UNIVERSITATIS IAGELLONICAE ACTA MATHEMATICA
doi: 10.4467/20843828AM.16.001.5373 53(2016), 7–12

SUR LA CONNEXITÉ DE L'AXE MÉDIAN

by Maciej P. Denkowski

Abstract. Dans cette note nous donnons – par des méthodes de topologie générale – une démonstration complète d'un cas important du théorème de Fremlin sur la connexité de l'axe médian (*medial axis*).

1. Introduction.

Dans [**2**] on trouve le théorème suivant:

Théorème 1.1. ([**2**] 1B). *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert connexe ne contenant pas de demi-espace, alors son axe médian est connexe (ou vide).*

Rappelons ici que l'axe médian d'un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est par définition l'ensemble de points

$$S = S_\Omega = \{x \in \Omega \mid \#m(x) > 1\}$$

où $m(x) = \{y \in \partial\Omega \mid ||x-y|| = d(x, \partial\Omega)\}$ pour la distance euclidienne $d(x, \partial\Omega)$. Cet ensemble joue un rôle primordial dans la théorie de reconnaissance des objets.

La démonstration dans [**2**] se fait par évocation d'un résultat de topologie qui, semberait-il, est loin d'être connu et suit apparemment de plusieurs différents résultats difficilement accessibles et souvent exposés d'une façon obsolète. Nous proposons dans cette note de donner une démonstration complète du théorème de Fremlin dans le cas d'un domaine borné (on sait qu'alors $S \neq \varnothing$, voir [**1**]). L'idée principale est la même que celle proposée dans [**2**].

Notons que le théorème n'est pas forcément vrai pour des domaines non bornés:

2010 *Mathematics Subject Classification.* 32B20, 54F99.
Key words and phrases. Medial axis, skeleton, central set.

Exemple 1.2. Soit Ω l'épigraphe de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1; \\ 1 - x, & x \in [0,1); \\ x + 1, & x \in (-1,0). \end{cases}$$

Il est facile de voir que S a dans ce cas deux composantes connexes.

2. Quelques résultats de topologie générale. Nous commençons par un théorème naturel mais, semblerait-il, peu ou pas du tout connu et pour lequel nous n'avons pas pu trouver des références claires.

Théorème 2.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et borné et $C \subset \Omega$ un fermé dans Ω tel que $\Omega \setminus C$ est disconnexe, i.e. $\Omega \setminus C = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec deux ouverts dans $\Omega \setminus C$ non-vides et disjoints. On pose $K = \partial\Omega \cup C$ et on suppose qu'il existe une application continue $H\colon K \times [0,1] \to \overline{\Omega}$ telle que*

1. *$H(\cdot, 0) = \mathrm{id}_K$;*
2. *$H(x,t) = x$ pour tout $x \in \partial\Omega$, $t \in [0,1]$;*
3. *$H(K \times \{1\}) \subset \partial\Omega$ (en fait on a l'égalité par (2)).*

Alors pour toute paire de points $(a_1, a_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ il existe $t \in (0,1)$ tel qu'on a soit $a_1 \in H(K \times \{t\})$, soit $a_2 \in H(K \times \{t\})$.

Autrement dit, si on déforme de façon continue $C \cup \partial\Omega$ dans $\overline{\Omega}$ en ne bougeant pas $\partial\Omega$ et ce de manière à ce queà la fin C se retrouve dans $\partial\Omega$, et si on se donne deux points se trouvant *des deux côtés différents de* C, alors à un moment donné de la déformation, l'image de C passe par un de ces points.

Remarque 2.2. Ce théorème a pour but de donner la propriété suivante: *si p et q sont des points dans deux composantes connexes différentes de $\mathbb{R}^n \setminus K$ où K est un compact non-vide et si on fait une déformation continue de K sur K' dans $\mathbb{R}^n \setminus \{p,q\}$, alors p et q se trouvent dans deux composantes différentes de $\mathbb{R}^n \setminus K'$.*

En parlant de *déformation* on entend ici une application continue $F\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{p,q\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{p,q\}$ telle que $F(x,0) = x$ pour $x \in K$ et $F(K \times \{1\}) = K'$.

En reformulant avec plus de précision: *soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact tel que $\mathbb{R}^n \setminus K$ est disconnexe et p, q des points dans deux composantes connexes différentes. Soit K' une déformation de K dans $\mathbb{R}^n \setminus \{p,q\}$ i.e. il existe une surjection continue $f\colon K \to K'$ homotope à id_K dans $\mathbb{R}^n \setminus \{p,q\}$, autrement dit admettant une fonction continue $h\colon K \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{p,q\}$ telle que $h(\cdot,0) = \mathrm{id}_K$ et $h(\cdot,1) = f$. Alors p et q sont dans deux composantes connexes différentes de $\mathbb{R}^n \setminus K'$.*

La démonstration du Théorème 2.1 se fera en plusieurs étapes.

On compactifie $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^n$ et on nomme p et q les deux pôles. On dira que le compact $K \subset \mathbb{S}^n \setminus \{p,q\}$ *sépare* p et q, si ces points appartiennent à deux composantes connexes différentes de $\mathbb{S}^n \setminus K$.

Notons $\pi\colon \mathbb{S}^n \setminus \{p,q\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ la rétraction sur l'équateur. Le lemme suivant est classique, néanmoins nous le donnons avec une démonstration complète.

LEMME 2.3. *Si $K \subset \mathbb{S}^n$ est un compact et $f\colon K \to \mathbb{S}^{n-1}$ une fonction continue, alors les trois assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *f est homotope à une constante,*
2. *f admet une extension continue à toute la sphère,*
3. *f admet une extension continue à la sphère moins un point.*

DÉMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2). Notons h l'homotopie entre f pout $t = 1$ et une fonction constante c pour $t = 0$. La constante est définie sur toute la sphère et on peut prolonger h en une fonction continue H sur $L := (K \times [0,1]) \cup (\mathbb{S}^n \times \{0\})$. Ensuite il est facile de trouver une extension continue g de H sur un voisinage U de L dans $\mathbb{S}^n \times [0,1]$ ([1]). Alors on peut prolonger g continûment par G sur tout $\mathbb{S}^n \times [0,1]$ et prendre enfin $F := G(\cdot, 1)$ comme extension de f.

En effet, ayant trouvé un voisinage $V \supset K$ tel que $\overline{V} \times [0,1] \subset U$ il suffit de poser

$$G(x,t) = \begin{cases} g(x, \phi(x)t), & \text{pour } (x,t) \in U; \\ c, & \text{pour } (x,t) \notin U, \end{cases}$$

avec la fonction continue

$$\phi(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, \mathbb{S}^n \setminus V)}{\operatorname{dist}(x, \mathbb{S}^n \setminus V) + \operatorname{dist}(x, K)}, \quad \phi\colon \mathbb{S}^n \to [0,1],$$

qui satisfait à $\phi^{-1}(1) \supset K$, $\phi^{-1}(0) \supset \mathbb{S}^n \setminus V$.

(2) $\Rightarrow$ (3) est évident.

(3) $\Rightarrow$ (1). Soit $F\colon \mathbb{S}^n \setminus \{a\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ l'extension. Or, $\mathbb{S}^n \setminus \{a\}$ est contractile, alors F est homotope à une constante, d'où f l'est aussi. □

PROPOSITION 2.4. *Le compact $K \subset \mathbb{S}^n$ sépare p et q si et seulement si $\pi|_K$ n'est pas homotope à une constante.*

DÉMONSTRATION. Notons que π ne peut pas être homotope à une constante ([2]).

Supposons que K sépare les pôles et que $\pi|_K$ est tout de même homotope à une constante. Alors par le lemme on trouve une extension continue $P\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ de $\pi|_K$.

---

[1] On peut, par exemple, utiliser localement le théorème de Tietze–Urysohn et recoller les extensions ainsi obtenues au moyen d'une partition de l'unité.

[2] sinon $\pi' = \pi|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ le serait puisque l'équateur est le rétracté du domaine de π; or π' est l'identité sur $\mathbb{S}^{n-1}$ alors que la sphère n'est pas contractile.

On peut écrire $\mathbb{S}^n = S_p \cup S_q$ avec $p \in S_p$, $q \in S_q$ et $S_p \cap S_q = K$, les deux ensembles étant fermés. On peut toujours supposer que $\mathbb{S}^{n-1} \subset S_q$. Alors posons

$$f(x) = \begin{cases} P(x), & x \in S_p, \\ \pi(x), & x \in S_q \setminus \{q\}. \end{cases}.$$

C'est une fonction continue sur $\mathbb{S}^n \setminus \{q\}$, extension de $\pi|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ et donc par le lemme cette dernière est homotope à une constante. Contradiction.

En revanche, si K ne sépare pas les pôles, alors on identifie $\mathbb{S}^n \setminus \{q\}$ à $\mathbb{R}^n$ et par la compacité de K on trouve un arc $\gamma \subset (\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}) \setminus K$, affine par parties, joignant p à $\infty = q$. Or, $\mathbb{S}^n \setminus \gamma = \mathbb{R}^n \setminus \gamma$ est contractile, d'où $\pi|_K$ est homotope à une constante. □

Théorème 2.5. *Soit $K \subset \mathbb{S}^n$ un compact séparant les pôles et K' sa déformation dans $\mathbb{S}^n \setminus \{p, q\}$. Alors K' sépare p et q lui aussi.*

Démonstration. Supposons que ce n'est pas le cas. Par la Proposition on a $\pi|_{K'}$ homotope à une constante. Par hypothèses il existe une surjection continue $f\colon K \to K'$ admettant une homotopie $h\colon K \times [0, 1] \to \mathbb{S}^n \setminus \{p, q\}$ telle que $h(\cdot, 0) = \mathrm{id}_K$ et $h(\cdot, 1) = f$. Il s'ensuit que la fonction $\pi|_K$ est homotope à une constante ([3]) et la Proposition achève la démonstration. □

Démonstration du Théorème 2.1. Après compactification de $\mathbb{R}^n$ pour avoir $K \subset \mathbb{S}^n$ on peut supposer en plus que les deux points en question a_1, a_2 sont les deux pôles.

Supposons que le théorème est faux pour ces deux points. Les hypothèses garantissent alors que $\partial\Omega$ est une déformation de K dans $\mathbb{S}^n \setminus \{a_1, a_2\}$ et donc par le dernier théorème $\partial\Omega$ devrait séparer a_1 et a_2 ce qui n'est pas le cas, puisque $a_1, a_2 \in \Omega$ et ce dernier est connexe. □

3. Connexité de l'axe médian. Nous somme prêts à démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe, non-vide et borné. Alors S est connexe.*

Remarque 3.2. Notons que par 2.23 dans [**1**] on peut remplacer S par l'ensemble central, i.e. l'ensemble des centres de boules maximales contenues dans Ω.

[3] Par composition: $\pi \circ h$ est une homotopie entre $\pi|_K$ et $\pi \circ f$ et si on note h' l'homotopie entre $\pi|_{K'}$ et la fonctions constante c, alors $H(x, t) := h'(f(x), t)$, $(x, t) \in K \times [0, 1]$, définit une homotopie entre $\pi \circ f$ et c.

Démonstration du Théorème 3.1. Supposons que $S = S_1 \cup S_2$ est union disjointe d'ensembles non-vides S_j et fermés dans S. Soient $d_j(x) = d(x, S_j)$ et considérons l'ensemble de conflit $C = \{x \in \Omega \mid d_1(x) = d_2(x)\}$ avec les territoires $\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid d_1(x) < d_2(x)\}$ et l'analogue Ω_2. Alors C est non-vide et fermé dans Ω, l'union des territoires donne $\Omega \setminus C$ et $\partial(\Omega \setminus C) = \partial\Omega \cup C$. De plus, $C \cap S = \varnothing$, puisque $S_1 \cap S_2 = \varnothing$.

La multifonction $x \mapsto m(x)$ est univalente sur $\Omega \setminus S$ et pour tout $x \in \Omega \setminus S$, $[x, m(x)] \cap S = \varnothing$ ([4]). De plus, il est clair que nous avons $[x, m(x)] \setminus \{m(x)\} \subset \Omega$ pour $x \in \Omega \setminus S$.

Lorsque $x \in \partial\Omega$ nous obtenons naturellement $m(x) = x$. Remarquons maintenant que la fonction univalente $m\colon \overline{\Omega} \setminus S \to \partial\Omega$ est continue (et cela indépendemment du fait que Ω soit borné ou non). En effet, pour une suite convergeante $\overline{\Omega} \setminus S \ni x_\nu \to x_0 \in \overline{\Omega} \setminus S$ on a

$$||x_\nu - m(x_\nu)|| = d(x_\nu, \partial\Omega) \to d(x_0, \partial\Omega) = ||x_0 - m(x_0)||$$

d'où si la suite $(m(x_\nu))$ converge, c'est nécessairement vers $m(x_0)$. Or pour voir que $(m(x_\nu))$ est bien convergente il suffit de montrer que cette suite est bornée ([5]). On a

$$||m(x_\nu)|| \leq ||m(x_0)|| + d(x_0, \partial\Omega) + ||x_0 - x_n u|| + d(x_\nu, \partial\Omega)$$

ce qui conduit à l'estimation cherchée.

Ainsi, si on pose $K := \partial\Omega \cup C$ et $H(x,t) := (1-t)x + tm(x)$, pour $x \in K$, $t \in [0,1]$, on obtient une fonction continue qui satisfait aux hypothèses du Théorème 2.1. Prenons alors deux points $a_j \in S_j$, $j = 1, 2$. Il suit du Théorème 2.1 que pour un $t \in (0,1)$ on a $a_j \in H(K \times \{t\})$ pour, disons, $j = 1$. Or, par construction, $H(K \times \{t\}) \subset \overline{\Omega} \setminus S$ et $a_1 \in S$ ce qui nous fournit une contradiction et achève la démonstration. $\square$

4. Remerciements. Cette note a été préparée suite à des discussions avec M. Tibăr durant le séjour de l'auteur à Lille. L'auteur tient à remercier M. Tibăr pour l'intérêt porté à ce sujet. L'auteur a eu le soutien partiel du grant NCN 2011/01/B/ST1/03875.

Enfin, l'auteur exprime son extrême gratitude envers le rapporteur anonyme dont la lecture attentive du manuscrit a permis d'en éradiquer plusieurs maladresses ainsi que de simplifier davantage les raisonnements.

[4] Si on avait $x' \in [x, m(x)] \cap S$, alors $x' \neq x, m(x)$ et on trouverait un point $y \in m(x')$ différent de $m(x) \in m(x')$. Alors $||x - y|| < ||x - m(x)|| = d(x)$ par l'inégalité du triangle — contradiction.

[5] Car alors toute sous-suite contient une sous-sous-suite convergeante forcément vers $m(x_0)$ ce qui implique la convergence de la suite elle-même.

References

1. Birbrair L., Denkowski M. P., *Medial axis and singularities*, preprint (2014).
2. Fremlin D. H., *Skeletons and central sets*, Proc. London Math. Soc., (**3**) **74** (1997), 701–720.

Received September 10, 2015

Institute of Mathematics
Faculty of Mathematics and Computer Science
Jagiellonian University
Łojasiewicza 6
30-348 Kraków, Poland
e-mail: `maciej.denkowski@uj.edu.pl`