nie jest, bowiem relacja (4.5) zastosowana do tego przypadku daje

$$\frac{|A_b|^2}{|A_a|^2} = 1 + \frac{|B_b|^2}{|A_a|^2} > 1, \tag{4.7}$$

co jawnie pokazuje, że fala o amplitudzie $A_a$ jest w istocie osłabiona w stosunku do fali o amplitudzie $A_b$. Stąd z klasycznego punktu widzenia zjawisko wzmacniania pierwotnych fal grawitacyjnych jest efektem sztucznym, warunkowanym odpowiednim przygotowaniem początkowego stanu zaburzenia. Podejście kwantowo-mechaniczne pozwala obejść ten problem poprzez założenie, że pierwotnie zaburzenia znajdowały się w stanie próżni. Czy takie założenie znajduje uzasadnienie, pozostaje kwestią odrębną (zobacz na przykład pracę Agullo, Navarro-Salasa i Parkera [4]).

## 4.2 Schemat uśredniania zaburzeń Greena–Walda

Problem uśredniania małych niejednorodności w modelach kosmologicznych jest ostatnio jednym z intensywniej badanych zagadnień w kosmologii. Zasadniczą kwestią, którą próbuje się rozstrzygnąć, jest odpowiedź na pytanie o zwrotny, a więc nieliniowy, wpływ owych zaburzeń na globalną ewolucję modeli kosmologicznych. Omówienie podstawowych aspektów tego tematu można znaleźć u Ellisa [48]. Do tej pory zaproponowanych zostało kilka podejść do problemu uśredniania. Najważniejsze z nich to podejścia Zalaletdinova [189], Bucherta [20, 21] oraz Greena i Walda [69]. W warstwie swoich założeń i stosowanych metod obliczeniowych są one wzajemnie nierównoważne, co niestety sprawia, że nie można dokonać ich bezpośredniego porównania. Ponadto ich kluczowe wyniki często wzajemnie się wykluczają. W głównej mierze dotyczy to roli jaką w równaniach Einsteina pełni stała kosmologiczna i prób jej wyjaśnienia jako efektywnego rezultatu uśredniania małych niejednorodności.

Spośród wspomnianych ujęć problemu uśredniania w kosmologii formalizm Greena–Walda wyróżnia się dobrze kontrolowanym rygorem matematycznym. Jest on rozszerzeniem na czasoprzestrzenie niepróżniowe podejścia Burnetta [23] dotyczącego krótkofalowych zaburzeń czasoprzestrzeni próżniowych. Samo podejście Burnetta jest z kolei ścisłym sformułowaniem prac Isaacsona [88, 89]. Schemat Greena–Walda oparty jest o dwie powiązane ze sobą koncepcje. Pierwsza z nich polega na wprowadzeniu nowego operatora, nazywanego słabą granicą, uśredniającego tensory po zadanym parametrze, natomiast drugą jest założenie o istnieniu jednoparametrowej rodziny czasoprzestrzeni, dla której słaba granica równań Einsteina istnieje i jest skończona. Oczywiście z punktu widzenia zastosowań interesujące są tylko takie przypadki czasoprzestrzeni, dla których słaba granica równań pola jest nietrywialna, to znaczy nie sprowadza się do ich zwykłej granicy.

Uśrednianie zaburzeń czasoprzestrzeni w podejściu Greena–Walda opiera się na braniu odpowiednio zdefiniowanej granicy równań Einsteina. Aby przedstawić jakościowo mechanizm działania tego schematu, rozważmy na początek trywialny przypadek zaburzenia liniowego. Niech zaburzenie to będzie kontrolowane małym parametrem $\varepsilon \ll 1$. W takim wypadku uśrednianie równań Einsteina względem owego parametru można przeprowadzić zgodnie z liniową teorią zaburzeń w ogólnej teorii względności, posługując się zwykłym pojęciem granicy. W jego wyniku uzyskujemy ciąg równości

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \kappa T_{\mu\nu} = \lim_{\varepsilon \to 0} G_{\mu\nu}(g) = G_{\mu\nu}(\lim_{\varepsilon \to 0} g), \tag{4.8}$$

gdzie pierwsza z nich wynika wprost z przepisania równań Einsteina (dla przejrzystości ewentualny człon ze stałą kosmologiczną włączamy do tensora naprężeń). Druga równość oddaje natomiast istotę przyjętego założenia o liniowości zaburzenia opisanego parametrem $\varepsilon$ względem równań Einsteina. W przypadku zaburzenia nieliniowego będziemy się tutaj spodziewać pewnej dodatkowej, niezerowej poprawki. Rozważmy więc teraz zaburzenie nieliniowe, kontrolowane małym parametrem $\lambda \ll 1$. Nieliniowość zaburzenia względem równań Einsteina w parametrze $\lambda$ oznacza, że zwykła granica tensora naprężeń w tym parametrze nie istnieje. Przeprowadzenie uśredniania równań Einsteina wymaga wtedy wprowadzenia innego niż zwykła granica, adekwatnego do rodzaju nieliniowości operatora uśredniającego tensory. W wypadku schematu Greena–Walda jest nim słaba granica, oznaczana przez w-lim, a po jej ścisłą definicję odsyłamy do pracy [69]. Jej działanie na równania Einsteina przedstawia się następująco

$$\operatorname*{w-lim}_{\lambda \to 0} \kappa T_{\mu\nu} = \operatorname*{w-lim}_{\lambda \to 0} G_{\mu\nu}(g) = G_{\mu\nu}(\operatorname*{w-lim}_{\lambda \to 0} g) - \kappa t_{\mu\nu}, \tag{4.9}$$

gdzie $t_{\mu\nu}$ jest niezależnym od parametru $\lambda$, efektywnym tensorem naprężeń związanym z zaburzeniem. Reprezentuje on zwrotny wpływ zaburzenia na globalnie uśrednioną czasoprzestrzeń.

Własności efektywnego tensora naprężeń zaburzenia zależą od szczegółów definicji przejścia granicznego, od charakteru nieliniowości zaburzenia, a także od własności samej czasoprzestrzeni. Schemat Greena–Walda na wielkość opisującą zaburzenie wybiera poprawkę do tensora metrycznego zdefiniowaną jako

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \operatorname*{w-lim}_{\lambda \to 0} g_{\mu\nu}. \tag{4.10}$$

Zakłada on, że wielkość ta jest mała w parametrze $\lambda$ (czyli $\lim_{\lambda\to 0} h_{\mu\nu} = 0$), co przekłada się no to, że tensor metryczny jest liniowy w parametrze $\lambda$ i jego uśrednienia można dokonać za pomocą zwykłej granicy

$$\underset{\lambda\to 0}{\text{w-lim}}\, g_{\mu\nu} = \lim_{\lambda\to 0} g_{\mu\nu} = \overline{g}_{\mu\nu}. \tag{4.11}$$

O pochodnych poprawki $h_{\mu\nu}$ schemat zakłada jedynie, że są ograniczone w parametrze $\lambda$ (czyli $\lim_{\lambda\to 0} \nabla_\lambda h_{\mu\nu} < \infty$), niekoniecznie małe. Wreszcie zakłada się istnienie następującego skończonego, gładkiego pola tensorowego

$$\mu_{\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu} = \underset{\lambda\to 0}{\text{w-lim}}(\nabla_\theta h_{\kappa\lambda} \nabla_\iota h_{\mu\nu}). \tag{4.12}$$

Pole to jest symetryczne w każdej kolejnej parze wskaźników i dodatkowo jest symetryczne ze względu na zamianę dwóch ostatnich par wskaźników

$$\mu_{\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu} = \mu_{(\theta\iota)(\kappa\lambda)(\mu\nu)} = \mu_{\theta\iota\mu\nu\kappa\lambda}. \tag{4.13}$$

Okazuje się, że za pomocą tego pola można wyrazić efektywny tensor naprężeń zaburzenia

$$\begin{aligned}\kappa t_{\mu\nu} = {} & \frac{1}{8}\overline{g}_{\mu\nu}(-\mu^{\gamma}{}_{\gamma}{}^{\beta\alpha}{}_{\beta\alpha} - \mu^{\gamma}{}_{\gamma}{}^{\beta}{}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\alpha} + 2\mu^{\gamma\beta}{}_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}\mu^{\beta\alpha}{}_{\mu\beta\nu\alpha} - \frac{1}{2}\mu^{\beta}{}_{\beta\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu\alpha} \\ & + \frac{1}{4}\mu_{\mu\nu}{}^{\beta\alpha}{}_{\beta\alpha} - \frac{1}{4}\mu_{\mu}{}^{\beta}{}_{\nu\beta}{}^{\alpha}{}_{\alpha} - \frac{1}{4}\mu_{\nu}{}^{\beta}{}_{\mu\beta}{}^{\alpha}{}_{\alpha} + \frac{3}{4}\mu^{\beta}{}_{\beta\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{\alpha} - \frac{1}{2}\mu^{\beta\alpha}{}_{\mu\nu\beta\alpha}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Green i Wald wykazali, że efektywny tensor naprężeń zaburzenia jest wielkością niezmienniczą względem transformacji cechowania i jest kwadratowy w poprawce do tensora metrycznego. Przy dodatkowym założeniu, że tensor naprężeń czasoprzestrzeni spełnia słaby warunek energetyczny, wykazali oni ponadto dwa kolejne twierdzenia. Pierwsze mówiące o tym, że efektywny tensor naprężeń zaburzenia jest bezśladowy i drugie, że spełnia on słaby warunek energetyczny. Twierdzenia te niosą ważne konsekwencje dla kosmologii, gdyż wynika z nich, że małe niejednorodności nie mogą imitować efektów związanych ze stałą kosmologiczną, ani żadną inną hipotetyczną formą ciemnej energii.

Oryginalna praca Greena i Walda [69] jedynie zakładała, a nie zawierała dowodu istnienia jednoparametrowej rodziny czasoprzestrzeni, dla której występowałby nietrywialny efekt uśredniania zaburzeń. Pojawiły się obawy dotyczące braku jasnej interpretacji parametru, po którym przeprowadza się uśrednianie (Räsänen [146]), oraz wątpliwości, czy schemat ten poprawnie oddaje efekty związanie z uśrednianiem w skończonych obszarach przestrzeni (Ellis [48]). Jedynym wówczas znanym przykładem rodziny czasoprzestrzeni spełniającej założenia schematu Greena–Walda był opisany przez Burnetta [23] przypadek płaskiej fali grawitacyjnej. By pokazać, że procedura ta nie zawęża zbyt mocno klasy modeli, do których może być stosowana, Green i Wald w pracy [70] zaprezentowali jej działanie na przykładzie czasoprzestrzeni Gowdy'ego. Tak w tym jak i we wcześniejszym przykładzie rozpatrywane były jednak czasoprzestrzenie próżniowe. Pierwszego przykładu rodziny metryk rozwiązującej niepróżniowe równania Einsteina dostarczyli Szybka *et al.* [167]. Była to czasoprzestrzeń Wainwrighta–Marshmana wypełniona płynem kosmicznym o sztywnym równaniu stanu. Równocześnie był to pierwszy przykład o potencjalnym znaczeniu kosmologicznym.

Poniżej prezentujemy przykład niepróżniowej czasoprzestrzeni wspierający założenia schematu uśredniania niejednorodności w podejściu zaproponowanym przez Greena i Walda. Rozważamy model kosmologiczny skonstruowany jako pyłowy model Friedmanna–Lemaître'a zawierający pierwotne fale grawitacyjne. Jego największą zaletą jest to, że jego model tła jest o wiele bliższy akceptowalnym modelom Wszechświata niż dotychczasowe przykłady. Model ten, w przeciwieństwie do nierealistycznego przykładu zaburzonej czasoprzestrzeni Robertsona–Walkera z pracy Greena i Walda [70], posiada dobrze określone ugruntowanie fizyczne, przy czym podobnie jak on został uzyskany metodą Synge'a. Tego typu modele były badane w przybliżeniu WKB przez Ehlersa, Prasannę i Breuera [46, 45, 143]. Tutaj do zdefiniowania zaburzenia wykorzystujemy znalezione przez nas ścisłe rozwiązania równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych.

### 4.2.1 Wysokoczęstotliwościowe pierwotne fale grawitacyjne w pyłowym modelu kosmologicznym Friedmanna–Lemaître'a

Rozważmy model kosmologiczny, dla którego pole metryczne i pole prędkości materii przyjmują następujące formy

$$g_{\mu\nu} = A^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u_\nu = A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

gdzie pojawiające się wyżej funkcje dane są formułami

$$A = a_0 \frac{a_0^2 H_0^2}{c^2} \frac{\eta^2}{4}, \qquad F = \varepsilon \frac{\frac{1}{4} \frac{a_0 H_0}{c} \lambda \left(\sin \frac{\eta - z}{\lambda} + \frac{\lambda}{\eta} \cos \frac{\eta - z}{\lambda}\right)}{\frac{A}{a_0}}. \tag{4.16}$$

Współrzędna $\eta$ jest współrzędną czasową, $x$, $y$, $z$ są współrzędnymi przestrzennymi, a ich zakres zmienności dany jest jako

$$\eta > 0, \qquad 1 - F^2 > 0, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{4.17}$$

Powyższe nierówności wyznaczają obszar, w którym wyznacznik rozważanej metryki jest ściśle ujemny, a czasoprzestrzeń jest gładką czasoprzestrzenią lorentzowską. Dla $\varepsilon < 3\frac{a_0 H_0}{c}\lambda$ dolne ograniczenie na współrzędną czasową istnieje w postaci funkcyjnej zależności od współrzędnej przestrzennej $z$. Na tej hiperpowierzchni skalar krzywizny przyjmuje wartość nieskończoną. Gęstość energii w tym modelu jest zawsze dodatnia, jeśli tylko zachodzi $\varepsilon < 7\frac{a_0 H_0}{c}\lambda$. Nie jest to równoznaczne ze spełnianiem przez tensor energii-pędu tego modelu słabego warunku energetycznego. Weryfikacja tego warunku dla dowolnego czasowego pola wektorowego wymaga dokładniejszych badań. Z powodu pewnej sztuczności w konstrukcji tego modelu jego geometryczne cechy są mocno skomplikowane. Wśród jego podstawowych własności możemy wymienić brak pola przyspieszenia, brak pola wirowości oraz poprzeczność pola grawitomagnetycznego (części magnetycznej pola Weyla). Nie znamy niestety jawnej postaci żadnego równania stanu dla tego modelu. Z punktu widzenia schematu uśredniania zaburzeń nie jest to jednak istotne, ponieważ powinien on pracować dla dowolnie złożonych czasoprzestrzeni, o ile tylko spełniają jego założenia.

Dla $\varepsilon \ll 1$ rozważany model posiada interpretację wypełnionego pyłem, przestrzennie płaskiego, pozbawionego stałej kosmologicznej modelu kosmologicznego Friedmanna–Lemaître'a zawierającego geometrycznie szczególne, słabe pole swobodnej fali grawitacyjnej o długości $\lambda$ propagującej się w kierunku $z$. Można łatwo sprawdzić, że pole perturbacyjne

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \overline{g}_{\mu\nu}, \tag{4.18}$$

rozważane względem pola metrycznego tła

$$\overline{g}_{\mu\nu} = \lim_{\varepsilon\to 0} g_{\mu\nu} = \lim_{\lambda\to 0} g_{\mu\nu}, \tag{4.19}$$

istotnie jest ortogonalne względem przepływu, poprzeczne, bezśladowe i spełnia równanie propagacji pierwotnych fal grawitacyjnych (2.84) (z $\pi_{\mu\nu} = 0$).

Z drugiej strony jest widoczne, że pole perturbacyjne $h_{\mu\nu}$ jest małe w długości fali $\lambda$, a jego pierwsze pochodne są w tym parametrze ograniczone. Ponadto istnieje dla niego skończone pole $\mu_{\theta\iota\kappa\lambda\mu\nu}$ zdefiniowane formułą (4.12), którego niezerowe niezależne składowe dane są jako

$$\begin{aligned}\mu_{\eta\eta xxxx} &= -\mu_{\eta\eta xxyy} = \mu_{\eta\eta yyyy} = -\mu_{\eta zxxxx} = \mu_{\eta zxxyy} = -\mu_{\eta zyyyy} \\ &= \mu_{zzxxxx} = -\mu_{zzxxyy} = \mu_{zzyyyy} = \varepsilon^2 \frac{a_0^{10} H_0^6}{c^6}\frac{\eta^4}{512}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Pozostałe składowe tego pola wynikają jego własności symetrii (4.13) lub znikają. Wymienione własności pola perturbacyjnego wspólnie wskazują, że dla rozważanego modelu istnieje nietrywialna granica małych długości fali. Według schematu uśredniania zaburzeń Greena–Walda efektywny tensor naprężeń zaburzenia $t_{\mu\nu}$ w tej granicy może zostać wyznaczony za pomocą formuły (4.14) lub bezpośrednio z uśrednionych równań Einsteina (4.9),[2] dając

$$t_{\mu\nu} = \varepsilon^2 \frac{c^2}{a_0^2 H_0^2} \frac{1}{4\kappa\eta^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Efektywny tensor naprężeń zaburzenia jest kwadratowy w poprawce perturbacyjnej, bezśladowy i spełnia słaby warunek energetyczny. Z punktu widzenia rozważanego modelu kosmologicznego zachowuje się więc jak płyn o promienistym równaniu stanu. Uzyskane własności efektywnego tensora naprężeń zaburzenia są w pełnej zgodności z twierdzeniami Greena i Walda. Stąd model, który rozważyliśmy, stanowi kolejną demonstrację trafności ich podejścia do efektów zwrotnego wpływu zaburzeń w kosmologii. Jednocześnie wykazaliśmy, że pierwotne fale grawitacyjne wysokich częstotliwości nie mogą odpowiadać za dodatnią stałą kosmologiczną w obserwowanym Wszechświecie.

W obliczeniach tego podrozdziału wykorzystaliśmy pakiety xAct [114] oraz ccgrg [185] dla środowiska Mathematica.

[2] Tutaj, inaczej niż dla przypadku przedstawionego w pracy [167], słaba granica pola naprężeń $T_{\mu\nu}$ nie sprowadza się do zwykłej granicy.

# Rozdział 5

# Podsumowanie

W tej części dokonamy całościowego podsumowania uzyskanych rezultatów badań i wykonanych przy ich okazji prac.

Znaleźliśmy wszystkie liouville'owskie rozwiązania równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych dla modeli kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a zawierających stałą kosmologiczną, przestrzennie zakrzywionych, wypełnionych płynem kosmicznym o liniowym, barotropowym równaniu stanu przy wykładniku adiabaty ze zbioru $\gamma \in \left\{0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2\right\}$. Występują one w formie Hermite'a–Darboux (3.20) i dzielą się na dwie grupy: rozwiązań oscylacyjnych i rozwiązań nieoscylacyjnych.

Liouville'owskie rozwiązania oscylacyjne istnieją dla następujących modeli:

- wypełnionych pyłem, przestrzennie zakrzywionych, ze stałą kosmologiczną:

$$\left|\frac{\mu_{1,2}}{a}\right|^2 \propto 4\Omega_\Lambda(\alpha - 3\Omega_K) + \alpha(\alpha - 3\Omega_K)\frac{1}{x^2} + \Omega_d\alpha\frac{1}{x^3},$$
$$\beta = \alpha(\alpha - 4\Omega_K)(\alpha(\alpha - 3\Omega_K)^2 + 27\Omega_\Lambda\Omega_d^2), \quad (5.1)$$

- wypełnionych promieniowaniem, przestrzennie zakrzywionych, ze stałą kosmologiczną:

$$\left|\frac{\mu_{1,2}}{a}\right|^2 \propto 4\Omega_\Lambda + \alpha\frac{1}{x^2},$$
$$\beta = \alpha(\alpha(\alpha - 4\Omega_K) + 16\Omega_\Lambda\Omega_r), \quad (5.2)$$

- wypełnionych ścianami domenowymi, przestrzennie zakrzywionych, bez stałej kosmologicznej:

$$\left|\frac{\mu_{1,2}}{a}\right|^2 \propto 9\Omega_w^2 + 3\Omega_w\alpha\frac{1}{x} + \alpha(\alpha - 3\Omega_K)\frac{1}{x^2},$$
$$\beta = \alpha^2(\alpha - 4\Omega_K)(\alpha - 3\Omega_K)^2. \quad (5.3)$$

Wśród ich podstawowych własności należy wymienić następujące:

- Zaburzenia, których zachowanie się w czasie reprezentują, mają postać fal biegnących.
- Gdy $\beta > 0$, oba rozwiązania są modami oscylacyjnymi. W szczególności zachodzi to dla fizycznie interesujących zakresów parametrów gęstości, którymi tutaj są odpowiednio $(\Omega_d, \Omega_\Lambda) \in (0, 1) \times (0, 1)$, $(\Omega_r, \Omega_\Lambda) \in (0, 1) \times (0, 1)$, oraz $\Omega_w \in (0, 2)$.
- Gdy $\beta < 0$, oba rozwiązania są modami eksponencjalnymi, jeden wzrastającym, a drugi opadającym. Można założyć, że mod wzrastający powinien być odrzucony jako niefizyczny, a tylko mod opadający może być fizycznie realizowany. Dla modeli, dla których to zachodzi, istnieje pewna minimalna wartość parametru falowego, poniżej której propagacja fal grawitacyjnych jest tłumiona.
- Mody oscylacyjne są niewzrastające. We wczesnych stadiach ewolucji ich amplitudy konforemne[1] gwałtownie maleją w tempie kontrolowanym przez parametr falowy i parametr gęstości pyłu. W późnych stadiach ewolucji ich amplitudy konforemne stabilizują się na poziomie zdeterminowanym przez parametry gęstości stałej kosmologicznej i ścian domenowych.

Liouville'owskie rozwiązania nieoscylacyjne istnieją dla następujących modeli:

- wypełnionych materią sztywną, dodatnio przestrzennie zakrzywionych, bez stałej kosmologicznej:

$$\left(\frac{\mu_1}{a}\right)^2 \propto \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1+N}{2}\right)_n \left(\frac{1-N}{2}\right)_n}{(n!)^3} \left(-\frac{\Omega_K}{\Omega_s} x^4\right)^n, \qquad N \in \{2n+1\colon 1 \leqslant n \in \mathbb{N}\}, \tag{5.4}$$

- wypełnionych materią ultralekką, dodatnio przestrzennie zakrzywionych, bez stałej kosmologicznej:

$$\left(\frac{\mu_1}{a}\right)^2 \propto \sum_{n=0}^{\frac{2N-2}{3}} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{2+2N}{3}\right)_n \left(\frac{2-2N}{3}\right)_n}{n!\left(\frac{4}{3}\right)_n \left(\frac{7}{6}\right)_n} \left(-\frac{\Omega_K}{\Omega_u} x^3\right)^n, \qquad N \in \{3n+1\colon 1 \leqslant n \in \mathbb{N}\}, \tag{5.5}$$

[1] Tym skrótowym określeniem nazywamy wypisane tutaj amplitudy mierzone wielkością $\left|\frac{\mu}{a}\right|$, która charakteryzuje trend czasowej ewolucji poprawki do metryki trójwymiarowej przestrzeni maksymalnie symetrycznej w modelu tła.

$$\left(\frac{\mu_1}{a}\right)^2 \propto \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\frac{2N-1}{3}} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{1+2N}{3}\right)_n \left(\frac{1-2N}{3}\right)_n}{n! \left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n} \left(-\frac{\Omega_K}{\Omega_u} x^3\right)^n,$$
$$N \in \{3n+2\colon 1 \leqslant n \in \mathbb{N}\}. \quad (5.6)$$

Ich podstawowe własności są następujące:

- Zaburzenia, których zachowanie się w czasie reprezentują, mają postać fal stojących.
- Dla tych rozwiązań $\beta = 0$. Drugie liniowo niezależne rozwiązanie może być uzyskane metodą redukcji rzędu równania różniczkowego.
- Postać funkcyjna tych rozwiązań nie jest uniwersalna, zmienia się ona wraz z wartością liczby falowej.
- Pierwsze rozwiązanie jest modem algebraicznym, drugie jest modem całkowym, i oba rozwiązania są opadające. Wczesne stadia ich ewolucji są rządzone przez parametry gęstości materii sztywnej i materii ultralekkiej. Ewolucja modów w pobliżu fazy, gdy czasoprzestrzeń osiąga swoje największe rozmiary, jest rządzona przez parametr gęstości krzywizny. Wówczas perturbacje przyjmują swoje minimalne wielkości.

Ponadto w toku prac uzyskaliśmy również następujące wyniki:

- Skonstruowaliśmy nowe narzędzie służące do przeprowadzania zamian zmiennych w równaniach różniczkowych w środowisku Mathematica.
- Zbudowaliśmy narzędzie uniwersalnie porządkujące sumy symbolicznych nieskończonych szeregów w środowisku Mathematica. Służy ono znajdowaniu rozwiązań równań różniczkowych metodami Frobeniusa i Thomégo.
- Podaliśmy jawne formuły dla wykładników charakterystycznych Thomégo w nieregularnych punktach osobliwych, nierozgałęzionych rzędu 2, 3, i 4 oraz rozgałęzionych rzędu $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, i $\frac{7}{2}$.
- Rozszerzyliśmy zakres bezpośredniej stosowalności transformacji zespolonej charakterystyki dla całki eliptycznej trzeciego rodzaju na dowolne rzeczywiste wartości argumentu.
- Odkryliśmy nową wymierną transformację charakterystyki dla całki eliptycznej trzeciego rodzaju.
- Podaliśmy nową kowariantną, niezależną od wyboru układu współrzędnych w modelu tła, definicję zaburzeń w postaci słabych fal grawitacyjnych w modelach kosmologicznych Friedmanna–Lemaître'a.

- Wskazaliśmy na źródło słabości klasycznej interpretacji procesu kreacji grawitonów w efekcie Grishchuka jako wzmacniania amplitudy pierwotnych fal grawitacyjnych na przejściu fazowym.

- Znaleźliśmy nowy przykład jednoparametrowej rodziny rozwiązań niepróżniowych równań Einsteina zgodny z podejściem Greena–Walda do problemu uśredniania zaburzeń w modelach kosmologicznych. Jest nim pyłowy model Friedmanna–Lemaître'a zawierający pierwotne fale grawitacyjne.

- Na wyżej wspomnianym jawnym przykładzie modelu kosmologicznego wykazaliśmy, że pole pierwotnych fal grawitacyjnych wysokich częstotliwości nie może naśladować stałej kosmologicznej.

# Dodatek A

# Równania różniczkowe klasy Fuchsa i rozwiązania Frobeniusa

Ten dodatek poświęcimy zestawieniu podstawowych definicji i informacji na temat równań różniczkowych klasy Fuchsa. Zaprezentujemy również konstrukcję lokalnych rozwiązań tych równań w otoczeniu ich punktów osobliwych, które nazywane są rozwiązaniami Frobeniusa. Zawarte tu wiadomości zostały zaczerpnięte z podręczników [86, 132, 147, 157] i zmodyfikowane na potrzeby tego krótkiego opracowania.[1] Nowością jest tutaj alternatywne ujęcie punktu w nieskończoności, który dzięki zastosowaniu odpowiedniego podejścia jest w analizie traktowany uniwersalnie razem z innymi punktami płaszczyzny zespolonej. Takie ujednolicenie jest szczególnie pomocne przy tworzeniu oprogramowania służącego do klasyfikacji równań różniczkowych.

Przedmiotem naszych rozważań będzie następujące jednorodne, liniowe równanie różniczkowe zwyczajne, drugiego rzędu

$$P_2(z)w''(z) + P_1(z)w'(z) + P_0(z) = 0, \tag{A.1}$$

gdzie współczynniki $P_2(z)$, $P_1(z)$ i $P_0(z)$ są wielomianami w zmiennej $z$, a prim oznacza różniczkowanie względem tej zmiennej. Za dziedzinę tego równania różniczkowego przyjmujemy całą płaszczyznę zespoloną wraz z dołączonym do niej punktem w nieskończoności, czyli tak zwaną sferę Riemanna. Zadane punkty dziedziny równania różniczkowego będziemy numerować indeksem $j$, a ich

[1] Pozycje [147, 157], choć bardzo cenne, zawierają niestety wiele błędów drukarskich. W tym i następnym dodatku poprawiamy te błędy bez szczegółowego ich wymieniania.

położenie oznaczać jako $z_j$. Różne od nieskończoności punkty dziedziny równania różniczkowego będziemy numerować indeksem $i$, $i \neq 0$, natomiast indeks 0 rezerwujemy dla punktu w nieskończoności, a dla jego położenia definiujemy $z_0 = 0$. Zabieg ten pozwala na systematyczne traktowanie punktu w nieskończoności wspólnie z pozostałymi punktami dziedziny równania różniczkowego. Przenosi się on także na zapis przyjmowany dla kolejnych nowo wprowadzanych funkcji i wielkości.

Podstawowa charakterystyka równania różniczkowego (A.1) na płaszczyźnie zespolonej ($z \neq \infty$) opiera się na analizie jego wymiernych współczynników, zdefiniowanych następująco

$$p_i(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)}, \qquad q_i(z) = \frac{P_0(z)}{P_2(z)}. \tag{A.2}$$

Aby badać charakter tego równania różniczkowego w punkcie w nieskończoności ($z = \infty$), analizie w punkcie $z = 0$ poddaje się następujące funkcje

$$p_0(z) = \frac{2}{z} - \frac{P_1\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2 P_2\left(\frac{1}{z}\right)}, \qquad q_0(z) = \frac{P_0\left(\frac{1}{z}\right)}{z^4 P_2\left(\frac{1}{z}\right)}, \tag{A.3}$$

które są wymiernymi współczynniki równania różniczkowego uzyskanego z oryginalnego równania różniczkowego poprzez zamianę zmiennej niezależnej postaci $z \longrightarrow \frac{1}{z}$.

Punktami zwyczajnymi równania różniczkowego (A.1) nazywane są te punkty $z_j$, w których funkcje $p_j(z)$ i $q_j(z)$ są holomorficzne. Rozwijając, należą do nich wszystkie punkty płaszczyzny zespolonej, w których funkcje $p_i(z)$ i $q_i(z)$ są holomorficzne, a punkt w nieskończoności, jeśli funkcje $p_0(z)$ i $q_0(z)$ są holomorficzne w punkcie $z = 0$.

Punktami osobliwymi równania różniczkowego (A.1) nazywane są te punkty, które nie są jego punktami zwyczajnymi. W praktyce należą do nich punkty zerowe wielomianu $P_2(z)$ oraz ewentualnie punkt w nieskończoności.

Regularnymi punktami osobliwymi równania różniczkowego (A.1) nazywane są te punkty osobliwe $z_j$, w których funkcje $(z - z_j)p_j(z)$ i $(z - z_j)^2 q_j(z)$ są holomorficzne. Innymi słowy są to takie punkty osobliwe, w których funkcja $p_j(z)$ posiada biegun co najwyżej pierwszego rzędu, a funkcja $q_j(z)$ biegun co najwyżej drugiego rzędu.

Nieregularnymi punktami osobliwymi równania różniczkowego (A.1) nazywane są te punkty osobliwe, które nie są jego regularnymi punktami osobliwymi.

Równaniami różniczkowymi klasy Fuchsa nazywane są takie równania różniczkowe typu (A.1), które nie posiadają nieregularnych punktów osobliwych.

Dwa lokalne, liniowo niezależne rozwiązania równania różniczkowego (A.1) w otoczeniu zadanego punktu zwyczajnego $z_j$ dane są następującymi szeregami potęgowymi

$$w_{j,l}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,l,n}(z - z_j)^n, \tag{A.4}$$

gdzie indeks $l$, $l \in \{1, 2\}$, numeruje poszczególne rozwiązania oraz przyjmujemy, że $a_{j,1,1} = 0$ i $a_{j,2,0} = 0$. Szeregi te są zbieżne w kole o środku w punkcie $z_j$ i promieniu równym odległości do najbliższego punktu osobliwego równania różniczkowego. Funkcje, które szeregi te reprezentują w swoim obszarze zbieżności, mogą zostać jednoznacznie określone na całej dziedzinie rozważanego równania różniczkowego przy wykorzystaniu metody zwanej przedłużeniem analitycznym. Procedura ta jest szczegółowo opisana między innymi w podręcznikach [184, 161, 54].[2]

Na potrzeby dalszych rozważań wprowadzamy następujące wielkości pomocnicze

$$p_{j,k} = \operatorname*{res}_{z=z_j} \frac{p_j(z)}{(z - z_j)^{k+1}}, \qquad q_{j,k} = \operatorname*{res}_{z=z_j} \frac{q_j(z)}{(z - z_j)^{k+1}}, \tag{A.5}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$, a przez $\operatorname{res}_{z=z_j} f(z)$ oznaczamy residuum funkcji $f(z)$ w punkcie $z = z_j$. Stanowią one $k$-te współczynniki rozwinięcia funkcji $p_j(z)$ i $q_j(z)$ w szeregi Laurenta w pierścieniu wokół punktu $z_j$ dziedziny równania różniczkowego (A.1).

Wykładnikami charakterystycznymi (Frobeniusa) w regularnym punkcie osobliwym $z_j$ równania różniczkowego (A.1) nazywane są pierwiastki następującego kwadratowego równania algebraicznego, zwanego równaniem wskaźnikowym

$$s_{0,j,l}^2 + (p_{j,-1} - 1)s_{0,j,l} + q_{j,-2} = 0, \tag{A.6}$$

gdzie indeks $l$, $l \in \{1, 2\}$, numeruje poszczególne pierwiastki. Pierwiastki te umownie porządkuje się w ten sposób, że $\operatorname{Re} s_{0,j,1} \geqslant \operatorname{Re} s_{0,j,2}$. Wykładniki charakterystyczne w regularnych punktach osobliwych równania różniczkowego klasy Fuchsa spełniają następujący warunek, nazywany tożsamością Fuchsa

$$\sum_j \sum_{l=1}^{2} s_{0,j,l} = N - 2, \tag{A.7}$$

gdzie indeks $j$ przebiega po wszystkich regularnych punktach osobliwych równania różniczkowego, a wielkość $N$ jest ich całkowitą liczbą.

Dwa lokalne, liniowo niezależne rozwiązania równania różniczkowego (A.1) w otoczeniu zadanego regularnego punktu osobliwego $z_j$ nazywane są rozwiązaniami Frobeniusa. Ich postać zależy od różnicy wykładników charakterystycznych w tym punkcie

$$\Delta_{0,j} = s_{0,j,1} - s_{0,j,2}. \tag{A.8}$$

[2] Ponieważ jednak tutaj pracujemy na równaniu różniczkowym, to aby znaleźć jego rozwiązania w otoczeniu punktu spoza obszaru zbieżności uzyskanych szeregów, wygodniej jest na nowo rozwiązać rozważane równanie różniczkowe w otoczeniu owego interesującego nas punktu.

Jeśli $\Delta_{0,j} \notin \mathbb{N}$, to rozwiązania Frobeniusa przybierają następujące formy

$$w_{j,l}(z) = (z - z_j)^{s_{0,j,l}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,l,n}(z - z_j)^n, \tag{A.9}$$

gdzie indeks $l$, $l \in \{1,\, 2\}$, numeruje poszczególne rozwiązania. Jeśli natomiast $\Delta_{0,j} \in \mathbb{N}$, to drugie z rozwiązań Frobeniusa może zawierać człon logarytmiczny

$$w_{j,1}(z) = (z - z_j)^{s_{0,j,1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,1,n}(z - z_j)^n, \tag{A.10a}$$

$$w_{j,2}(z) = C_{j,2} \ln(z - z_j)\, w_{j,1}(z) + (z - z_j)^{s_{0,j,2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_{j,2,n}(z - z_j)^n, \tag{A.10b}$$

gdzie przyjmujemy, że $b_{j,2,\Delta_{0,j}} = 0$. Szeregi występujące w rozwiązaniach (A.9) i (A.10) są zbieżne w kole o środku w punkcie $z_j$ i promieniu równym odległości do najbliższego punktu osobliwego równania różniczkowego. Funkcje reprezentowane przez te szeregi w ich obszarze zbieżności mogą zostać w sposób jednoznaczny przedłużone analitycznie na całą dziedzinę rozważanego równania różniczkowego.

# Dodatek B

# Wykładniki charakterystyczne Thomégo w nieregularnych punktach osobliwych niskich rzędów

W tym dodatku podamy jawne formuły dla wykładników charakterystycznych Thomégo w nieregularnych punktach osobliwych, nierozgałęzionych rzędu 2, 3, i 4 oraz rozgałęzionych rzędu $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, i $\frac{7}{2}$. Wykładniki charakterystyczne Thomégo są jednym z pojęć stosowanych do celów klasyfikacji jednorodnych, liniowych równań różniczkowych zwyczajnych, drugiego rzędu, posiadających współczynniki będące funkcjami wymiernymi w zmiennej niezależnej. Pojawiają się one w sytuacji, gdy równanie różniczkowe posiada nieregularne punkty osobliwe. Wówczas charakteryzują one formalne, asymptotyczne rozwiązania równania różniczkowego w pobliżu owych nieregularnych punktów osobliwych. Rozwiązania te nazywane są rozwiązaniami Thomégo i zostały szczegółowo opisane na przykład w książkach [132, 147, 157].

W odróżnieniu od wykładników charakterystycznych Frobeniusa w regularnym punkcie osobliwym, które spełniają powszechnie znane równanie wskaźnikowe (A.6), ogólne równania dla wykładników charakterystycznych Thomégo w nieregularnym punkcie osobliwym nie są obecne w literaturze.[1] Tutaj uzupełnia-

[1] W książce [157] zostały wprawdzie podane wzory dla wykładników charakterystycznych Thomégo zerowego stopnia, ale tylko w przypadku, gdy równanie różniczkowe zadane jest w formie kanonicznej, naturalnej.

my tę lukę, rozważając nieregularne punkty osobliwe niskich rzędów, z którymi mamy do czynienia w tej rozprawie. W dodatku tym utrzymujemy ciągłość oznaczeń przyjętych w dodatku poprzednim (A).

Rząd osobliwości punktu $z_j$ dziedziny równania różniczkowego (A.1) zdefiniowany jest następująco

$$R_j = \max\Big\{H_j,\ \frac{K_j}{2}\Big\}, \tag{B.1}$$

gdzie $H_j$ jest krotnością punktu zerowego funkcji $\frac{1}{p_j(z)}$ w punkcie $z_j$, a $K_j$ jest krotnością punktu zerowego funkcji $\frac{1}{q_j(z)}$ w tym samym punkcie, o ile funkcje te są określone. Zgodnie z tą definicją rząd osobliwości punktu zwyczajnego równania różniczkowego jest równy zeru, natomiast rząd osobliwości regularnego punktu osobliwego równania różniczkowego jest równy jedności.

Nierozgałęzionymi nieregularnymi punktami osobliwymi równania różniczkowego (A.1) nazywane są te nieregularne punkty osobliwe $z_j$, których rząd osobliwości jest liczbą naturalną większą od jedności, $R_j \in \{n\colon 2 \leqslant n \in \mathbb{N}\}$.

Rozgałęzionymi nieregularnymi punktami osobliwymi równania różniczkowego (A.1) nazywane są te nieregularne punkty osobliwe $z_j$, których rząd osobliwości jest liczbą połówkową większą od jedności, $R_j \in \{n - \frac{1}{2}\colon 2 \leqslant n \in \mathbb{N}\}$.

Istotnie nieregularnymi punktami osobliwymi równania różniczkowego (A.1) nazywane są te nieregularne punkty osobliwe $z_j$, których rząd osobliwości jest nieokreślony, $R_j = \infty$.

Konfluentnymi równaniami różniczkowymi nazywane są takie równania różniczkowe typu (A.1), które posiadają przynajmniej jeden nieregularny punkt osobliwy.

Zredukowanymi konfluentnymi równaniami różniczkowymi nazywane są takie równania różniczkowe typu (A.1), które posiadają przynajmniej jeden rozgałęziony nieregularny punkt osobliwy.

Dwa formalne, asymptotyczne, liniowo niezależne rozwiązania równania różniczkowego (A.1) w pobliżu zadanego nierozgałęzionego nieregularnego punktu osobliwego $z_j$ nazywane są normalnymi rozwiązaniami Thomégo. W ogólności przybierają one formy

$$w_{j,l}(z) = (z - z_j)^{s_{0,j,l}} \exp\Bigg(-\sum_{m=1}^{R_j-1} \frac{s_{m,j,l}}{m(z - z_j)^m}\Bigg) \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,l,n}(z - z_j)^n. \tag{B.2}$$

Z kolei dwa formalne, asymptotyczne, liniowo niezależne rozwiązania równania różniczkowego (A.1) w pobliżu zadanego rozgałęzionego nieregularnego punktu osobliwego $z_j$ nazywane są subnormalnymi rozwiązaniami Thomégo. W ogólności przybierają one formy

$$w_{j,l}(z) = (z-z_j)^{s_{0,j,l}} \exp\Biggl(-\sum_{m=1}^{2(R_j-1)} \frac{2s_{m/2,j,l}}{m(z-z_j)^{m/2}}\Biggr) \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,l,n}(z-z_j)^{n/2}. \quad \text{(B.3)}$$

Indeks $l$, $l \in \{1,\, 2\}$, numeruje poszczególne rozwiązania. Wielkości $s_{m,j,l}$ nazywane są wykładnikami charakterystycznymi (Thomégo) stopnia $m$ w nieregularnym punkcie osobliwym $z_j$ równania różniczkowego (A.1). Formują one dwie serie numerowane indeksem $l$, $l \in \{1,\, 2\}$.[2] W szczególnych przypadkach drugie z normalnych rozwiązań Thomégo może zawierać człon logarytmiczny. Szeregi występujące w rozwiązaniach (B.2) i (B.3) w ogólności nie są zbieżne, stąd ich formalny charakter. Funkcje (B.2) i (B.3) stanowią asymptotyczne reprezentacje poszczególnych rozwiązań w sektorach $\bigl|\mathrm{Arg}\bigl(s_{R_j-1,j,l}(z-z_j)^{-(R_j-1)}\bigr)\bigr| < \frac{\pi}{2}$ zaczepionych w punkcie $z_j$.[3]

Wykładniki charakterystyczne stopnia $R_j - 1$ w nieregularnym punkcie osobliwym $z_j$ równania różniczkowego (A.1) są pierwiastkami pewnego kwadratowego równania algebraicznego, zwanego równaniem wskaźnikowym. Pierwiastki te umownie porządkuje się w ten sposób, że $\mathrm{Re}\, s_{R_j-1,j,1} \geqslant \mathrm{Re}\, s_{R_j-1,j,2}$. Wykładniki charakterystyczne niższych stopni spełniają natomiast liniowe równania algebraiczne. Poniżej zestawiamy te równania w przypadkach nieregularnych punktów osobliwych niskich rzędów. Wykładniki charakterystyczne zerowego stopnia w punktach osobliwych konfluentnego równania różniczkowego spełniają następujący warunek, nazywany uogólnioną tożsamością Fuchsa

$$\sum_j \sum_{l=1}^{2} s_{0,j,l} = \sum_j R_j - 2, \quad \text{(B.4)}$$

gdzie indeks $j$ przebiega po wszystkich punktach osobliwych równania różniczkowego.

**Nierozgałęzione nieregularne punkty osobliwe:**

- **rzędu $R_j = 2$:**

$$s_{1,j,l}^2 + p_{j,-2}s_{1,j,l} + q_{j,-4} = 0, \quad \text{(B.5a)}$$

[2] Ponieważ nie jest to wzmiankowane w literaturze, pozwolimy sobie w tym miejscu zauważyć, że w przypadku rozwiązań (B.2) mamy

$$w_{j,l}(z) = \exp\Biggl(\int \sum_{m=0}^{R_j-1} \frac{s_{m,j,l}\, dz}{(z-z_j)^{m+1}}\Biggr) \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,l,n}(z-z_j)^n,$$

co daje zdecydowanie jaśniejszą definicję wykładników Thomégo. W przypadku rozwiązań (B.3) sytuacja przedstawia się analogicznie.

[3] Wynik ten nie pochodzi z cytowanej literatury. Podajemy go na podstawie własnych obserwacji i w tym sensie jest on hipotezą.

$$s_{0,j,l} = -\frac{(p_{j,-1}-2)s_{1,j,l} + q_{j,-3}}{2s_{1,j,l} + p_{j,-2}}. \tag{B.5b}$$

- **rzędu $R_j = 3$:**

$$s_{2,j,l}^2 + p_{j,-3}s_{2,j,l} + q_{j,-6} = 0, \tag{B.6a}$$

$$s_{1,j,l} = -\frac{p_{j,-2}s_{2,j,l} + q_{j,-5}}{2s_{2,j,l} + p_{j,-3}}, \tag{B.6b}$$

$$s_{0,j,l} = -\frac{s_{1,j,l}^2 + p_{j,-2}s_{1,j,l} + (p_{j,-1}-3)s_{2,j,l} + q_{j,-4}}{2s_{2,j,l} + p_{j,-3}}. \tag{B.6c}$$

- **rzędu $R_j = 4$:**

$$s_{3,j,l}^2 + p_{j,-4}s_{3,j,l} + q_{j,-8} = 0, \tag{B.7a}$$

$$s_{2,j,l} = -\frac{p_{j,-3}s_{3,j,l} + q_{j,-7}}{2s_{3,j,l} + p_{j,-4}}, \tag{B.7b}$$

$$s_{1,j,l} = -\frac{s_{2,j,l}^2 + p_{j,-3}s_{2,j,l} + p_{j,-2}s_{3,j,l} + q_{j,-6}}{2s_{3,j,l} + p_{j,-4}}, \tag{B.7c}$$

$$s_{0,j,l} = -\frac{2s_{1,j,l}s_{2,j,l} + p_{j,-3}s_{1,j,l} + p_{j,-2}s_{2,j,l} + (p_{j,-1}-4)s_{3,j,l} + q_{j,-5}}{2s_{3,j,l} + p_{j,-4}}. \tag{B.7d}$$

**Rozgałęzione nieregularne punkty osobliwe:**

- **rzędu $R_j = \frac{3}{2}$:**

$$s_{1/2,j,l}^2 + q_{j,-3} = 0, \tag{B.8a}$$

$$s_{0,j,l} = -\frac{2p_{j,-1} - 3}{4}. \tag{B.8b}$$

- **rzędu $R_j = \frac{5}{2}$:**

$$s_{3/2,j,l}^2 + q_{j,-5} = 0, \tag{B.9a}$$

$$s_{1,j,l} = -\frac{p_{j,-2}}{2}, \tag{B.9b}$$

$$s_{1/2,j,l} = -\frac{s_{1,j,l}^2 + p_{j,-2}s_{1,j,l} + q_{j,-4}}{2s_{3/2,j,l}}, \tag{B.9c}$$

$$s_{0,j,l} = -\frac{4s_{1/2,j,l}s_{1,j,l} + 2p_{j,-2}s_{1/2,j,l} + (2p_{j,-1}-5)s_{3/2,j,l}}{4s_{3/2,j,l}}. \tag{B.9d}$$

- **rzędu $R_j = \frac{7}{2}$:**

$$s_{5/2,j,l}^2 + q_{j,-7} = 0, \tag{B.10a}$$

$$s_{2,j,l} = -\frac{p_{j,-3}}{2}, \tag{B.10b}$$

$$s_{3/2,j,l} = -\frac{s_{2,j,l}^2 + p_{j,-3}s_{2,j,l} + q_{j,-6}}{2s_{5/2,j,l}}, \tag{B.10c}$$

$$s_{1,j,l} = -\frac{2s_{3/2,j,l}s_{2,j,l} + p_{j,-3}s_{3/2,j,l} + p_{j,-2}s_{5/2,j,l}}{2s_{5/2,j,l}}, \tag{B.10d}$$

$$s_{1/2,j,l} = -\frac{s_{3/2,j,l}^2 + 2s_{1,j,l}s_{2,j,l} + p_{j,-3}s_{1,j,l} + p_{j,-2}s_{2,j,l} + q_{j,-5}}{2s_{5/2,j,l}}, \tag{B.10e}$$

$$\begin{aligned} &s_{0,j,l} \\ &= -\frac{4s_{1,j,l}s_{3/2,j,l} + 4s_{1/2,j,l}s_{2,j,l} + 2p_{j,-3}s_{1/2,j,l} + 2p_{j,-2}s_{3/2,j,l} + (2p_{j,-1} - 7)s_{5/2,j,l}}{4s_{5/2,j,l}}. \end{aligned} \tag{B.10f}$$

Powyższe formuły dla wykładników charakterystycznych Thomégo zostały znalezione w środowisku Mathematica za pomocą specjalnie stworzonych narzędzi służących do poszukiwań rozwiązań równań różniczkowych w postaci szeregów. Zostały one szczegółowo opisane w dodatku (D) rozprawy.

# Dodatek C

# Transformacja zespolonej charakterystyki dla całki eliptycznej trzeciego rodzaju

W tym dodatku przedstawiamy rozszerzenie zakresu bezpośredniej stosowalności istniejących formuł dla pewnych całek zawierających całki eliptyczne trzeciego rodzaju z zespolonymi charakterystykami. Formułami, którymi będziemy się zajmować, są całki 416.00–419.00 oraz 437.00–440.00 zawarte w klasycznych tablicach całek eliptycznych Byrda i Friedmana [24]. Rozważymy ponadto ich przypadki graniczne, gdy charakterystyka jest wielkością rzeczywistą. W konsekwencji uzyskujemy nową wymierną transformację charakterystyki i wiążemy ją z innymi znanymi szczególnymi relacjami. Wszystkie rozważane tutaj tożsamości należą do klasy transformacji zamieniających jedynie charakterystykę całki eliptycznej trzeciego rodzaju, a pozostawiających bez zmian jej moduł i argument. Przedstawione tutaj wyniki ukazały się w pracy autora [64].

## C.1 Wprowadzenie

Swoją uwagę skupimy na całce 437.00 z tablic Byrda i Friedmana [24]

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_0^{F(z|m)} \left( \frac{e_1 + ie_2}{1 - (o_1 + io_2)\operatorname{sn}^2(y|m)} + \frac{e_1 - ie_2}{1 - (o_1 - io_2)\operatorname{sn}^2(y|m)} \right) dy \\ &= (e_1 + ie_2)\, \Pi(z|m,\, o_1 + io_2) + (e_1 - ie_2)\, \Pi(z|m,\, o_1 - io_2), \end{aligned} \tag{C.1}$$

gdzie wszystkie parametry $e_1$, $e_2$, $m$, $o_1$, $o_2$, i $z$ są rzeczywiste, przy czym kwadrat modułu $m$ jest ponadto ograniczony do przedziału $0 < m < 1$. Całki tego typu są spotykane przy okazji rozważań różnorodnych problemów fizycznych jak na przykład modelu napięć na powierzchniach kruchych ciał stałych [145], teorii wysokoczęstotliwościowej dielektrycznej odpowiedzi plazmy w tokamakach [101], czy rozważanej w tej rozprawie ewolucji amplitudy pierwotnych fal grawitacyjnych. Całka ta jest ściśle rzeczywista i jest możliwe, a wręcz pożądane, by wyrazić ją za pomocą całek eliptycznych trzeciego rodzaju posiadających rzeczywiste charakterystyki, jak również współczynniki. Odpowiednie formuły zostały podane przez Bydra i Friedmana [24], jednakże wymagały one pewnych poprawek, które zostały naniesione przez Langa i Stevensa [103].[1] Poniżej zestawiamy te formuły w nieznacznie zmienionej notacji

$$\begin{aligned} I(z) = {} & \frac{2}{\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1} \\ & \times \Big( (e_1\tau_2 + e_2\sigma_2)\big(F(z|m) + \nu_1\, \Pi(z|m,\, n_1) + \mu_1 \frac{1}{\sqrt{\eta_1}} (\arctan y_1 + c)\big) \\ & - (e_1\tau_1 + e_2\sigma_1)\big(F(z|m) + \nu_2\, \Pi(z|m,\, n_2) + \mu_2 \frac{1}{\sqrt{\eta_2}} \operatorname{artanh} y_2\big)\Big), \end{aligned} \tag{C.2}$$

gdzie ($i = 1,\, 2$)

$$y_i = \frac{\sqrt{\eta_i} \sin z \cos z}{(1 - \mu_i \sin^2 z)\sqrt{1 - m \sin^2 z}}, \tag{C.3}$$

oraz

$$\sigma_i = \nu_i + \mu_i + 1, \qquad \tau_i = \frac{(n_i - o_1)\nu_i + \mu_i^2 + (n_i + o_1 - 2)\mu_i - o_1}{o_2}, \tag{C.4a}$$

$$\nu_i = \frac{-\mu_i(n_i^2 + (\mu_i - 2)n_i - m(2\mu_i - 1)) - (o_1^2 + o_2^2)}{(n_i - o_1)^2 + o_2^2}, \tag{C.4b}$$

$$n_i = \frac{m}{o_1^2 + o_2^2}\mu_i^2, \qquad \eta_{1,2} = \pm \frac{(m - o_1)^2 + o_2^2}{m(1 - m)}(n_i - m), \tag{C.4c}$$

$$\mu_{1,2} = \frac{\frac{o_1^2 + o_2^2}{m} \pm \sqrt{\frac{o_1^2 + o_2^2}{m} \frac{(1 - o_1)^2 + o_2^2}{1 - m} \frac{(m - o_1)^2 + o_2^2}{m(1 - m)}}}{1 + \frac{(m - o_1)^2 + o_2^2}{m(1 - m)}}. \tag{C.4d}$$

[1] Niestety poprawki te nie zostały w pełni wprowadzone w drugim wydaniu tablic [24] z 1971 roku.

Wielkości $\mu_i$ stanowią rozwiązania następującego równania kwadratowego

$$\left(1+\frac{(m-o_1)^2+o_2^2}{m(1-m)}\right)\mu_i^2-2\frac{o_1^2+o_2^2}{m}\mu_i \\ +\frac{o_1^2+o_2^2}{m}\left(1-\frac{(1-o_1)^2+o_2^2}{1-m}\right)=0. \quad \text{(C.5)}$$

Zwracamy uwagę, że $\mu_1$ jest dodatnie poza przypadkiem trywialnym, gdy $o_1 = o_2 = 0$. Ponadto mamy $0 \leqslant n_2 \leqslant m \leqslant n_1 \leqslant 1$, dlatego też $\Pi(z|m, n_1)$ jest typu cyrkularnego, natomiast $\Pi(z|m, n_2)$ jest typu hiperbolicznego. Wielkość $c$ występująca we wzorze (C.2) nie pojawia się w podręczniku [24], ani w pracy [103].

Można łatwo sprawdzić, że gdy przyjąć wartość wielkości $c$ za zero, całki (C.1) i (C.2) zgadzają się wzajemnie dla wszystkich rzeczywistych $z$, lecz tylko wówczas, gdy $o_1^2 + o_2^2 < m$ (czemu jest równoważne, że $\mu_1 < 1$). Usiłując rozwiązać ten problem, w pracy [166] Sutherland zaproponował zastąpienie wyrażenia $\arctan y_1$ przez wyrażenie, które sprawia, że formuły te (wciąż z $c = 0$) odpowiadają sobie wzajemnie bez ograniczeń na $o_1$, $o_2$, ale tylko dopóki $0 \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$. Zasadniczo jego rezultat jest wystarczający, by wyrazić całkę $I(z)$ dla wszystkich rzeczywistych $z$ poprzez całki eliptyczne z rzeczywistymi parametrami. Wynika to z faktu, że całka eliptyczna trzeciego rodzaju spełnia następujące związki nieparzystości i kwaziperiodyczności w argumencie

$$\Pi(-z|m, n) = -\,\Pi(z|m, n), \tag{C.6}$$

$$\Pi(z+k\pi|m, n) = \Pi(z|m, n) + 2k\,\Pi(\tfrac{\pi}{2}|m, n), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{C.7}$$

Mogą one zostać połączone, by uzyskać

$$I(z) = \operatorname{sgn}\big(z-\pi\lfloor\tfrac{z}{\pi}+\tfrac{1}{2}\rfloor\big)I\big(\big|z-\pi\lfloor\tfrac{z}{\pi}+\tfrac{1}{2}\rfloor\big|\big)+2\lfloor\tfrac{z}{\pi}+\tfrac{1}{2}\rfloor I\big(\tfrac{\pi}{2}\big), \tag{C.8}$$

gdzie przez $\lfloor\ \rfloor$ będziemy oznaczać funkcję podłoga, co pokazuje, że wszystkie wartości całki $I(z)$ dla rzeczywistych $z$ są określone poprzez wartości całki $I(z)$ dla $0 \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Jest rzeczą oczywistą, że dla celów numerycznych posługiwanie się formułą (C.8) należy uznać za najlepszy wybór. Jednakowoż nie jest tak w przypadku obliczeń symbolicznych, w których najistotniejsza jest zwięzłość uzyskiwanych rezultatów. Zgodność pomiędzy całką (C.1) a formułą (C.2) dla dowolnych rzeczywistych wartości $o_1$, $o_2$, i $z$ będzie osiągana automatycznie, jeśli tylko formuła (C.2) samodzielnie będzie posiadała własność (C.8). Może to zostać zrealizowane w naturalny sposób poprzez odpowiedni dobór wielkości $c$, co przeprowadzamy w następnym paragrafie. W trzeciej części tego dodatku odnosimy uzyskane wyniki do całek stowarzyszonych z rozważaną, w szczególności rozpatrujemy przypadek rzeczywistej charakterystyki zachodzący, gdy $o_2 = 0$.

## C.2 Wartości wielkości $c$

W istocie wielkość $c$ zależy od $m$, $o_1$, $o_2$, i $z$ w taki sposób, że jest ona stałą w pewnych regionach przestrzeni parametrów. Ta ogólna zależność może zostać zredukowana do zależności od znaków wyrażeń $o_1^2 + o_2^2 - m$, i $\mu_1 \sin^2 z - 1$. Wynika stąd odpowiednio sześć rozłącznych przypadków, w których należy przyjąć następujące wartości dla $c$:

(I) $o_1^2 + o_2^2 < m$: $\quad c = 0$.

Zauważmy, że w tym przypadku $\mu_1 \sin^2 z - 1$ jest zawsze ujemne.

(II) $o_1^2 + o_2^2 = m$, i $\cos z \neq 0$: $\quad c = \pi \left\lfloor \dfrac{z}{\pi} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$.

Tutaj również zachodzi $\mu_1 \sin^2 z < 1$.

(III) $o_1^2 + o_2^2 = m$, i $\cos z = 0$: $\quad c = \pi \left( \left\lfloor \dfrac{z}{\pi} \right\rfloor + \dfrac{1}{2} \right)$.

Ponieważ ten przypadek dotyczy tylko $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, formuła dla $c$ może zostać zredukowana do $c = z$. Oprócz tego przypadek ten wymaga dodatkowego szczegółowego potraktowania, gdyż graniczna forma formuły (C.2) nie jest tutaj oczywista. Na moment przenieśmy się pomocniczo do współrzędnych biegunowych za pomocą transformacji $o_1 = \varrho \cos\varphi$, i $o_2 = \varrho \sin\varphi$. Dla wspomnianych $z$ oraz $\varrho = \sqrt{m}(1+\varepsilon)$, gdzie $|\varepsilon| \ll 1$, uzyskujemy następujące rozwinięcia oryginalnych formuł w szeregi[2]

$$n_1 = 1 - \frac{1-m}{m - 2\sqrt{m}\cos\varphi + 1}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \tag{C.9a}$$

$$\nu_1 = -\frac{1-m}{m - 2\sqrt{m}\cos\varphi + 1}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{C.9b}$$

$$\mathit{\Pi}(z|m,\, n_1) = \frac{\sqrt{m - 2\sqrt{m}\cos\varphi + 1}}{1-m} z \frac{1}{|\varepsilon|} + O(1). \tag{C.9c}$$

W konsekwencji, gdy $\varrho \to (\sqrt{m})^{\mp}$, otrzymujemy

$$\nu_1\, \mathit{\Pi}(z|m,\, n_1) \to \pm \frac{1}{\sqrt{m - 2\sqrt{m}\cos\varphi + 1}} z, \tag{C.10}$$

co oznacza, że w rozważanym przypadku iloczyn ten jest nieokreślony i jego właściwa wartość nie może być uzyskana na drodze wzięcia jego granicy. Co więcej, wyrażenie $\arctan y_1$ również jest tutaj nieokreślone, bowiem, podstawiając tym razem $\varrho = \sqrt{m}$ i biorąc granicę $z \to (\frac{\pi}{2} + k\pi)^{\mp}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, otrzymujemy

$$\mu_1 \frac{1}{\sqrt{\eta_1}} \arctan y_1 \to \pm \frac{1}{\sqrt{m - 2\sqrt{m}\cos\varphi + 1}} \frac{\pi}{2}. \tag{C.11}$$

[2]Korygujemy tutaj błędy, które pojawiły się w pracy [145].

Aby zachować konsystencję, w tym przypadku oba iloczyny (C.10) i (C.11) w formule (C.2) powinny zostać wprost zastąpione zerami.

(IV) $o_1^2 + o_2^2 > m$, i $\mu_1 \sin^2 z < 1$: $\quad c = 2\pi \left\lfloor \frac{z}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$

(V) $o_1^2 + o_2^2 > m$, i $\mu_1 \sin^2 z = 1$: $\quad c = \pi \left( \left\lfloor \frac{2z}{\pi} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right).$

Wyrażenie $\arctan y_1$ jest w tym przypadku nieokreślone i w formule (C.2) należy je zastąpić przez zero.

(VI) $o_1^2 + o_2^2 > m$, i $\mu_1 \sin^2 z > 1$: $\quad c = 2\pi \left( \left\lfloor \frac{z}{\pi} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right).$

Rozważone powyżej przypadki wyczerpują wszystkie możliwości.

Posiadając w ręku pracujące rozwiązanie, widzimy, że zależność od znaku wyrażenia $\mu_1 \sin^2 z - 1$ jest redukowalna i można się jej pozbyć poprzez odpowiednią zamianę funkcji $\arctan y_1$. Stosownym podstawieniem, jakie należy wykonać w formule (C.2), jest

$$\arctan y_1 + c = \arccos x_1 + d, \tag{C.12}$$

gdzie

$$x_1 = \frac{\frac{(1-\mu_1 \sin^2 z)\sqrt{1-m\sin^2 z}}{\sin z \cos z}}{\sqrt{\eta_1 + \frac{(1-\mu_1 \sin^2 z)^2 (1-m\sin^2 z)}{\sin^2 z \cos^2 z}}}, \tag{C.13}$$

natomiast $d$ jest nową wielkością. Ważne jest, by zwrócić tutaj uwagę, że pojawiające się powyżej wyrażenie $\arccos x_1$ nadal posiada pewne nieciągłości, które muszą być ujęte w odrębny sposób. W tej reprezentacji mamy jedynie trzy osobne przypadki:

(I) $o_1^2 + o_2^2 < m$: $\quad d = \pi \left( \left\lfloor \frac{z}{\pi} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{z}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right).$

Gdy $\sin z = 0$, wyrażenie $\arccos x_1$ należy zastąpić przez 0, natomiast gdy $\cos z = 0$ — przez $\pi$.

(II) $o_1^2 + o_2^2 = m$: $\quad d = \pi \left\lfloor \frac{z}{\pi} \right\rfloor.$

Tutaj, gdy $\sin z = 0$, wyrażenie $\arccos x_1$ należy zastąpić przez 0. W podprzypadku, gdy $\cos z = 0$, omówione wcześniej uwagi dotyczące granicznego zachowania się iloczynu $\nu_1 \mathit{\Pi}(z|m, n_1)$ utrzymują swoją moc, z drugiej natomiast strony wyrażenie $\arccos x_1$ jest wówczas dobrze określone i przybiera wartość $\frac{\pi}{2}$.

(III) $o_1^2 + o_2^2 > m$: $\quad d = \pi \left( \left\lfloor \frac{z}{\pi} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{z}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right).$

Gdy $\sin z = 0$, lub $\cos z = 0$, wyrażenie $\arccos x_1$ należy zastąpić przez zero.

W ostatnim przypadku przy użyciu tożsamości $\lfloor z+\frac{1}{2}\rfloor = \lfloor 2z\rfloor - \lfloor z\rfloor$ wartość wielkości $d$ może zostać uproszczona, lecz tracimy wówczas wyraźnie widoczną symetrię pomiędzy poszczególnymi przypadkami. Gdy $0 \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$, podstawienie (C.12) z wielkością $d$ zdefiniowaną zgodnie z przepisem (I–III) redukuje się do propozycji Sutherlanda [166].

## C.3 Powiązane całki

### C.3.1 Przypadek różnicy całek

Ponieważ formuły dla całek 437.00 i 438.00 z tablic [24] są wyprowadzane ze wspólnego ansatzu (porównaj równania (3) z pracy [103]), mamy możliwość natychmiastowego uzupełnienia drugiej z nich. W przyjętej przez nas notacji formuła dla całki 438.00 przyjmuje postać

$$\begin{aligned}(e_1+ie_2)\,\mathit{\Pi}(z|m,\,o_1+io_2) - (e_1-ie_2)\,\mathit{\Pi}(z|m,\,o_1-io_2) &= \frac{2i}{\sigma_1\tau_2-\sigma_2\tau_1}\\ \times\Big((e_2\tau_2-e_1\sigma_2)\big(F(z|m)+\nu_1\,\mathit{\Pi}(z|m,\,n_1)+\mu_1\frac{1}{\sqrt{\eta_1}}(\arccos x_1+d)\big)\\ -(e_2\tau_1-e_1\sigma_1)\big(F(z|m)+\nu_2\,\mathit{\Pi}(z|m,\,n_2)+\mu_2\frac{1}{\sqrt{\eta_2}}\operatorname{artanh} y_2\big)\Big),\end{aligned} \tag{C.14}$$

gdzie dla wielkości $d$ należy zastosować przypadki (I–III).

### C.3.2 Przypadek $\mu_2 = 0$

Całki 439.00 i 440.00 stosują się w szczególnym przypadku, gdy $\mu_2 = 0$, który zachodzi, kiedy $(1-o_1)^2 + o_2^2 = 1-m$. Wówczas $n_2 = 0$ i w rezultacie $\mathit{\Pi}(z|m,\,n_2) = F(z|m)$. Aby skorzystać z formuł (C.2) i (C.14) w tym przypadku,[3] konieczne jest podzielenie ich liczników i mianowników przez $\mu_2$, a następnie dodatkowo wykorzystanie, że zachodzi

$$\frac{1+\nu_2}{\mu_2} = \frac{m}{m-2o_1}, \qquad \frac{\sigma_2}{\mu_2} = \frac{2(m-o_1)}{m-2o_1}, \qquad \frac{\tau_2}{\mu_2} = \frac{2o_2}{m-2o_1}, \tag{C.15}$$

pod warunkiem, że $(1-o_1)^2 + o_2^2 = 1-m$.

### C.3.3 Przypadek $z = \frac{\pi}{2}$

W ogólnych wytycznych dotyczących użycia wielkości $c$ i $d$ w formułach (C.2) i (C.14) uwzględniliśmy również przypadek całek zupełnych ($z = \frac{\pi}{2}$), to znaczy całek 416.00–419.00. Nie jest więc konieczne, byśmy te rozszerzone formuły wypisywali tutaj jawnie.

[3] Podążamy za sugestią Langa i Stevensa [103], dotyczącą wyboru definicji wielkości pomocniczych (C.4) upraszczającego uzyskiwane formuły, pomimo tej niedogodności.

### C.3.4 Przypadek $o_2 = 0$

Przypadek $o_2 = 0$ jest szczególnie interesujący, ponieważ, wbrew temu, czego można byłoby oczekiwać, nie trywializuje on rozważanych formuł. Prowadzi on do następującej, nieznanej wcześniej tożsamości (dla przejrzystości wprowadzamy oznaczenie $o_1 \equiv n$)

$$\begin{aligned}
&\Pi(z|m,\, n)\\
&\quad= \frac{m-n}{n^2-2n+m}\,F(z|m) + \frac{(1-m)n(n^2-m)}{(n^2-2n+m)(n^2-2mn+m)}\,\Pi(z|m,\, n_0)\\
&\qquad\qquad - \frac{n(m-n)}{2\sqrt{n(n-1)(m-n)^3}}(\arccos x_0 + d),
\end{aligned} \tag{C.16}$$

gdzie

$$x_0 = \frac{\frac{(n^2-2mn+m+n(n^2-2n+m)\sin^2 z)\sqrt{1-m\sin^2 z}}{\sin z\cos z}}{\sqrt{4n(n-1)(m-n)^3 + \frac{(n^2-2mn+m+n(n^2-2n+m)\sin^2 z)^2(1-m\sin^2 z)}{\sin^2 z\cos^2 z}}}, \tag{C.17}$$

oraz

$$n_0 = \frac{m(n^2-2n+m)^2}{(n^2-2mn+m)^2}. \tag{C.18}$$

Wartości dla wielkości $d$ są brane według listy (I–III), a w przypadkach, w których $\sin z = 0$, lub $\cos z = 0$, wyrażenia $\Pi(z|m,\, n_0)$ oraz $\arccos x_0$ należy traktować analogicznie, jak potraktowane zostały $\Pi(z|m,\, n_1)$ oraz $\arccos x_1$. Relacja ta przekształca charakterystykę całki eliptycznej trzeciego rodzaju, pozostawiając jej moduł i argument niezmienionymi. Widoczne jest, że wielkość $n_0$ jest wymierną funkcją $n$. Odwzorowuje ona poszczególne przedziały $n$ jak następuje: $(-\infty,\, 0)$ na $(m,\, 1)$, $(m,\, 1)$ na siebie, $(1,\, \infty)$ na $(0,\, m)$, $(0,\, m)$ na siebie. Tym samym redukuje ona całą dziedzinę charakterystyki do standardowego przedziału $n_0 \in [0,\, 1]$. Ta cecha jest unikalna pośród pozostałych przykładów transformacji tego typu, którymi są formuły 19.7.8–10 wymienione w bazie [25]. Ostatnio były one szeroko wykorzystywane przez Fukushimę [57, 58] w jego nowatorskich technikach obliczeń numerycznych wartości całki eliptycznej trzeciego rodzaju. Transformacja (C.16), podobnie jak inne tego rodzaju przekształcenia całek eliptycznych [130], zawiera również pewne nowe wskazówki odnośnie odpowiedniego przedłużenia analitycznego dla całki eliptycznej trzeciego rodzaju. Ciekawym, ale odrębnym zagadnieniem jest odpowiedź na pytanie, jak transformacja ta wyraża się w języku symetrycznych całek eliptycznych Carlsona [25].

Relacja (C.16) unifikuje ponadto pewne znane, jawne formuły dla całki eliptycznej trzeciego rodzaju dla szczególnych wartości charakterystyki. Po pierwsze, gdy $n^2 - m = 0$, ujawnia ona w rozszerzonej formie formułę 17.7.22 z książki [3].

Po drugie, gdy $n^2 - 2n + m = 0$, mamy $n_0 = 0$, a stąd $\Pi(z|m, n_0) = F(z|m)$. Wtedy efektywny współczynnik przy $F(z|m)$ przybiera wartość $m(1-n)(n^2 - 2mn + m)^{-1}$, co doprowadza nas do formuły 17.7.23 z [3], zapisanej jednakże w zwartej formie.

Na zakończenie dodajmy, że część obliczeń oraz numeryczna weryfikacja przedstawionych tu wyników została przeprowadzona z wykorzystaniem systemów algebry komputerowej Mathematica i Maple.

# Dodatek D

# Narzędzia do obsługi przekształceń równań różniczkowych

W tym dodatku przedstawimy narzędzia służące do manipulacji równaniami różniczkowymi, zarówno zwyczajnymi jak i cząstkowymi, które zostały przez nas zaprojektowane i zaimplementowane w środowisku Mathematica. Pierwotnie powstały one na potrzeby tejże rozprawy, by usprawnić proces przekształcania i poszukiwania analitycznych rozwiązań równania ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych. W swojej ostatecznej formie posiadają one jednak znacznie szerszy zakres stosowalności, który obejmuje dowolne równania różniczkowe. Narzędzia te posłużyły między innymi do wyprowadzenia formuł dla wykładników charakterystycznych Thomégo w nieregularnych punktach osobliwych niskich rzędów, które zostały zebrane w dodatku (B) rozprawy.

Narzędzia te dzielimy umownie na dwie grupy: narzędzia pomocnicze i narzędzia główne. Zasadniczo zadaniem narzędzi pomocniczych jest wprowadzanie, bądź reprezentowanie pewnych nowych obiektów o zadanych, pożądanych własnościach transformacyjnych. Natomiast zadaniem narzędzi głównych jest usystematyzowane przeprowadzanie owych transformacji, ukierunkowane na określony cel. Ta wzajemna współpraca pomiędzy oboma rodzajami narzędzi sprawia, że są one ze sobą ściśle powiązane. Najlepszym tutaj przykładem takiego związku jest para narzędzi `SUM` i `SDA`.

# D.1 Narzędzia pomocnicze

## D.1.1 Narzędzie `CDS`

Kod narzędzia `CDS` jest następujący:

```
CDS[equ_, fun_, opt___] :=
  MapAll[Collect[#, Flatten[Map[{Derivative[___][#][___]^___,
  Derivative[___][#][___], #[___]^___, #[___], #^___, #}&,
  fun]], opt]&, equ]
```

Narzędzie to zbiera razem występujące w wyrażeniu `equ` składniki zawierające te same potęgi zmiennych podanych w liście `fun` i ich pochodnych, ewentualnie aplikując przy tym dodatkowo funkcję `opt` do współczynnika każdego uzyskanego w ten sposób nowego składnika.

Narzędzie `CDS` jest nieskomplikowaną procedurą zbudowaną na bazie komendy `Collect`. Ma ono za zadanie przede wszystkim ułatwiać grupowanie składników w równaniach różniczkowych według pochodnych funkcji.

## D.1.2 Narzędzie `INT`

Kod dla narzędzia `INT` jest następujący:

```
Format[INT[fun_][ini_, fin_]] :=
  Row[{Underoverscript["∫d#", ini, fin], " ", fun}]


INT[fun_?(And@@NumericQ/@DeleteDuplicates[Level[#, {-1}]]&)]
[ini_?(NumericQ[#]||Head[#] === DirectedInfinity&),
fin_?(NumericQ[#]||Head[#] === DirectedInfinity&)] :=
  NIntegrate[fun[$], {$, ini, fin}]


Derivative[0, ord_][INT[fun_]][_, var_] :=
  Derivative[ord - 1][fun][var]


Derivative[ord_, 0][INT[fun_]][var_, _] :=
  -Derivative[ord - 1][fun][var]
```

Operator ten reprezentuje całkę oznaczoną z funkcji `fun` w granicach od `ini` do `fin`, a w przypadku, gdy granice całkowania są numeryczne, wylicza numerycznie wartość całki.

Operator INT powstał specjalnie, by umożliwić efektywne poszukiwania rozwiązań równań różniczkowych za pomocą ansatzu Hermite'a–Darboux, ale może on być używany również w innych sytuacjach, na przykład przy sprawdzaniu rozwiązań uzyskanych metodą obniżania rzędu równania różniczkowego. Jego zbudowanie było konieczne, ponieważ środowisko Mathematica nie oferuje niecałkującego operatora reprezentującego całkę. Jak widać, przy odpowiednio dobranej koncepcji, jego definicja nie nastręcza większych trudności. Poczynimy tutaj pewną ogólną dygresję, by stwierdzić, że główną ideą, która powinna zawsze leżeć u podstaw tego typu przedsięwzięć, niezależnie od ich rozmachu, jest maksymalne wykorzystanie możliwości, które stwarzają wykonywane automatycznie, wewnętrzne procedury danego środowiska. W sposób szczególny dotyczy to języków programowania wysokiego poziomu, jakim między innymi jest Mathematica, które dla wcielenia tej idei w życie wymagają od użytkownika głębokiego poznania mechanizmów ich działania. Dla przykładu, w przypadku rozważanego tutaj operatora INT zauważamy to, że Mathematica posiada wbudowaną procedurę obliczającą pochodną funkcji złożonej i tak wprowadzamy ten operator, by możliwe było automatyczne korzystanie z tego faktu. Wówczas do poprawnego z punktu widzenia reguł różniczkowania określenia operatora INT wystarcza tylko dodefiniowanie zachowania jego pochodnej.

### D.1.3 Narzędzie SUM

Kod dla narzędzia SUM jest następujący:

```
Format[SUM[fun_, ind_, ini_]] :=
  Row[{Underoverscript["∑", Row[{ind, " = ", ini}], "∞"], fun}]


SUM[0, ___] :=
  0


Derivative[___][SUM][_, ite___] :=
  SUM[1, ite]


coe_ SUM[fun_, ind_, ini_]^ :=
  SUM[coe fun, ind, ini]/; !FreeQ[coe, ind]
```

Operator ten reprezentuje nieskończony szereg o wyrazie ogólnym fun, indeksowanym wskaźnikiem ind, którego początkowa wartość wynosi ini.

Operator `SUM` został stworzony na potrzeby poszukiwań rozwiązań równań różniczkowych w postaci szeregów Frobeniusa lub szeregów Thomégo. Środowisko Mathematica nie posiada wbudowanego operatora, który reprezentowałby szereg bez wyliczania jego sumy. Tutaj zdecydowano się na jego wprowadzenie na podobnej zasadzie jak wcześniej zaprezentowany operator `INT` poprzez określenie zachowania jego pochodnej. Przy takim wyborze jednak podczas wykonywania pochodnej funkcji złożonej pochodna wyrażenia `fun` jest wyrzucana poza operator `SUM`. Aby różniczkowanie tego operatora przebiegało zgodnie z przysługującymi mu regułami, konieczne było zdefiniowanie operacji wciągania współczynników zawierających iterator pod operator `SUM`, co zostało osiągnięte dzięki zastosowaniu komendy `UpSetDelayed` (w skrócie ^ :=).

## D.2 Narzędzia główne

### D.2.1 Narzędzie `STF`

Kod narzędzia `STF` jest następujący:

```
STF[equ_, otn_, nto_, cof_] :=
  FixedPoint[#/.Flatten[Map[{Derivative[ord___/; And@@
  NonNegative[{ord} − Replace[List@@Head[Head[#[[1]]]],
  Symbol → 0]]][Identity@@Head[#[[1]]]][var___] :> Dt[#[[2]],
  Sequence@@Thread[{{var}, {ord} − Replace[List@@Head[
  Head[#[[1]]]], Symbol → 0]}], Constants → Select[
  DeleteDuplicates[Level[{cof, nto, Cases[{cof, nto},
  INT[fun_][____] :> fun, {0, ∞}]}, {−1}]], !(NumericQ[#]||MemberQ[
  Map[#[[1]]&, nto], #])&]], #[[1]] :> #[[2]]}&, cof]]//.Map[Dt[#[[1]],
  voc___] :> Dt[#[[2]], voc]&, nto]&, equ]//.Map[#[[1]] :> #[[2]]&, otn]
```

Narzędzie to przeprowadza zamianę zmiennych w wyrażeniu `equ` zadaną listą reguł transformacyjnych `otn` i listą odwrotnych reguł transformacyjnych `nto` dla zmiennych niezależnych oraz listą reguł transformacyjnych `cof` dla zmiennych zależnych.

W literaturze można spotkać kilka podejść do problemu zamiany zmiennych w równaniach różniczkowych. Wśród nich należy wspomnieć między innymi `vChange`, prostą i zwięzłą procedurę autorstwa Zimmermana i Olnessa [190], która pozwala dokonywać zamian tylko pojedynczej zmiennej niezależnej. Ma ona charakter jedynie poglądowy. Innym wartym wymienienia narzędziem jest

`DerivativeVariablesTransformation` napisane przez Trotta [171], które jest już o wiele bardziej złożone. Dzięki stosowaniu podczas obliczeń odwrotnej macierzy transformacji Jacobiego narzędzie to pozwala dokonywać równoczesnej zamiany wielu zmiennych niezależnych w równaniach różniczkowych cząstkowych, nie wymagając przy tym jawnego podawania transformacji odwrotnej. Niestety, co podkreśla sam autor, procedura ta nie jest dobrze zoptymalizowana dla większej liczby zmiennych, a ponadto nie obsługuje ona żadnych zamian zmiennych zależnych. Najbardziej zaawansowanym i wszechstronnym narzędziem służącym do zamian zmiennych w równaniach różniczkowych jest procedura `ReplaceVariables` zawarta w napisanym przez Rubinsteina pakiecie [149]. Należy podkreślić, że jest ona pierwszym narzędziem oferującym obsługę zamian zmiennych zależnych, choć obsługa ta jest niepełna w tym zakresie, że nie pozwala przeprowadzać podstawień pod dowolnie wybierane pochodne funkcji. W przypadku zamian zmiennych niezależnych autor zdecydował się zawęzić ich liczbę do czterech. Jest to sztuczny zabieg, ale tego typu praktyczne ograniczenia dotyczą wszystkich narzędzi korzystających z odwrotnej macierzy Jacobiego, a wynikają one nie tylko z czasochłonności procesu wyliczania macierzy odwrotnej, ale również z potrzeby późniejszego upraszczania uzyskanego w ten sposób wyniku. Pomimo tych niedociągnięć procedura ta potrafi wykonać większość interesujących zamian zmiennych.

Procedura `STF` powstała, by poza głównym zadaniem, jakim było skonstruowanie szybkiego i skutecznego narzędzia zamieniającego zmienne w równaniach różniczkowych, zrealizować dwa dodatkowe cele. Po pierwsze, by umożliwić użytkownikowi zadawanie zamiany zmiennych niezależnych poprzez transformację odwrotną, co w niektórych praktycznych zastosowaniach może być z powodów czysto technicznych wygodniejsze w użyciu. Musimy tutaj bowiem zauważyć, że dla zadanej transformacji przy wybieraniu transformacji odwrotnej użytkownik posiada pewną swobodę, gdyż w ogólności dana transformacja nie wyznacza jednoznacznie transformacji odwrotnej.[1] Drugim zadaniem było wprowadzenie obsługi podstawień za pochodne zmiennych zależnych, której brakuje w istniejących narzędziach. Ogólne założenie konstrukcyjne procedury `STF` zostało zapożyczone od narzędzia Zimmermana i Olnessa [190] i jej struktura różni się znacznie od rozwiązań przyjętych u Rubinsteina [149]. Została ona wykonana na bazie komendy `Dt` wyliczającej pochodną zupełną danego obiektu, dzięki czemu odznacza się przejrzystością i zwartością formy. W toku swego działania

[1] By nie pozostawić wątpliwości, zaznaczamy, że choć transformacja odwrotna może nie być wyznaczona jednoznacznie, to jednak jej jawna znajomość nie jest potrzebna do pomyślnego przeprowadzenia zamiany zmiennych. Wszystkie niezbędne ku temu informacje niesie ze sobą macierz Jacobiego transformacji, a za nią odwrotna macierz Jacobiego.

buduje ona odpowiednie tablice reguł transformacyjnych, dokonując następnie podstawień za zmienne zależne i ich pochodne, następnie za pochodne nowych zmiennych niezależnych i wreszcie za stare zmienne niezależne. Automatycznie rozpoznaje ona, które z nowo wprowadzanych obiektów są zmiennymi, a które stałymi. Poprzez wykorzystanie komendy `FixedPoint` pracuje ona w reżimie samoiterującym, to znaczy powtarzalnie aplikuje zadane przekształcenia dopóty, dopóki nie zmieniają już one formy wyrażenia. Choć procedura `STF` prezentuje się dość niepozornie, jest bardzo elastyczna, a jej możliwości są równie szerokie jak pakietu Rubinsteina [149].

Poniżej prezentujemy cztery poglądowe przykłady zastosowania procedury `STF`.

**Przykład 1**

Ogólne działanie procedury `STF` ilustrujemy klasycznym przykładem laplasjanu w dwóch wymiarach, dokonując w nim przejścia ze współrzędnych kartezjańskich do współrzędnych biegunowych. Uwidocznione jest tutaj również zastosowanie narzędzia `CDS`.

$$\mathtt{In}[\_] := \mathtt{CDS}[\mathtt{STF}[\mathtt{f}^{(2,0)}[\mathtt{x},\mathtt{y}] + \mathtt{f}^{(0,2)}[\mathtt{x},\mathtt{y}], \{\mathtt{x} \to \varrho\,\mathtt{Cos}[\varphi], \mathtt{y} \to \varrho\,\mathtt{Sin}[\varphi]\},$$
$$\{\varrho \to \sqrt{\mathtt{x}^2+\mathtt{y}^2}, \varphi \to \mathtt{ArcTan}[\mathtt{y}/\mathtt{x}]\}, \{\mathtt{f}[\mathtt{x},\mathtt{y}] \to \mathtt{g}[\varrho,\varphi]\}], \{\mathtt{g},\varrho,\varphi\},$$
$$\mathtt{Simplify}[\#, \varrho \geqslant 0]\&]$$

$$\mathtt{Out}[\_] = \frac{\mathtt{g}^{(0,2)}[\varrho,\varphi]}{\varrho^2} + \frac{\mathtt{g}^{(1,0)}[\varrho,\varphi]}{\varrho} + \mathtt{g}^{(2,0)}[\varrho,\varphi]$$

**Przykład 2**

Poniższy prosty przykład prezentuje zastosowanie procedury `STF` do wykonywania podstawień za pochodne zmiennych zależnych.

$$\mathtt{In}[\_] := \mathtt{CDS}[\mathtt{STF}[\mathtt{f}'[\mathtt{x}] + \mathtt{f}''[\mathtt{x}] + \mathtt{f}^{(3)}[\mathtt{x}], \{\}, \{\}, \{\mathtt{f}''[\mathtt{x}] \to \mathtt{a}\,\mathtt{x}\,\mathtt{f}'[\mathtt{x}]\}], \{\mathtt{f},\mathtt{x}\},$$
$$\mathtt{Simplify}]$$

$$\mathtt{Out}[\_] = (1 + \mathtt{a} + \mathtt{a}\,\mathtt{x} + \mathtt{a}^2\mathtt{x}^2)\mathtt{f}'[\mathtt{x}]$$

**Przykład 3**

Kolejny przykład jest jednym z testowych przykładów pakietu Rubinsteina [149]. Demonstruje on redukcję nieliniowego równania różniczkowego do równania kwaziliniowego[2] poprzez zastosowanie odpowiedniej zamiany zmiennych. Przykład ten ukazuje iteracyjne działanie procedury STF.

$$\begin{aligned}&\texttt{In[\_]} := \texttt{CDS}[-\eta'[\xi]^3\texttt{STF}[\texttt{y}'[\texttt{x}] + 3\texttt{a}\,\texttt{y}[\texttt{x}]^3 + 6\texttt{a}\,\texttt{x}\,\texttt{y}[\texttt{x}]^2, \{\texttt{x} \to \eta[\xi]\},\\ &\quad \{\xi \to \texttt{InverseFunction}[\eta][\texttt{x}]\}, \{\texttt{y}[\texttt{x}] \to \texttt{u}'[\texttt{x}], \texttt{u}[\texttt{x}] \to \xi\}], \{\eta, \xi\},\\ &\quad \texttt{Simplify}]\end{aligned}$$

$$\texttt{Out[\_]} = -3\texttt{a} - 6\texttt{a}\,\eta[\xi]\eta'[\xi] + \eta''[\xi]$$

**Przykład 4**

Ostatni przykład poświęcamy zamianie zmiennych w równaniu ewolucji pierwotnych fal grawitacyjnych (2.61). Dokonujemy w nim przejścia ze zmienną niezależną z czasu konforemnego na znormalizowany czynnik skali, wprowadzając przy tym do równania znormalizowany parametr Hubble'a. Przekształcenie to wymaga posłużenia się całką, stąd do tego celu został wykorzystany operator INT. Ostatecznie rozważane równanie uzyskujemy w formie (3.4).

$$\begin{aligned}&\texttt{In[\_]} := \texttt{CDS}[\frac{4\texttt{c}^2}{\texttt{a0}^2\texttt{H0}^2}\texttt{STF}[\mu\eta''[\eta] - \left(\frac{\texttt{a}\eta''[\eta]}{\texttt{a}\eta[\eta]} + \texttt{Q} - 2\texttt{K}\right)\mu\eta[\eta],\\ &\quad \{\texttt{Q} \to -\frac{\texttt{a0}^2\texttt{H0}^2\alpha}{4\texttt{c}^2} + 2\texttt{K}, \texttt{INT}[\sqrt{\texttt{h2}\eta[\#]}\&][\_, \eta] \to -\frac{\texttt{c}}{\texttt{a0}\,\texttt{H0}}\frac{1}{\texttt{x}}\},\\ &\quad \{\texttt{x} \to -\frac{\texttt{c}}{\texttt{a0}\,\texttt{H0}}\frac{1}{\texttt{INT}[\sqrt{\texttt{h2}\eta[\#]}\&][\_, \eta]}\}, \{\mu\eta[\eta] \to \mu\texttt{x}[\texttt{x}],\\ &\quad \texttt{h2}\eta[\eta] \to \texttt{h2x}[\texttt{x}], \texttt{a}\eta[\eta] \to \texttt{x}\}], \{\mu\texttt{x}, \texttt{h2x}, \texttt{x}\}, \texttt{FullSimplify}//@\#\&]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\texttt{Out[\_]} = \mu\texttt{x}[\texttt{x}](\alpha - 8\texttt{x}^2\texttt{h2x}[\texttt{x}] - 2\texttt{x}^3\texttt{h2x}'[\texttt{x}])\\ &\quad +(8\texttt{x}^3\texttt{h2x}[\texttt{x}] + 2\texttt{x}^4\texttt{h2x}'[\texttt{x}])\mu\texttt{x}'[\texttt{x}] + 4\texttt{x}^4\texttt{h2x}[\texttt{x}]\mu\texttt{x}''[\texttt{x}]\end{aligned}$$

[2]Wbrew temu, co twierdzi Rubinstein, wynikowe równanie nie jest liniowe.

### D.2.2 Narzędzie SDA

Kod narzędzia `SDA` jest następujący:

```
SDA[equ_, var_, con___] :=
  Module[{exp, val, aea, aeb}, aea = ExpandAll[equ/.SUM[fun_, ite___]
  :> SUM[ExpandAll[fun], ite]//.SUM[fua_ + fub_, ite___] :> SUM[fua,
  ite] + SUM[fub, ite]]//.coe_ SUM[fun_, ite___] :> SUM[coe fun, ite];
  exp = First[Sort[Cases[aea, var^pow_ :> pow, {0, ∞}], Refine[#1
  < #2, Variables[{#1, #2}] ∈ Reals&&con]&]]; aeb = aea/.SUM[
  fun_, ind_, ini_] :> SUM[fun/.ind → (exp − Coefficient[
  Exponent[fun, var], ind, 0])/Coefficient[Exponent[fun, var], ind],
  ind, ((Exponent[fun, var]/.ind → ini) − Coefficient[exp, ind, 0])
  /Coefficient[exp, ind]]/; Coefficient[Exponent[fun, var], ind]
  /Coefficient[exp, ind] == 1; val = Last[Sort[Cases[aeb, SUM[_, _,
  ini_] :> ini, {0, ∞}], Refine[#1 < #2, Variables[{#1, #2}] ∈
  Reals&&con]&]]; aeb/.SUM[fun_, ind_, ini_/; Refine[val − 1 − ini
  ∈ Integers, con]] :> Sum[fun, {ind, ini, val − 1}] + SUM[fun, ind, val]
  //.coe_ SUM[fun_, ite___] :> SUM[coe fun, ite]//.SUM[fua_, ite___]
  +SUM[fub_, ite___] :> SUM[fua + fub, ite]]
```

Narzędzie to porządkuje występujące w wyrażeniu `equ` składniki zawierające symboliczne nieskończone szeregi reprezentowane operatorem `SUM` względem zmiennej `var`, wykorzystując przy tym ewentualne dodatkowe warunki `con`.

W opracowaniach poświęconych manipulacjom na wyrażeniach zawierających symboliczne szeregi funkcjonuje zasadniczo jedno narzędzie, mianowicie napisany przez Peltio pakiet `Summa` [139]. Oryginalnie został on zaprojektowany jako wsparcie przy poszukiwaniu rozwiązań jednorodnych, liniowych równań różniczkowych zwyczajnych metodą szeregów lub metodą Frobeniusa. Pakiet ten oferuje obszerny katalog poleceń wykonujących na szeregach symbolicznych takie zadania jak ich rozwijanie, zwijanie, bądź wyłączanie spod nich pewnej liczby wyrazów, uzgadnianie wykładników potęg zadanej zmiennej oraz przesuwanie i wyrównywanie wskaźników sumacyjnych. Ponadto zawiera on definicje operatorów różniczkujących i całkujących szeregi. Sam pakiet został wprawdzie wyposażony w wewnętrzny operator reprezentujący szereg, lecz zgodnie z koncepcją autora pozostał on ściśle związany ze standardową komendą `Sum`. W szczególności nie zostały dla niego zdefiniowane żadne własności transformacyjne, ani reguły różniczkowania. Stąd praktyczne posługiwanie się tym pakietem polega na powtarzalnym wykonywaniu krok po kroku wspomnianych pojedynczych poleceń, co nawet w przypadku prostych równań różniczkowych jest zajęciem żmudnym.

Narzędzie `SDA` zostało stworzone, by całkowicie zautomatyzować przebieg procesu wyznaczania rozwiązań równań różniczkowych w postaci szeregów. Pomyślano je tak, aby po jego zastosowaniu do danego równania różniczkowego możliwe było bezpośrednie odczytywanie poszukiwanych formuł dla wykładników charakterystycznych i relacji rekurencyjnych wiążących poszczególne wyrazy szeregu. Dla jego implementacji kluczowe znaczenie ma opisany wyżej odpowiednio zdefiniowany pomocniczy operator `SUM`, który reprezentuje nieskończony szereg. Narzędzie `SDA` pracuje wyłącznie na obiektach symbolicznych właśnie takiego typu. Po wstawieniu do równania różniczkowego funkcji wyrażonej poprzez operator `SUM`, narzędzie `SDA` służy do uporządkowania uzyskanego równania do sumy pojedynczego szeregu i ewentualnych wyrazów swobodnych. Jest ono skonstruowane na zasadzie modułu. Początkowo poszczególne składniki zadanego wyrażenia, w tym szeregi sum, są rozwijane i dzielone na pojedyncze szeregi, przy czym ich współczynniki są włączane pod szereg. Następnie dla tych nowo utworzonych szeregów znajdowany jest najniższy wykładnik potęgi wybranej zmiennej niezależnej i do niego obniżane są wykładniki w pozostałych szeregach. Wreszcie wyszukiwany jest najwyższy wskaźnik inicjujący i znów do niego podwyższane są wskaźniki w pozostałych szeregach, co odbywa się poprzez wyłączanie spod nich wyrazów swobodnych. Szeregi w tak przekształconym wyrażeniu posiadają już uzgodnione wykładniki potęg i wskaźniki inicjujące i są łączone w jeden szereg. Podkreślamy, że procedura ta jest realizowana uniwersalnie i sprawdza się zarówno dla zwykłych szeregów Frobeniusa, jak i dla szeregów logarytmicznych oraz normalnych i subnormalnych szeregów Thomégo. Na koniec zauważymy, że narzędzie to dopuszcza również możliwość narzucenia dodatkowych warunków na wprowadzane do rozpatrywanego wyrażenia nienumeryczne stałe.

Poniżej przedstawiamy cztery przykłady łączonego wykorzystania narzędzi `SUM` i `SDA`.

### Przykład 1

W tym przykładzie rozważane jest ogólne pojedynczo konfluentne równanie różniczkowe Gaussa, które w otoczeniu regularnego punktu osobliwego $z = 0$ posiada dwa zwykłe rozwiązania Frobeniusa.

$$\texttt{In[\_]} := \texttt{CDS[SDA[STF[z\,w''[z]} + (\texttt{c} + \texttt{s\,z})\texttt{w'[z]} - \left(1 - \texttt{s}\frac{\texttt{c}}{2}\right)\texttt{w[z]}, \{\}, \{\}, \{\texttt{w[z]} \to \texttt{z}^{\texttt{s}}\texttt{SUM[a[n]z}^{\texttt{n}}, \texttt{n}, 0]\}], \texttt{z}], \{\texttt{z}, \texttt{a}\}, \texttt{Simplify}]$$

$$\texttt{Out[\_]} = \texttt{s}(-1 + \texttt{c} + \texttt{s})\texttt{z}^{-1+\texttt{s}}\texttt{a[0]} + \sum_{\texttt{n}=1}^{\infty} \texttt{z}^{-1+\texttt{n}+\texttt{s}}\left(\left(-1 + \left(-1 + \frac{\texttt{c}}{2} + \texttt{n}\right)\texttt{s} + \texttt{s}^2\right)\texttt{a}[-1+\texttt{n}] + (\texttt{n}+\texttt{s})(-1+\texttt{c}+\texttt{n}+\texttt{s})\texttt{a[n]}\right)$$

**Przykład 2**

W poniższym przykładzie rozważany jest szczególny przypadek zredukowanego, pojedynczo konfluentnego równania różniczkowego Gaussa, którego jednym z rozwiązań w otoczeniu regularnego punktu osobliwego $z = 0$ jest logarytmiczne rozwiązanie Frobeniusa.

$$\texttt{In[\_]} := \texttt{CDS[SDA[STF[z\,w''[z]} - \texttt{w'[z]} - \texttt{w[z]}, \{\}, \{\}, \{\texttt{w[z]} \to \texttt{Cz}^2\texttt{Log[z]}\ \texttt{SUM[a[n]z}^{\texttt{n}}, \texttt{n}, 0] + \texttt{SUM[b[n]z}^{\texttt{n}}, \texttt{n}, 0]\}], \texttt{z}], \{\texttt{z}, \texttt{Log}, \texttt{C}, \texttt{a}, \texttt{b}\}, \texttt{Simplify}]$$

$$\texttt{Out[\_]} = -\texttt{b[0]} + \texttt{z}(2\texttt{C\,a[0]} - \texttt{b[1]}) - \texttt{b[1]} + \sum_{\texttt{n}=3}^{\infty} \texttt{z}^{-1+\texttt{n}}(2\texttt{C}(-1+\texttt{n})\ \texttt{a}[-2+\texttt{n}] - \texttt{b}[-1+\texttt{n}] + (-2+\texttt{n})\texttt{n\,b[n]} + \texttt{C}(-\texttt{a}[-3+\texttt{n}] + (-2+\texttt{n})\texttt{n}\ \texttt{a}[-2+\texttt{n}])\texttt{Log[z]})$$

**Przykład 3**

W kolejnym przykładzie rozważane jest ogólne podwójnie konfluentne równanie różniczkowe Heunego, które w pobliżu nierozgałęzionego nieregularnego punktu osobliwego $z = 0$ rzędu 2 posiada dwa normalne rozwiązania Thomégo.

$$\texttt{In[\_]} := \texttt{CDS[SDA[Exp[}\sum_{\texttt{m}=1}^{2-1}\frac{\texttt{s[m]}}{\texttt{m\,z}^{\texttt{m}}}\texttt{]STF[z}^2\texttt{w''[z]} - (\texttt{z}^2 - \texttt{c\,z} - \texttt{t})\texttt{w'[z]} - (\texttt{a\,z} - \lambda)\ \texttt{w[z]}, \{\}, \{\}, \{\texttt{w[z]} \to \texttt{z}^{\texttt{s[0]}}\texttt{Exp[}-\sum_{\texttt{m}=1}^{2-1}\frac{\texttt{s[m]}}{\texttt{m\,z}^{\texttt{m}}}\texttt{]SUM[a[n]z}^{\texttt{n}}, \texttt{n}, 0]\}], \texttt{z}], \{\texttt{z}, \texttt{a}\}, \texttt{Simplify}]$$

$$\mathtt{Out[\_]} = \mathtt{z}^{-2+\mathtt{s[0]}}\mathtt{a[0]s[1](t+s[1])} + \mathtt{z}^{-1+\mathtt{s[0]}}(\mathtt{a[1]s[1](t+s[1])} + \mathtt{a[0](t\ s[0]} + (-2+\mathtt{c}+2\mathtt{s[0])s[1]})) + \mathtt{z}^{\mathtt{s[0]}}(\mathtt{a[0]}(\lambda + (-1+\mathtt{c})\mathtt{s[0]} + \mathtt{s[0]}^2 - \mathtt{s[1]}) + \mathtt{a[2]s[1](t+s[1])} + \mathtt{a[1](t(1+s[0])} + (\mathtt{c}+2\mathtt{s[0]})\mathtt{s[1]})) + \sum_{\mathtt{n}=3}^{\infty} \mathtt{z}^{-2+\mathtt{n}+\mathtt{s[0]}}(-\mathtt{a}[-3+\mathtt{n}](-3+\mathtt{a}+\mathtt{n}+\mathtt{s[0]}) + \mathtt{a}[-2+\mathtt{n}](6+\mathtt{n}^2+\lambda-5\,\mathtt{s[0]}+\mathtt{s[0]}^2+\mathtt{c}(-2+\mathtt{n}+\mathtt{s[0]})+\mathtt{n}(-5+2\mathtt{s[0]})-\mathtt{s[1]}) + \mathtt{a[n]s[1](t+s[1])} + \mathtt{a}[-1+\mathtt{n}](\mathtt{t}(-1+\mathtt{n}+\mathtt{s[0]}) + (\mathtt{c}+2(-2+\mathtt{n}+\mathtt{s[0]}))\mathtt{s[1]}))$$

**Przykład 4**

W ostatnim przykładzie rozważane jest ogólne podwójnie zredukowane, podwójnie konfluentne równanie różniczkowe Heunego, które w pobliżu rozgałęzionego nieregularnego punktu osobliwego $z = 0$ rzędu $\frac{3}{2}$ posiada dwa subnormalne rozwiązania Thomégo.

$$\mathtt{In[\_]} := \mathtt{CDS[SDA[Exp[}\sum_{\mathtt{m}=1}^{2(\frac{3}{2}-1)} \frac{2\mathtt{s}[\frac{\mathtt{m}}{2}]}{\mathtt{m}\,\mathtt{z}^{\frac{\mathtt{m}}{2}}}\mathtt{]STF[z^3w''[z]} - (\mathtt{z}^2 - \lambda\,\mathtt{z} + \mathtt{t})\mathtt{w[z]}, \{\}, \{\}, \{\mathtt{w[z]} \to \mathtt{z}^{\mathtt{s[0]}}\mathtt{Exp[}-\sum_{\mathtt{m}=1}^{2(\frac{3}{2}-1)} \frac{2\mathtt{s}[\frac{\mathtt{m}}{2}]}{\mathtt{m}\,\mathtt{z}^{\frac{\mathtt{m}}{2}}}\mathtt{]SUM[a[n]z}^{\frac{\mathtt{n}}{2}}, \mathtt{n}, 0]\}], \mathtt{z}], \{\mathtt{z}, \mathtt{a}\}, \mathtt{Simplify}]$$

$$\mathtt{Out[\_]} = \mathtt{z}^{\mathtt{s[0]}}\mathtt{a[0]}\Big(-\mathtt{t} + \mathtt{s}[\tfrac{1}{2}]^2\Big) + \mathtt{z}^{\frac{1}{2}+\mathtt{s[0]}}\Big(\frac{1}{2}\mathtt{a[0]}(-3+4\mathtt{s[0]})\mathtt{s}[\tfrac{1}{2}] + \mathtt{a[1]}\Big(-\mathtt{t}+\mathtt{s}[\tfrac{1}{2}]^2\Big)\Big) + \mathtt{z}^{1+\mathtt{s[0]}}\Big(\mathtt{a[0]}(\lambda + (-1+\mathtt{s[0]})\mathtt{s[0]}) + \frac{1}{2}\mathtt{a[1]}(-1+4\mathtt{s[0]})\mathtt{s}[\tfrac{1}{2}] + \mathtt{a[2]}\Big(-\mathtt{t}+\mathtt{s}[\tfrac{1}{2}]^2\Big)\Big) + \mathtt{z}^{\frac{3}{2}+\mathtt{s[0]}}\Big(\mathtt{a[1]}\Big(-\frac{1}{4}+\lambda+\mathtt{s[0]}^2\Big) + \frac{1}{2}\mathtt{a[2]}(1+4\mathtt{s[0]})\mathtt{s}[\tfrac{1}{2}] + \mathtt{a[3]}\Big(-\mathtt{t}+\mathtt{s}[\tfrac{1}{2}]^2\Big)\Big) + \sum_{\mathtt{n}=4}^{\infty}\mathtt{z}^{\frac{\mathtt{n}}{2}+\mathtt{s[0]}}\Big(-\mathtt{a}[-4+\mathtt{n}] + \mathtt{a}[-2+\mathtt{n}]\Big(2+\frac{\mathtt{n}^2}{4}+\lambda+\mathtt{n}\Big(-\frac{3}{2}+\mathtt{s[0]}\Big) - 3\mathtt{s[0]} + \mathtt{s[0]}^2\Big) + \frac{1}{2}\mathtt{a}[-1+\mathtt{n}](-5+2\mathtt{n}+4\mathtt{s[0]})\mathtt{s}[\tfrac{1}{2}] + \mathtt{a[n]}\Big(-\mathtt{t}+\mathtt{s}[\tfrac{1}{2}]^2\Big)\Big)$$

Tym przykładem kończymy dodatek poświęcony specjalnie stworzonym narzędziom służącym przekształcaniu równań różniczkowych w środowisku Mathematica.

# Bibliografia


[1] L. F. Abbott and D. D. Harari, *Graviton production in inflationary cosmology*, Nucl. Phys. B **264** (1986), 487.

[2] L. F. Abbott and M. B. Wise, *Constraints on generalized inflationary cosmologies*, Nucl. Phys. B **244** (1984), 541.

[3] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1972.

[4] I. Agullo, J. Navarro-Salas, and L. Parker, *Enhanced local-type inflationary trispectrum from a non-vacuum initial state*, J. Cosmol. Astropart. P. **05** (2012), 019.

[5] B. Allen, *Stochastic gravity-wave background in inflationary-universe models*, Phys. Rev. D **37** (1988), 2078.

[6] B. Allen, R. R. Caldwell, and S. Koranda, *CBR temperature fluctuations induced by gravitational waves in a spatially closed inflationary universe*, Phys. Rev. D **51** (1995), 1553.

[7] B. Allen and S. Koranda, *CBR anisotropy from primordial gravitational waves in inflationary cosmologies*, Phys. Rev. D **50** (1994), 3713.

[8] J. M. Bardeen, *Gauge-invariant cosmological perturbations*, Phys. Rev. D **22** (1980), 1882.

[9] J. D. Barrow, C. G. Tsagas, and K. Yamamoto, *Origin of cosmic magnetic fields: Superadiabatically amplified modes in open Friedmann universes*, Phys. Rev. D **86** (2012), 023533.

[10] E. Bertschinger, *Cosmological Dynamics*, Cosmology ans Large Scale Structure (R. Schaeffer, J. Silk, M. Spiro, and J. Zinn-Justin, eds.), Elsevier Science, Amsterdam, 1996.

[11] J. Bičák and J. B. Griffiths, *Gravitational waves propagating into Friedmann–Robertson–Walker universes*, Ann. Phys. **252** (1996), 180.

[12] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[13] W. B. Bonnor, *The formation of the nebulae*, Z. Astrophys. **39** (1956), 143.

[14] ______, *Jeans' formula for gravitational instability*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **117** (1957), 104.

[15] R. H. Brandenberger, *Lectures on the theory of cosmological perturbations*, Lect. Notes Phys. **646** (2004), 127.

[16] J. D. Brown and K. V. Kuchař, *Dust as a standard of space and time in canonical quantum gravity*, Phys. Rev. D **51** (1995), 5600.

[17] M. Bruni, P. K. S. Dunsby, and G. F. R. Ellis, *Cosmological perturbations and the physical meaning of gauge-invariant variables*, Astrophys. J. **395** (1992), 34.

[18] M. Bruni, G. F. R. Ellis, and P. K. S. Dunsby, *Gauge-invariant perturbations in a scalar field dominated universe*, Classical Quant. Grav. **9** (1992), 921.

[19] M. Bruni, S. Matarrese, S. Mollerach, and S. Sonego, *Perturbations of spacetime: Gauge transformations and gauge invariance at second order and beyond*, Classical Quant. Grav. **14** (1997), 2585.

[20] T. Buchert, *On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: dust cosmologies*, Gen. Relat. Gravit. **32** (2000), 105.

[21] ______, *On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity: perfect fluid cosmologies*, Gen. Relat. Gravit. **33** (2001), 1381.

[22] R. V. Buniy and T. W. Kephart, *Decomposition of geometric perturbations*, Phys. Lett. B **674** (2009), 313.

[23] G. A. Burnett, *The high-frequency limit in general relativity*, J. Math. Phys. **30** (1989), 90.

[24] P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, Springer-Verlag, Berlin, 1954.

[25] B. C. Carlson, *Elliptic integrals*, NIST Digital Library of Mathematical Functions, `http://dlmf.nist.gov/`, release 1.0.9 of 29-08-2014.

[26] A. Challinor, *Microwave background polarization in cosmological models*, Phys. Rev. D **62** (2000), 043004.

[27] A. Challinor and A. Lasenby, *Cosmic microwave background anisotropies in the cold dark matter model: A covariant and gauge-invariant approach*, Astrophys. J. **513** (1999), 1.

[28] S. C. Chang and A. I. Janis, *Radiation in cosmological backgrounds*, J. Math. Phys. **17** (1976), 1432.

[29] C. Clarkson, *Cosmological density fluctuations and gravity waves: A covariant approach to gauge-invariant nonlinear perturbation theory*, Phys. Rev. D **70** (2004), 103524.

[30] H. L. Crowson, *A study of a linear ordinary second order differential equation with five regular singular points*, Ph.D. thesis, University of Florida, Gainesville, 1959.

[31] W. Czaja, *Analityczne modele propagacji zaburzeń w ekspandującym Wszechświecie. Zastosowanie metod algebry komputerowej*, Ph.D. thesis, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 2009.

[32] A. B. Olde Daalhuis, *Confluent hypergeometric functions*, NIST Digital Library of Mathematical Functions, `http://dlmf.nist.gov/`, release 1.0.9 of 29-08-2014.

[33] ———, *Hypergeometric function*, NIST Digital Library of Mathematical Functions, `http://dlmf.nist.gov/`, release 1.0.9 of 29-08-2014.

[34] G. Darboux, *Sur une équation linéaire*, C. R. Math. **94** (1882), 1645.

[35] M. R. de Garcia Maia, *Spectrum and energy density of relic gravitons in flat Robertson–Walker universes*, Phys. Rev. D **48** (1993), 647.

[36] M. R. de Garcia Maia and J. D. Barrow, *Cosmological graviton production in general relativity and related gravity theories*, Phys. Rev. D **50** (1994), 6262.

[37] M. R. de Garcia Maia and J. A. S. Lima, *Graviton production in elliptical and hyperbolic universes*, Phys. Rev. D **54** (1996), 6111.

[38] P. K. S. Dunsby, *Gauge invariant perturbations in multi-component fluid cosmologies*, Classical Quant. Grav. **8** (1991), 1785.

[39] ———, *Covariant perturbations of anisotropic cosmological models*, Phys. Rev. D **48** (1993), 3562.

[40] P. K. S. Dunsby, B. A. C. C. Bassett, and G. F. R. Ellis, *Covariant analysis of gravitational waves in a cosmological context*, Classical Quant. Grav. **14** (1997), 1215.

[41] P. K. S. Dunsby, M. Bruni, and G. F. R. Ellis, *Covariant perturbations in a multifluid cosmological medium*, Astrophys. J. **395** (1992), 54.

[42] R. Durrer and M. Rinaldi, *Graviton production in noninflationary cosmology*, Phys. Rev. D **79** (2009), 063507.

[43] A. Duval and M. Loday-Richaud, *Kovacic's algorithm and its application to some families of special functions*, Appl. Algebr. Eng. Comm. **3** (1992), 211.

[44] J. Ehlers, *Contributions to the relativistic mechanics of continuous media*, Abh. Math. Nat. Kl. Mainz **11** (1961), 792.

[45] J. Ehlers and A. R. Prasanna, *A WKB formalism for multicomponent fields and its application to gravitational and sound waves in perfect fluids*, Classical Quant. Grav. **13** (1996), 2231.

[46] J. Ehlers, A. R. Prasanna, and R. A. Breuer, *Propagation of gravitational waves through pressureless matter*, Classical Quant. Grav. **4** (1987), 253.

[47] G. F. R. Ellis, *Relativistic Cosmology*, General Relativity and Cosmology (R. K. Sachs, ed.), Academic Press, New York, 1971.

[48] ———, *Inhomogeneity effects in cosmology*, Classical Quant. Grav. **28** (2011), 164001.

[49] G. F. R. Ellis and M. Bruni, *Covariant and gauge-invariant approach to cosmological density fluctuations*, Phys. Rev. D **40** (1989), 1804.

[50] G. F. R. Ellis, M. Bruni, and J. Hwang, *Density-gradient–vorticity relation in perfect-fluid Robertson–Walker perturbations*, Phys. Rev. D **42** (1990), 1035.

[51] G. F. R. Ellis, J. Hwang, and M. Bruni, *Covariant and gauge-independent perfect-fluid Robertson–Walker perturbations*, Phys. Rev. D **40** (1989), 1819.

[52] J. C. Fabris and S. V. B. Gonçalves, *Gravitational waves in a string-like fluid cosmology*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **306** (1999), 679.

[53] ———, *Gravitational waves in cosmological models with negative pressure*, Classical Quant. Grav. **16** (1999), 2269.

[54] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1999.

[55] L. H. Ford and L. Parker, *Quantized gravitational wave perturbations in Robertson–Walker universes*, Phys. Rev. D **16** (1977), 1601.

[56] J. A. Frieman and M. S. Turner, *Evolution of density perturbations through cosmological phase transitions*, Phys. Rev. D **30** (1984), 265.

[57] T. Fukushima, *Precise and fast computation of a general incomplete elliptic integral of third kind by half and double argument transformations*, J. Comput. Appl. Math. **236** (2012), 1961.

[58] ———, *Fast computation of a general complete elliptic integral of third kind by half and double argument transformations*, J. Comput. Appl. Math. **253** (2013), 142.

[59] U. H. Gerlach and U. K. Sengupta, *Homogeneous collapsing star: Tensor and vector harmonics for matter and field asymmetries*, Phys. Rev. D **18** (1978), 1773.

[60] ———, *Relativistic equations for aspherical gravitational collapse*, Phys. Rev. D **18** (1978), 1789.

[61] R. Geroch and L. Lindblom, *Is perturbation theory misleading in general relativity?*, J. Math. Phys. **26** (1985), 2581.

[62] K. Giesel, S. Hofmann, T. Thiemann, and O. Winkler, *Manifestly gauge-invariant general relativistic perturbation theory: I. Foundations*, Classical Quant. Grav. **27** (2010), 055005.

[63] ———, *Manifestly gauge-invariant general relativistic perturbation theory: II. FRW background and first order*, Classical Quant. Grav. **27** (2010), 055006.

[64] K. Głód, *Complex characteristic transformation for the elliptic integral of the third kind reviewed*, submitted to Integr. Transf. Spec. F., 2014.

[65] Z. A. Golda and A. Woszczyna, *A field theory approach to cosmological density perturbations*, Phys. Lett. A **310** (2003), 357.

[66] Z. A. Golda, A. Woszczyna, and K. Zawada, *Canonical gauge-invariant variables for scalar perturbations in synchronous coordinates*, Acta Phys. Pol. B **36** (2005), 2133.

[67] S. W. Goode, *Analysis of spatially inhomogeneous perturbations of the FRW cosmologies*, Phys. Rev. D **39** (1989), 2882.

[68] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, Amsterdam, 2007.

[69] S. R. Green and R. M. Wald, *New framework for analyzing the effects of small scale inhomogeneities in cosmology*, Phys. Rev. D **83** (2011), 084020.

[70] ———, *Examples of backreaction of small-scale inhomogeneities in cosmology*, Phys. Rev. D **87** (2013), 124037.

[71] P. B. Greene, L. Kofman, A. Linde, and A. A. Starobinsky, *Structure of resonance in preheating after inflation*, Phys. Rev. D **56** (1997), 6175.

[72] L. P. Grishchuk, *Amplification of gravitational waves in an isotropic universe*, J. Exp. Theor. Phys. **40** (1975), 409.

[73] ———, *The amplification of gravitational waves and creation of gravitons in the isotropic universes*, Lett. Nuovo Cimento **12** (1975), 60.

[74] ———, *The amplification of gravitational waves and creation of gravitons in the isotropic universes*, Lett. Nuovo Cimento **12** (1975), 432.

[75] E. R. Harrison, *Normal modes of vibrations of the universe*, Rev. Mod. Phys. **39** (1967), 862.

[76] S. W. Hawking, *Perturbations of an expanding universe*, Astrophys. J. **145** (1966), 544.

[77] ———, *Gravitational radiation in an expanding universe*, J. Math. Phys. **9** (1968), 598.

[78] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[79] A. B. Henriques, *Graviton creation in an inflationary universe*, Phys. Rev. D **49** (1994), 1771.

[80] A. B. Henriques, L. E. Mendes, and R. G. Moorhouse, *Density and graviton perturbations in the cosmic microwave background*, Phys. Rev. D **55** (1997), 5908.

[81] P. A. Hogan and E. M. O'Shea, *Gravitational wave propagation in isotropic cosmologies*, Phys. Rev. D **65** (2002), 124017.

[82] ______, *Erratum: Gravitational wave propagation in isotropic cosmologies*, Phys. Rev. D **70** (2004), 029902.

[83] B. L. Hu, *Separation of tensor equations in a homogeneous space by group theoretical methods*, J. Math. Phys. **15** (1974), 1748.

[84] W. Hu and N. Sugiyama, *Anisotropies in the cosmic microwave background: An analytic approach*, Astrophys. J. **444** (1995), 489.

[85] ______, *Toward understanding CMB anisotropies and their implications*, Phys. Rev. D **51** (1995), 2599.

[86] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Longmans, Green and Company, London, 1926.

[87] W. M. Irvine, *Local irregularities in an expanding universe*, Ann. Phys. **32** (1965), 322.

[88] R. A. Isaacson, *Gravitational radiation in the limit of high frequency. I. The linear approximation and geometrical optics*, Phys. Rev. **166** (1968), 1263.

[89] ______, *Gravitational radiation in the limit of high frequency. II. Nonlinear terms and the effective stress tensor*, Phys. Rev. **166** (1968), 1272.

[90] W. Israel, *Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity*, Nuovo Cimento B **44** (1966), 1.

[91] ______, *Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity*, Nuovo Cimento B **48** (1967), 463.

[92] R. T. Jantzen, *Tensor harmonics on the* 3*-sphere*, J. Math. Phys. **19** (1978), 1163.

[93] E. G. Kalnins and W. Miller, *Complete sets of functions for perturbations of Robertson–Walker cosmologies*, J. Math. Phys. **32** (1991), 1415.

[94] ______, *Complete sets of functions for perturbations of Robertson–Walker cosmologies and spin* 1 *equations in Robertson–Walker-type space-times*, J. Math. Phys. **32** (1991), 698.

[95] T. Kimura, *On Riemann's equations which are solvable by quadratures*, Funkc. Ekvacioj **12** (1969), 269.

[96] H. Kodama and M. Sasaki, *Cosmological perturbation theory*, Prog. Theor. Phys. Supp. **78** (1984), 1.

[97] E. R. Kolchin, *Algebraic matric groups and the Picard–Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations*, Ann. Math. **49** (1948), 1.

[98] S. Koranda and B. Allen, *CBR anisotropy from inflation-induced gravitational waves in mixed radiation and dust cosmology*, Phys. Rev. D **52** (1995), 1902.

[99] V. A. Koutvitsky and E. M. Maslov, *Instability of coherent states of a real scalar field*, J. Math. Phys. **47** (2006), 022302.

[100] J. J. Kovacic, *An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations*, J. Symb. Comput. **2** (1986), 3.

[101] P. U. Lamalle, *Constant-*$k_{\|}$ *toroidal coordinates and their application to tokamak plasma high-frequency dielectric response theory: I. Anisotropic equilibria*, Plasma Phys. Contr. F. **48** (2006), 433.

[102] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford, 1975.

[103] H. A. Lang and D. F. Stevens, *On the evaluation of certain complex elliptic integrals*, Math. Comp. **14** (1960), 195.

[104] E. M. Lifshitz, *On the gravitational stability of the expanding universe*, J. Phys. **10** (1946), 116.

[105] E. M. Lifshitz and I. M. Khalatnikov, *Investigations in relativistic cosmology*, Adv. Phys. **12** (1963), 185.

[106] ——, *Problems of relativistic cosmology*, Phys. Usp. **6** (1964), 495.

[107] F. Lindemann, *Ueber die Differentialgleichung der Functionen des elliptischen Cylinders*, Math. Ann. **22** (1883), 117.

[108] V. N. Lukash, *Production of phonons in an isotropic universe*, J. Exp. Theor. Phys. **52** (1980), 807.

[109] ——, *Production of sound waves in the early universe*, J. Exp. Theor. Phys. Lett. **31** (1980), 596.

[110] A. A. Lyubushin, *Quantization of weak gravitational waves in a closed Friedmann model*, Theor. Math. Phys. **10** (1972), 272.

[111] C.-P. Ma and E. Bertschinger, *Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauges*, Astrophys. J. **455** (1995), 7.

[112] R. Maartens, G. F. R. Ellis, and S. T. C. Siklos, *Local freedom in the gravitational field*, Classical Quant. Grav. **14** (1997), 1927.

[113] K. A. Malik and D. Wands, *Cosmological perturbations*, Phys. Rep. **475** (2009), 1.

[114] J. M. Martín-García, *xAct: Efficient tensor computer algebra for Mathematica*, `http://www.xact.es/`, release 1.1.1 of 28-09-2014.

[115] J. Martinet and J. P. Ramis, *Théorie de Galois Différentielle et Resommation*, Computer Algebra and Differential Equations (E. Tournier, ed.), Academic Press, London, 1989.

[116] E. M. Maslov and A. G. Shagalov, *Dynamics of first-order phase transitions in the $\phi^4$-$\phi^6$ model caused by the parametric instability of the metastable vacuum*, Physica D **152** (2001), 769.

[117] L. E. Mendes, A. B. Henriques, and R. G. Moorhouse, *Exact calculation of the energy density of cosmological gravitational waves*, Phys. Rev. D **52** (1995), 2083.

[118] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.

[119] R. G. Moorhouse, A. B. Henriques, and L. E. Mendes, *Graviton creation in an expanding universe*, Phys. Rev. D **50** (1994), 2600.

[120] J. J. Morales-Ruiz, *Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Basel, 2013.

[121] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, *Theory of cosmological perturbations*, Phys. Rep. **215** (1992), 203.

[122] K. Nakamura, *Gauge invariant variables in two-parameter nonlinear perturbations*, Prog. Theor. Phys. **110** (2003), 723.

[123] ______, *Second-order gauge invariant perturbation theory*, Prog. Theor. Phys. **113** (2005), 481.

[124] ———, *Second-order gauge invariant cosmological perturbation theory*, Prog. Theor. Phys. **117** (2007), 17.

[125] K.-W. Ng, *Graviton mode function in inflationary cosmology*, Int. J. Mod. Phys. A **11** (1996), 3175.

[126] J. M. Niedra, *Gauge-invariant definition of gravitational radiation in Robertson–Walker cosmologies*, Phys. Rev. D **25** (1982), 2049.

[127] J. M. Niedra and A. I. Janis, *Gravitational radiation in Robertson–Walker backgrounds*, Gen. Relat. Gravit. **15** (1983), 241.

[128] H. Noh and J. Hwang, *Second-order perturbations of the Friedmann world model*, Phys. Rev. D **69** (2004), 104011.

[129] M. Novello, E. Bittencourt, and J. M. Salim, *The quasi-Maxwellian equations of general relativity: Applications to the perturbation theory*, Braz. J. Phys. **44** (2014), 832.

[130] F. Oberhettinger and W. Magnus, *Anwendung der Elliptischen Funktionen in Physik und Technik*, Springer-Verlag, Berlin, 1949.

[131] D. W. Olson, *Density perturbations in cosmological models*, Phys. Rev. D **14** (1976), 327.

[132] F. W. J. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York, 1974.

[133] B. Osano, *The Weyl curvature tensor, the Cotton–York tensor and gravitational waves*, arXiv:gr-qc (2013), 1309.2768v2.

[134] E. M. O'Shea, *Metric perturbation approach to gravitational waves in isotropic cosmologies*, Phys. Rev. D **69** (2004), 064038.

[135] M. J. Pareja and M. A. H. MacCallum, *Local freedom in the gravitational field revisited*, Classical Quant. Grav. **23** (2006), 5039.

[136] L. Parker, *Quantized fields and particle creation in expanding universes I*, Phys. Rev. **183** (1969), 1057.

[137] ———, *Quantized fields and particle creation in expanding universes II*, Phys. Rev. D **3** (1971), 346.

[138] ———, *Particle creation and particle number in an expanding universe*, J. Phys. A **45** (2012), 374023.

[139] G. Peltio, *Summa: Symbolic sums manipulation*, Wolfram Lib. Arch. **3336** (2005), 1.

[140] Z. Perjés, M. Vasúth, V. Czinner, and D. Eriksson, *$C^\infty$ perturbations of FRW models with a cosmological constant*, Astron. Astrophys. **431** (2005), 415.

[141] C. Pitrou, J.-P. Uzan, and F. Bernardeau, *Cosmic microwave background bispectrum on small angular scales*, Phys. Rev. D **78** (2008), 063526.

[142] ———, *The cosmic microwave background bispectrum from the non-linear evolution of the cosmological perturbations*, J. Cosmol. Astropart. P. **07** (2010), 003.

[143] A. R. Prasanna, *Propagation of gravitational waves through a dispersive medium*, Phys. Lett. A **257** (1999), 120.

[144] W. H. Press and E. T. Vishniac, *Tenacious myths about cosmological perturbations larger than the horizon size*, Astrophys. J. **239** (1980), 1.

[145] Y. D. S. Rajapakse, *Surface energy and surface tension at holes and cracks*, Int. J. Fracture **11** (1975), 57.

[146] S. Räsänen, *Light propagation and the average expansion rate in near-FRW universes*, Phys. Rev. D **85** (2012), 083528.

[147] A. Ronveaux, *Heun's Differential Equations*, Oxford University Press, Oxford, 1995.

[148] M. A. Rubin and C. R. Ordóñez, *Eigenvalues and degeneracies for n-dimensional tensor spherical harmonics*, J. Math. Phys. **25** (1984), 2888.

[149] B. Rubinstein, *Replacement of variables*, Wolfram Lib. Arch. **4186** (1998), 1.

[150] R. K. Sachs, *Gravitational Radiation*, Relativity, Groups and Topology (C. M. DeWitt and B. S. DeWitt, eds.), Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1964.

[151] R. K. Sachs and A. M. Wolfe, *Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background*, Astrophys. J. **147** (1967), 73.

[152] V. Sahni, *Energy density of relic gravity waves from inflation*, Phys. Rev. D **42** (1990), 453.

[153] V. D. Sandberg, *Tensor spherical harmonics on $S^2$ and $S^3$ as eigenvalue problems*, J. Math. Phys. **19** (1978), 2441.

[154] J. M. M. Senovilla and R. Vera, *New family of inhomogeneous $\gamma$-law cosmologies: Example of gravitational waves in a homogeneous $p = \varrho/3$ background*, Phys. Rev. D **63** (2001), 084008.

[155] G. Siemieniec-Ozięblo and A. Woszczyna, *Acoustic instabilities at the transition from the radiation-dominated to the matter-dominated universe*, Astron. Astrophys. **419** (2004), 801.

[156] M. F. Singer, *Liouvillian solutions of $n$-th order homogeneous linear differential equations*, Am. J. Math. **103** (1981), 661.

[157] S. Y. Slavyanov and W. Lay, *Special Functions. A Unified Theory Based on Singularities*, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[158] B. D. Sleeman and V. B. Kuznetsov, *Heun functions*, NIST Digital Library of Mathematical Functions, `http://dlmf.nist.gov/`, release 1.0.9 of 29-08-2014.

[159] A. O. Smirnov, *Elliptic solitons and Heun's equation*, arXiv:math (2001), 0109149v2.

[160] ———, *Finite-gap solutions of the Fuchsian equations*, arXiv:math (2003), 0310465v2.

[161] V. I. Smirnov, *A Course of Higher Mathematics*, Pergamon Press, Oxford, 1964.

[162] J. M. Stewart, *Perturbations of Friedmann–Robertson–Walker cosmological models*, Classical Quant. Grav. **7** (1990), 1169.

[163] J. M. Stewart and M. Walker, *Perturbations of space-times in general relativity*, Proc. R. Soc. Lond. A **341** (1974), 49.

[164] T. J. Stieltjes, *Quelques remarques sur l'intégration d'une équation différentielle*, Astron. Nachr. **109** (1884), 145.

[165] ———, *Quelques remarques sur l'intégration d'une équation différentielle*, Astron. Nachr. **109** (1884), 261.

[166] C. D. Sutherland, *Footnote to the evaluation of certain complex elliptic integrals*, Math. Comp. **19** (1965), 132.

[167] S. J. Szybka, K. Głód, M. J. Wyrębowski, and A. Konieczny, *Inhomogeneity effect in Wainwright–Marshman space-times*, Phys. Rev. D **89** (2014), 044033.

[168] K. Takemura, *The Heun equation and the Calogero–Moser–Sutherland system IV: The Hermite–Krichever ansatz*, Commun. Math. Phys. **258** (2005), 367.

[169] ———, *The Hermite–Krichever ansatz for Fuchsian equations with applications to the sixth Painlevé equation and to finite-gap potentials*, Math. Z. **263** (2009), 149.

[170] K. Tomita, *Tensor spherical and pseudo-spherical harmonics in four-dimensional spaces*, Prog. Theor. Phys. **68** (1982), 310.

[171] M. Trott, *The Mathematica GuideBook for Symbolics*, Springer Science and Business Media, New York, 2006.

[172] C. G. Tsagas and J. D. Barrow, *A gauge-invariant analysis of magnetic fields in general-relativistic cosmology*, Classical Quant. Grav. **14** (1997), 2539.

[173] ———, *Gauge-invariant magnetic perturbations in perfect-fluid cosmologies*, Classical Quant. Grav. **15** (1998), 3523.

[174] C. G. Tsagas, A. Challinor, and R. Maartens, *Relativistic cosmology and large-scale structure*, Phys. Rep. **465** (2008), 61.

[175] C. G. Tsagas and A. Kandus, *Superadiabatic-type magnetic amplification in conventional cosmology*, Phys. Rev. D **71** (2005), 123506.

[176] M. S. Turner and L. M. Widrow, *Inflation-produced, large-scale magnetic fields*, Phys. Rev. D **37** (1988), 2743.

[177] C. Uggla and J. Wainwright, *Cosmological perturbation theory revisited*, Classical Quant. Grav. **28** (2011), 175017.

[178] ———, *Scalar cosmological perturbations*, Classical Quant. Grav. **29** (2012), 105002.

[179] ———, *A simplified structure for the second order cosmological perturbations*, Gen. Relat. Gravit. **45** (2013), 643.

[180] ———, *Asymptotic analysis of perturbed dust cosmologies to second order*, Gen. Relat. Gravit. **45** (2013), 1467.

[181] G. Valent, *Heun functions versus elliptic functions*, arXiv:math-ph (2005), 0512006v1.

[182] S. D. P. Vitenti, F. T. Falciano, and N. Pinto-Neto, *Covariant Bardeen perturbation formalism*, Phys. Rev. D **89** (2014), 103538.

[183] J. Wainwright and G. F. R. Ellis, *Dynamical Systems in Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[184] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[185] A. Woszczyna, W. Czaja, K. Głód, Z. A. Golda, R. A. Kycia, A. Odrzywołek, P. Plaszczyk, L. M. Sokołowski, and S. J. Szybka, *ccgrg: The symbolic tensor analysis package with tools for general relativity*, Wolfram Lib. Arch. **8848** (2014), 1.

[186] A. Woszczyna and A. Kułak, *Cosmological perturbations — extension of Olson's gauge-invariant method*, Classical Quant. Grav. **6** (1989), 1665.

[187] J. W. York, *Conformally invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors on Riemannian manifolds and the initial-value problem of general relativity*, J. Math. Phys. **14** (1973), 456.

[188] ______, *Covariant decompositions of symmetric tensors in the theory of gravitation*, Ann. I. H. Poincaré A **21** (1974), 319.

[189] R. M. Zalaletdinov, *Averaging out the Einstein equations*, Gen. Relat. Gravit. **24** (1992), 1015.

[190] R. L. Zimmerman and F. I. Olness, *Mathematica for Physics*, Addison–Wesley Publishing Company, San Francisco, 2002.