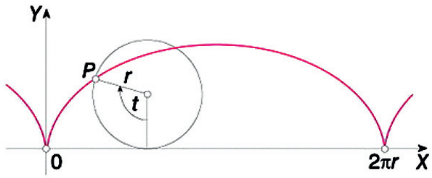
Cykloida i zagadnienie wariacyjne, czyli jak najszybciej ześlizgnąć się z górki

Jeśli słowo cykloida kojarzy się wam z cyklistą, czyli mówiąc inaczej z rowerzystą, to jest to prawidłowe skojarzenie. Bowiem cykloida to krzywa, jaką wyznacza punkt położony na obwodzie koła (na przykład rowerowego) toczącego się bez poślizgu.



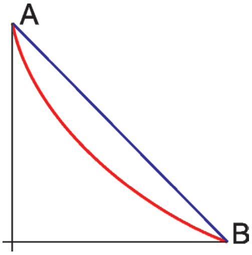
http://www.aapt.org/programs/contests/pc08.cfm

Zagadnienie wariacyjne nie ma nic wspólnego z wariowaniem czy inaczej bzikowaniem, za to wiąże się ze zmienianiem. Przypomnijcie sobie angielski czasownik *to vary* – zmieniać. W zagadnieniach wariacyjnych „wariuje się” (zmienia się), pewien parametr, tak by znaleźć jego wartość, przy której jakaś wielkość fizyczna osiąga maksimum lub minimum, czyli jest największa lub najmniejsza. Nie jest to łatwe, ale na przedstawionych poniżej dwóch przykładach poczujecie smak tej wyrafinowanej metody wariacyjnej.

W naszych przykładach minimalizowaną wielkością będzie czas. Będziemy szukać takich torów cząstki i strumienia światła, by czas przebycia drogi od jakiegoś punktu A do B był najmniejszy.

1. Zagadnienie brachistochrony

Chcemy wyliczyć kształt krzywej, po której ciało o masie *m* ma się ześlizgnąć najszybciej (bez tarcia) między zadanymi punktami A (wyżej) i B (niżej). Krzywa ta (czerwona) nazywa się **brachistochroną**. Nazwa pochodzi od złożenia greckich słów *brachistos* (βραχιστος) – najkrótszy i *chronos* (χρονος) – czas.



Galileusz sądził, iż to łuk okręgu. Dopiero później Isaak Newton, Gottfried Leibniz, rywal Newtona, de l’Hôspital oraz bracia Jacob I i Johann I Bernoulliowie wyliczyli ten kształt i znaleźli rozwiązanie: ta krzywa to odwrócona cykloida.

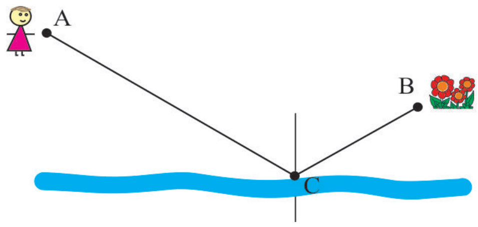
W Internecie, pod hasłem *brachistochrona*, znajduje się animacja pokazująca ruch ciała po prostej łączącej dwa punkty oraz po brachistochronie. Widać jak cząstka ześlizgująca się po brachistochronie dociera pierwsza do celu.

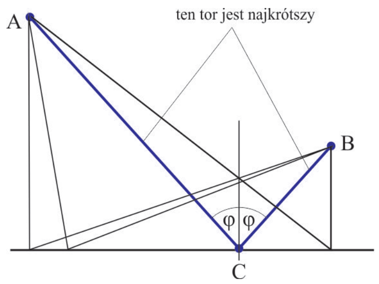
Rachunek, jakim posługiwał się Bernoulli, nazywa się rachunkiem wariacyjnym. Odpowiedź na pytanie: **Jak najszybciej ześlizgnąć się z górki?** brzmi: znaleźć górkę, która ma przekrój o kształcie odwróconej cykloidy.

2. Zasada Fermata

Posługując się rachunkiem wariacyjnym można także rozwiązać zagadnienie dotyczące rozchodzenia się światła. W tym wypadku chodzi o znalezienie toru, po jakim porusza się światło od punktu A do B, tak aby czas rozchodzenia był najmniejszy. W ośrodku jednorodnym jest to linia prosta.

Doskonale wiemy, że sprężysta kula bilardowa odbija się od bandy w taki sposób, że kąt padania równa się kątowi odbicia. Podobnie zachowuje się światło padające na zwierciadło. Wówczas można pokazać, że czas przebywania drogi od A do B jest najkrótszy (w tym przypadku oznacza to też najkrótszą drogę). Jest to problem ogrodniczki, która znajduje się w punkcie A i ma podlać grządkę w punkcie B wodą z rzeczki.

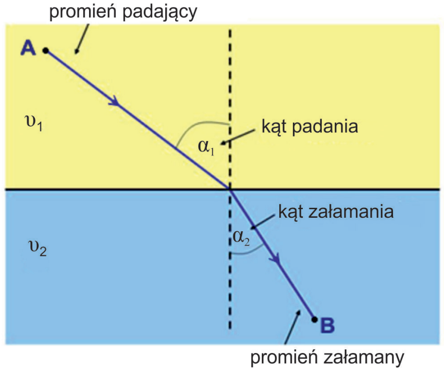




Jest wiele możliwych dróg, lecz jedna najkrótsza. Ta najszybsza, znaleziona metodą wariacyjną (już niedługo w liceum sami ją bez trudu znajdziecie), to ta, dla której jest spełniony warunek:

kąt padania = kąt odbicia

W przypadku, gdy na drodze między punktem A i B światło natrafia na zmianę ośrodka, to z doświadczenia wiemy, że jest to krzywa łamana. W pierwszym ośrodku światło ma prędkość v_1, a w drugim v_2.



Droga światła składa się z dwóch części: przebywanej w jednym ośrodku oraz w drugim. Całkowity czas jest sumą tych dwóch czasów.

A może najszybciej osiągnęłoby cel, gdyby poruszało się po prostej? Okazuje się, że tak nie jest.

Jak wygląda tor dla minimalnego czasu? Jak załamuje się tor promienia światła? Tor załamuje się ku normalnej, jeśli światło przechodzi do ośrodka – jak mówimy – optycznie gęstszego, w którym rozchodzi się wolniej. Odpowiedź daje prawo Snelliusa, które dobrze znacie. To prawo załamania światła:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

Prawo to wyprowadza się korzystając z zasady wariacyjnej. W liceum bez problemu poradzicie sobie z tym problemem.

Z.G-M