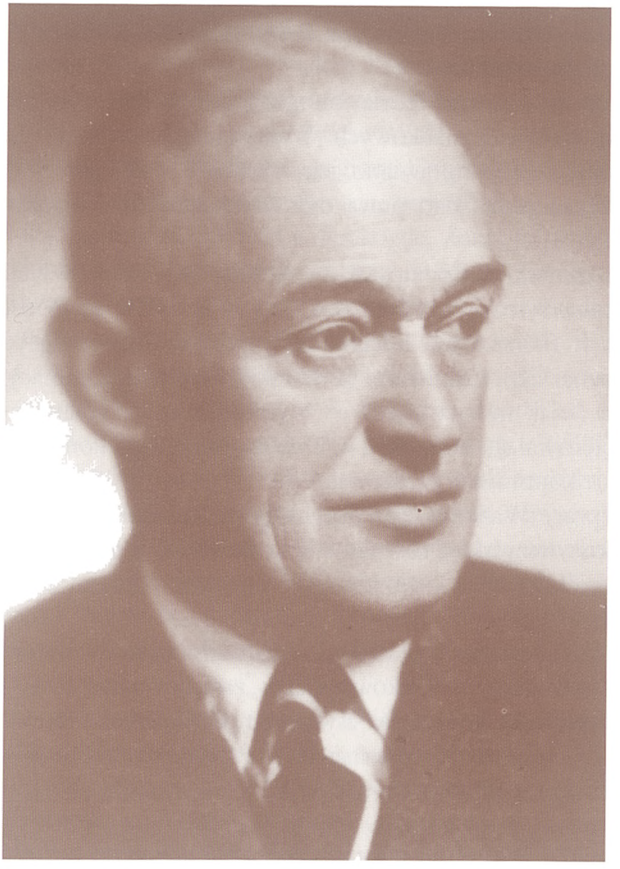
TADEUSZ WAŻEWSKI
(1896–1972)



UCZONY I NAUCZYCIEL

Tadeusz Ważewski urodził się 24 września 1896 r. we wsi Wygnanka (powiat Czortków, przedwojenne województwo tarnopolskie), zmarł 5 września 1972 r. w Rabce-Zarytem.

Edukację na poziomie średnim rozpoczął w Przemyślu, następnie w latach 1906–1911 uczęszczał do gimnazjum w Mielcu[1], a w latach 1911–1914 do I Gimnazjum w Tarnowie, gdzie zdał maturę. W latach 1914–1920 studiował na ówczesnym Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Jagiellońskiego, zaczynając od fizyki, by — pod wpływem Stanisława Zaremby — zająć się ostatecznie matematyką. Studia te odbywane były, jak to pisze Ważewski w swym życiorysie zachowanym w Archiwum PAN (Oddział Kraków), „z przerwami wywołanymi służbą wojskową"[2].

Rozwijające się wówczas teoria mnogości i topologia były głównymi polami pierwszych zainteresowań naukowych Ważewskiego, pomimo tego (a może... właśnie dlatego?), że nie uprawiano ich właściwie w Krakowie. Z tego okresu pochodzi najwcześniejsza jego praca ogłoszona drukiem, o pewnym kontinuum osobliwym (por. [8]).

Tadeusz Ważewski kontynuował swe studia we Francji w latach 1921–1923, uzyskując w uniwersytecie paryskim doktorat w r. 1924, na podstawie rozprawy [9] o dendrytach (kontinuach lokalnie spójnych, nie zawierających zamkniętych krzywych pojedynczych). Członkami doktorskiej komisji egzaminacyjnej byli bardzo znani i wybitni (i jak można sądzić — wymagający) matematycy: Borel, Denjoy i Montel[3]. Habilitował się w r. 1927 w Uniwersytecie Jagiellońskim, przedstawiając rozprawę [10] o kontinuach prostowalnych.

Następne prace Ważewskiego dotyczyły już niemal wyłącznie analizy matematycznej, przede wszystkim równań różniczkowych, z tym jednak, że topologia znajdowała w niektórych z nich głębokie i piękne (czasem zaskakujące) zastosowania.

W okresie od 1 października 1920 do 30 kwietnia 1921 r. uczył w Państwowym Gimnazjum im. św. Anny w Krakowie (jako „zastępca nauczyciela"), od 1 sierpnia 1923 do 31 października 1926 r. był asystentem w Akademii Górniczej w Krakowie, od 1 listopada 1926 zaś do 30 września 1933 r. zastępcą profesora w Uniwersytecie Jagiellońskim, następnie profesorem nadzwyczajnym (nominacja ma datę 16 września

---

[1] 31 maja 1998 r. w obecnym I LO im. Stanisława Konarskiego w Mielcu odsłonięto przygotowaną staraniem p. Michała Kurdziela i dyr. Anny Maciejak tablicę upamiętniającą pobyt Tadeusza Ważewskiego w tej szkole.

[2] Zachowała się „legitymacja No 2174", stwierdzająca przydział służbowy sapera Ważewskiego Tadeusza do „Komp. zapas. sap. N. 5" (pieczęć „Kadra 5 Batalionu Saperów") (Archiwum PAN, Oddział w Krakowie, Tadeusz Ważewski, j. 15).

[3] Émile Félix Éduard Justin Borel (1871–1956) stworzył pierwszą efektywną teorię miary i przyczynił się do powstania współczesnej teorii funkcji rzeczywistych. Arnoud Denjoy (1884–1974) zajmował się przede wszystkim teorią funkcji rzeczywistych. Paul Antoine Aristide Montel (1876–1975) główne wyniki uzyskał w teorii funkcji analitycznych zmiennej zespolonej.

1933). Aresztowany 6 listopada 1939 r. podczas hitlerowskiej represyjnej *Sonderaktion Krakau* był więziony wraz z innymi profesorami UJ i AG w obozie koncentracyjnym w Sachsenhausen. Po zwolnieniu z obozu pracował w Szkole Handlowej Męskiej w Krakowie, biorąc równocześnie — niezależnie od tego „oficjalnego" zajęcia — intensywny udział w tajnych, naukowych i dydaktycznych, działaniach Uniwersytetu Jagiellońskiego. W tym wojennym okresie powstały prace naukowe o podstawowym znaczeniu dla pewnego nurtu badań w zakresie równań i nierówności różniczkowych, prowadzonych po wojnie w Polsce, przede wszystkim — ale nie jedynie — w Krakowie. Profesorem zwyczajnym UJ został mianowany we wrześniu 1945 r. i pracował w Uniwersytecie Jagiellońskim do przejścia na emeryturę. Równocześnie z kierowaniem katedrą uniwersytecką, kierował Działem Równań Różniczkowych w powołanym w r. 1949 Państwowym Instytucie Matematycznym, który następnie stał się Instytutem Matematycznym PAN. U początków WSP w Krakowie (która nazywała się wtedy Państwową Wyższą Szkołą Pedagogiczną) pomagał w tworzeniu tam studiów matematycznych, odbywając zajęcia zlecone; prowadził też przez niedługi okres wykłady zlecone w Akademii Handlowej w Krakowie. Zaraz po wojnie został powołany w poczet członków korespondentów Polskiej Akademii Umiejętności oraz Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, a po powstaniu Polskiej Akademii Nauk został jej członkiem korespondentem, by w r. 1958 wejść do grona członków zwyczajnych PAN. W r. 1953 nadano mu stopień naukowy „doktora nauk"[4] (matematycznych), wprowadzony wówczas (wraz z — niższym — stopniem „kandydata nauk") i potrzebny — formalnie — do zajmowania stanowiska profesorskiego. Był Ważewski powoływany do różnych gremiów mających wpływ na rozwój nauki i szkolnictwa wyższego, a w szczególności na rozwój matematyki, i wymagających najwyższych kwalifikacji merytorycznych i moralnych (m.in. do Komitetu Nauk Matematycznych PAN, Komisji Kwalifikacyjnej — pierwowzoru CKK, a teraz Centralnej Komisji do spraw Tytułu Naukowego i Stopni Naukowych — i innych). Był długoletnim redaktorem (wspólnie z Franciszkiem Leją) „Annales de la Société Polonaise de Mathématique", potem „Annales Polonici Mathematici". Polskie Towarzystwo Matematyczne, którego członkiem był od r. 1923, przyznało mu w r. 1948 nagrodę im. Stanisława Zaremby za słynny wynik, znany obecnie jako twierdzenie retraktowe Ważewskiego (w uzasadnieniu odwołano się do pracy [28]), powierzyło mu w r. 1959 na dwuletnią kadencję funkcję prezesa, a w 1967 obdarzyło go godnością członka honorowego. W tym samym 1967 r. otrzymał Ważewski doktorat honorowy Uniwersytetu Jagiellońskiego. Jedna z głównych nagród naukowych Polskiego Towarzystwa Matematycznego nosi teraz imię Tadeusza Ważewskiego. Kraków nadał też jego imię jednej z ulic. Ogromny autorytet, jakim cieszył się Ważewski w środowisku akademickim Krakowa i Polski, był wynikiem nie tylko wielkiego uznania dla jego osiągnięć naukowych o wadze międzynarodowej, ale także — w równym stopniu — niezależności

[4] Funkcjonował ten stopień tylko przejściowo; zniknął niebawem wraz z innymi obcymi naleciałościami.

jego poglądów i przekonań, a gdy było trzeba, odwagi w ich prezentowaniu[5]. Uznanie zasług dla polskiej nauki znajdowało wyraz oficjalny w nadawaniu wysokich odznaczeń państwowych (m.in. Krzyża Komandorskiego Orderu Odrodzenia Polski i Sztandaru Pracy I Klasy) i regionalnych, wyróżnień i nagród (np. Nagrody Państwowej I i II stopnia). W tym kontekście warto może zacytować fragmenty wywiadu, jakiego udzielił Tadeusz Ważewski „Dziennikowi Literackiemu" 30 stycznia 1949 r., po otrzymaniu Nagrody Ziemi Krakowskiej:

> Przyznanie jednej z tegorocznych nagród Ziemi Krakowskiej matematykowi uważam za zaakcentowanie znaczenia ważności matematyki w życiu. Społeczeństwo nie zdaje sobie często sprawy ze znaczenia matematyki. A tymczasem cała przyroda ma oblicze matematyczne. Bez matematyki nie można by dokładnie ująć ilościowo praw przyrody. Szybki rozwój techniki datuje się dopiero od chwili wynalazku rachunku różniczkowego i całkowego. [...] Potrzeby fizyki i techniki wysuwają ustawicznie zagadnienia, do których rozwiązania potrzeba nowych środków matematycznych. Znalezienie tych środków jest zadaniem matematyków. I w tym leży ich rola w życiu społecznym.[6]

Wypowiedź ta — niezależnie od jej „okazjonalności" — w syntetycznej formie przedstawia rzeczywiste poglądy jej autora na bardzo istotną część zadań matematyki i matematyków.

Próbując możliwie zwięźle scharakteryzować działalność naukową Tadeusza Ważewskiego, powtórzmy najpierw, że po początkowym okresie zainteresowania topologią i teorią mnogości w połowie lat 20. zaczął on swe badania koncentrować na zagadnieniach z zakresu analizy matematycznej. W latach 30. poświęcił się niemal wyłącznie równaniom różniczkowym (i pewnym ich uogólnieniom związanym z teorią sterowania optymalnego), zajmując się nimi twórczo do końca życia. Tych zagadnień dotyczyły najważniejsze rezultaty, z których część weszła na stałe do matematyki jako jej fragmenty już klasyczne. Wcześniej jednak uzyskał Ważewski bardzo interesujące wyniki związane z wprowadzonymi przez siebie „jakobianami asymptotycznymi", których zastosowanie pozwoliło na udowodnienie twierdzenia o zmianie zmiennych w całkach pojedynczych i wielokrotnych bez założenia odwracalności transformacji realizujących te zmiany (por. prace [11]–[14]).

Rezultaty uzyskane w pracach [15]–[22] dotyczą równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Ważewski przedstawił twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań problemów Cauchy'ego, a także oszacowania obszaru istnienia rozwiązań, przy czym pewne z tych oszacowań są już nie do poprawienia.

---

[5] Nie należał oczywiście do żadnej partii politycznej, jednak pozycja naukowa i związany z nią prestiż pozwalały na skuteczne działania w sprawach, które w pewnych okresach mogły się wydawać niewykonalne. Dzięki zdecydowanej postawie Ważewskiego Andrzej Turowicz, benedyktyn z Tyńca (zakonne imię Bernard), nie tylko doczekał się zatwierdzenia habilitacji przeprowadzonej w Instytucie Matematycznym PAN w 1963 r., ale w r. 1969 został w tym Instytucie profesorem nadzwyczajnym.

[6] Maszynopis tej wypowiedzi, najwyraźniej przygotowanej osobiście przez Ważewskiego, znajduje się w Archiwum Oddziału Krakowskiego PAN.

Autor rozważa równania typu:

$$(*) \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

gdzie: $y = (y_1,\dots y_n)$ oraz $\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{\partial z}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right)$, a także układy takich równań i pewne nierówności różniczkowe (por. np. [20]).

W pracy [15] podane są bardzo ogólne kryteria jednoznaczności rozwiązań problemów Cauchy'ego dla równań typu (*), przy założeniu, że funkcje po prawych stronach równań spełniają warunek Kamkego, istotnie ogólniejszy od warunku Lispchitza, co zakładało się w klasycznych twierdzeniach o jednoznaczności.

Praca [19] jest pionierska w odniesieniu do układów równań typu przekątniowego.

Niektóre z tych prac poprawiają wyniki publikacji wcześniejszych; jest to jednak taka korekta, które polega na udowodnieniu twierdzenia wzmocnionego w stosunku do poprzedniego (przez osłabienie założeń), ale przy istotnym wykorzystaniu tego wcześniejszego rezultatu. Ma to na przykład miejsce w przypadku pracy [19], która podaje twierdzenie o istnieniu rozwiązań problemów początkowych typu $z(0, y) = \varphi(y)$ dla równań typu (*), przy założeniu, że dane funkcje (a więc f i φ) są klasy C^2, a ich pochodne cząstkowe są ograniczone, oraz pracy [22], która przynosi wzmocnienie tego rezultatu polegające na zastąpieniu regularności klasy C^2 przez założenie istnienia pierwszych pochodnych cząstkowych i spełniania przez nie warunku Lipschitza. Dowód głównego wyniku pracy [22] opiera się na aproksymowaniu funkcji klasy C^1 o pochodnych spełniających stosowne warunki Lipschitza przez funkcje klasy C^2 i na wykorzystaniu twierdzeń o ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych i od prawych stron równań przy wykorzystaniu wyników pracy [19]. Wynik pracy [22] nie może być więc otrzymany bez pracy [19].

Praca [23] zawiera pewien zaskakujący wynik „negatywny". Podaje bowiem konstrukcję równania różniczkowego $y' = f(x, y)$ o prawej stronie f mającej w pewnym obszarze Ω ciągłe pochodne cząstkowe dowolnego rzędu, przy czym każda całka pierwsza klasy C^1 jest w Ω stała; dla takiego równania nie mamy integralnego istnienia całki pierwszej. Zagadnieniom związanym z całkami pierwszymi poświęcił Ważewski jeszcze kilka innych prac.

Tadeusz Ważewski jest autorem podstawowych prac z teorii nierówności różniczkowych: Wprowadził pewne warunki typu monotoniczności funkcji wielu zmiennych, zakładane teraz powszechnie w twierdzeniach o nierównościach różniczkowych (i traktowane jako klasyczne, a więc — z reguły — już bez cytowania prac Ważewskiego w tym kontekście). Fundamentalna praca [24], opublikowana po wojnie, zawiera wyniki uzyskane w znacznej części podczas okupacji niemieckiej i wstępnie zaprezentowane na posiedzeniu Oddziału Krakowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego w dniu 27 marca 1945 r. (por. [25]). Zainspirowała ona cały nurt badań w Krakowie (a potem i w innych ośrodkach), uwieńczony napisaniem przez Jacka Szarskiego pięknej monografii[7].

Najbardziej znane są, jak się wydaje, znaczące wyniki Ważewskiego związane z pewną metodą topologiczną badania przebiegu rozwiązań układów równań różniczkowych, nazywaną metodą retraktową[8] lub — po prostu — metodą Ważewskiego. Podstawowy wynik (w różnych już teraz przedstawianych wariantach) nazywa się twierdzeniem retraktowym Ważewskiego lub krótko — twierdzeniem Ważewskiego. Sam autor tej metody i twierdzenia przedstawił je (też w kilku wariantach) w pracach [26]–[29]. O pracy [28] wspomniano już wyżej jako o podstawie do przyznania Ważewskemu nagrody im. Zaremby, praca [26] przedstawia najpełniejszą prezentację całości idei i szczegółów jej realizacji, praca [29] zaś to streszczenie tekstu plenarnego referatu sekcyjnego, który Tadeusz Ważewski wygłosił na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Amsterdamie w r. 1954, w sekcji analizy, jako zaproszony prelegent.

Metoda retraktowa Ważewskiego pozwala na stwierdzenie, że jeśli wiadomo o pewnych własnościach rozwiązań rozważanego równania różniczkowego na brzegu zadanego obszaru, to niektóre rozwiązania tego równania muszą pozostać w tym obszarze. Przy odwołaniu się do takiej interpretacji rozwiązań, która uznaje je za funkcje dyktujące ruch punktów z upływem czasu, według prawa wynikającego z rozważanego równania czy też układu równań różniczkowych, można powiedzieć, iż ze sposobu zachowania się tych funkcji na brzegu obszaru (a więc ze sposobu dotarcia punktów do brzegu i ewentualnego przecięcia czy też „przekroczenia" brzegu) wynika czasem (w zależności od tego właśnie, jak odbywa się to „przekroczenie" brzegu) istnienie takich punktów, które nigdy tego obszaru nie opuszczą. Wiadomo, że pewien konkretny sposób docierania do brzegu i jego przekraczania (chodzi w szczególności o „silne wychodzenie", a więc „przecinanie" brzegu, „bez poślizgu" na brzegu) gwarantuje istnienie takich punktów, które nigdy rozważanego obszaru nie opuszczą. Należy dodać i mocno podkreślić, iż istotnym dla całego zagadnienia jest — oprócz warunku „silnego wychodzenia" — założenie, że tory punktów bliskich przebiegają blisko siebie; dokładne sformułowanie mówi o c i ą g ł e j z a l e ż n o ś c i pozycji punktów po każdym czasie od ich (tych punktów) położeń początkowych.

Precyzyjne sformułowanie tego twierdzenia w jednej z najprostszych wersji wygląda tak:

Załóżmy, że funkcja rzeczywista f określona na płaszczyźnie jest na tyle regularna, że dla każdego punktu płaszczyzny (x^0, y^0) istnieje dokładnie jedno rozwiązanie problemu początkowego:

[7] Szerzej o tym w eseju o Jacku Szarskim.

[8] Od pojęcia „retraktu", wprowadzonego do matematyki przez wybitnego polskiego geometrę i topologa Karola Borsuka (1905–1982).

$$(**) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x^0) = y^0$$

określone na całej osi liczbowej oraz rozwiązania zależą w sposób ciągły od warunków początkowych. Załóżmy ponadto, że dla dwóch liczb a i b, takich, że $a < b$, spełnione są warunki: $f(x, a) < 0, f(x, b) > 0$ dla wszystkich x. Wtedy, dla każdego x^0 istnieje $y^0 \in (a, b)$ takie, iż jedyne (wysycone) rozwiązanie $\varphi(*; x^0, y^0)$ problemu (**) spełnia podwójną nierówność $a < \varphi(x; x^0, y^0) < b$ dla wszystkich x. Krótko mówiąc: jeśli rozwiązania problemu (**), dotykając brzegu obszaru (pasa) $\boldsymbol{P} := \boldsymbol{R} \times (a, b)$, wychodzą silnie z tego pasa (przecinają jego brzeg pod kątem ostrym), to na każdym odcinku $\{x^0\} \times (a, b)$ znajdzie się taki punkt początkowy, że wychodzące z niego rozwiązanie rozważanego równania nie wyjdzie z pasa $\boldsymbol{P}$. Dowód tego twierdzenia (w takiej najprostszej wersji) jest prawie natychmiastowy i sprowadza się do zauważenia, iż zaprzeczenie tezy prowadzi do sprzeczności z dobrze znaną własnością (zwaną w ł a s n o ś c i ą D a r b o u x) funkcji ciągłych. Sprawa przestaje być tak prosta w przypadku układów równań. Wtedy trzeba posłużyć się bardziej zaawansowanym twierdzeniem mówiącym o tym, iż sfera (czyli brzeg kuli) nie jest r e t r a k t e m kuli. Obserwacja Ważewskiego, oparta na głębokiej intuicji geometrycznej i topologicznej, pozwoliła uzyskać bardzo mocny — jak mówią matematycy — wynik przy użyciu niebanalnego, ale stosunkowo prostego z punktu widzenia interpretacji geometrycznych, podejścia.

Przed zapoznaniem się z komentarzami innych matematyków spróbujmy jeszcze raz spojrzeć na twierdzenie retraktowe poprzez bardzo elementarną (i ogromnie upraszczającą) interpretację podstawowej idei leżącej u jego podstaw. Wyobraźmy sobie, że duże zgromadzenie zasiadające w sali o dwóch wyjściach (powiedzmy: A i B), leżących po przeciwległych stronach tej sali, ma przeprowadzić głosowanie nad pewnym wnioskiem, przy czym głosujący „za" mają oddać głos wychodząc z sali wyjściem A, głosujący zaś „przeciw" — wychodząc wyjściem B. Przyjmujemy, że czynność wyjścia jest „zdecydowana", tzn. jeśli ktoś już zdecydował się i wszedł w drzwi A lub B, to nie wraca do sali. Jeżeli zdarzyłoby się tak, że sąsiedzi (każda para sąsiadów) chcieliby „nie rozrywać więzi sąsiedzkiej", a więc być stale blisko siebie, to w s z y s c y bez wyjątku wyjdą z sali jedynie w wypadku jednomyślności (czyli wtedy, gdy albo wszyscy będą „za", albo wszyscy „przeciw"). W przeciwnym razie, tj. gdy będą co najmniej dwa głosy przeciwne, musi być ktoś, kto — przy tym założeniu „nierozerwalnych więzi sąsiedzkich" — sali nie opuści. Zakończenie głosowania w taki sposób, że część wyjdzie drzwiami A, część drzwiami B, musi spowodować „zerwanie jakiejś więzi sąsiedzkiej": przynajmniej jedna para sąsiadów musi się rozdzielić. Zauważmy, że te „więzi sąsiedzkie", to warunek ciągłości (dokładniej: pewna — dość swobodna — jego interpretacja), o którym była mowa w twierdzeniu. Dodajmy jeszcze na marginesie, że ewentualna interpretacja faktu pozostania w sali jako „wstrzymania się od głosu" nie wydaje się trafna; lepiej mówić, że osoby, które nie wyszły z sali, nie wzięły udziału w głosowaniu. Aby uzasadnić taką propozycję interpretacyjną, zmodyfikujmy założoną sytuację, dodając jeszcze jedno wyjście (C) dla osób, które będą się wstrzymywały od głosu. Opierając się na takiej samej zasadzie jak poprzednio, stwierdzimy, iż jeśli nie będzie jednomyślności (powiedzieć trzeba: a b s o l u t n e j jednomyślności, oznaczającej, że wszyscy wyjdą jednym i tym samym wyjściem), to przy — przypomnijmy — naczelnym założeniu „nierozerwalnych więzi sąsiedzkich", będzie ktoś, kto zostanie w sali, a więc nie będzie ani „za", ani „przeciw", ani nie „wstrzyma się od głosu"; najlepiej więc powiedzieć, że nie brał udziału w głosowaniu.

Metoda retraktowa doczekała się wielu modyfikacji, uogólnień i przeniesień z klasycznej teorii równań różniczkowych zwyczajnych, na potrzeby których została zbudowana przez Ważewskiego, na teorię ogólnych układów dynamicznych, równania cząstkowe, równania różniczkowo-funkcyjne itd. Prace różnych autorów poświęcone tej metodzie, jej zastosowaniom i modyfikacjom, liczyć już można w setki. O jej wadze świadczą opinie wybitnych matematyków. Posłużmy się cytatem z [4] (por. też [3]):

> Metodę retraktową Ważewskiego zalicza się do największych powojennych osiągnięć matematyki polskiej. Solomon Lefschetz, wybitny matematyk amerykański, wypowiedział w 1961 r. opinię, że metoda retraktowa Ważewskiego jest najoryginalniejszym odkryciem w równaniach różniczkowych zwyczajnych, uzyskanym na świecie po wojnie.

Wtedy, gdy ta opinia była wypowiadana, nie wiedziano jeszcze o tym, jaki wpływ na dalszy rozwój jakościowej teorii równań różniczkowych (i wyrosłej z niej teorii ogólnych układów dynamicznych) będzie miał podstawowy pomysł Ważewskiego związany z warunkiem „silnego wychodzenia" rozwiązań przez punkty leżące na brzegach rozważanych obszarów. To, co teraz uzyskuje się w teorii układów dynamicznych przy użyciu różnych metod topologii algebraicznej, stosując w szczególności tzw. bloki izolujące i teorię indeksu Conleya, ma swój początek oparty na idei Ważewskiego. Kilka grup młodych matematyków, również w Krakowie, rozwija tę tematykę, co oznacza także „powrót do źródeł", do idei Ważewskiego ujmowanej teraz ze znacznie wyższego piętra abstrakcji, po zatoczeniu szerokiego koła, poprzez wspomnianą teorię indeksu Conleya, jej uogólnienia i modyfikacje oraz inne wyniki i zastosowania zaawansowanych działów topologii algebraicznej.

Na zakończenie tego wątku dodajmy, że zbiorowe dzieło [1], omawiające i podsumowujące, z obecnej już (lat 90.) perspektywy, najważniejsze rezultaty uzyskane przez matematyków w 1. półwieczu XX stulecia, wymienia wśród nich metodę retraktową Ważewskiego.

W tym samym numerze „Annales de la Société Polonaise de Mathématique" z r. 1947, w którym ukazała się fundamentalna praca o metodzie retraktowej, wydrukowana została też inna praca Ważewskiego [30], poświęcona oszacowaniu obszarów istnienia tzw. funkcji uwikłanych przy użyciu metod równań różniczkowych. Rozważane w związku z tym równanie nosi nazwę r ó w n a n i a W a ż e w s k i e g o; na temat tego równania ukazało się kilka prac różnych autorów (por. w szczególności [2], gdzie znajdują się też informacje bibliograficzne).

W latach 60. opublikował Ważewski serię prac z teorii sterowania, pokazując związki tej teorii z inkluzjami różniczkowymi, których pierwszym badaniom poświęcone były prace S. K. Zaremby (z Krakowa) i A. Marchauda (z Paryża) w latach 30. Wspomniani autorzy używali wtedy innych nazw: równań kontyngensowych i paratyngensowych; sam Ważewski zaproponował termin: równania orientorowe, który teraz już nie jest używany. Z wielu prac na ten temat cytowane są tutaj — przykładowo — jedynie cztery: [31]–[34]. Ostatnia zawiera tekst odczytu plenarnego wygłoszonego na zaproszenie organizatorów międzynarodowej konferencji z serii EQUADIFF w Pradze w r. 1962.

Przy okazji omawiania prac z teorii sterowania zwróćmy uwagę na dwa charakterystyczne rysy twórczości naukowej Tadeusza Ważewskiego. Po pierwsze, jego badania dotyczyły rzeczy ważnych i aktualnych w danym momencie. Połóżmy tu nacisk na fakt, iż chodziło przede wszystkim o rzeczy ważne. Po drugie, Ważewski uważał za naturalne pytania o zastosowania matematyki[9]. Miał intuicję fizyczną i interesował się problemami pochodzącymi z nauk przyrodniczych. Umiał dostrzegać możliwości zastosowań tego, co nieraz od dawna było znane, jako część bardzo — być może — „abstrakcyjnej" teorii. I tak właśnie dostrzegł możliwość zastosowania „starych" wyników z lat 30. (nader na owe czasy „abstrakcyjnych"), dotyczących dziwnych czy nawet — jak wtedy uważali niektórzy — wręcz dziwacznych uogólnień równań różniczkowych, zaproponowanych przez wspomnianych S. K. Zarembę i A. Marchauda, i przystosowania ich do teorii optymalnego sterowania. Jacek Szarski w swym przemówieniu na sesji poświęconej Tadeuszowi Ważewskiemu w listopadzie 1973 r. powiedział: „Żywe zainteresowanie zjawiskami przyrody oraz głębokie przekonanie o tym, że matematyka stanowi język do ich opisu, zadecydowały o tym, że równania różniczkowe stały się główną domeną działalności naukowej Tadeusza Ważewskiego" (por. [7]).

Istotnie, zainteresowania różnymi zastosowaniami już istniejących narzędzi matematycznych oraz — z drugiej niejako strony — problemami przyrodniczymi, które w naturalny sposób mogły sugerować budowę nowych modeli matematycznych, pojawiały się w twórczości naukowej, a także w działalności dydaktycznej Ważewskiego, stale i w widoczny sposób. Interesował się np. matematycznymi aspektami stosowania promieni rentgenowskich. Wypowiadał się na temat stosowania matematyki i związków matematyki z innymi naukami. Były to wypowiedzi różnego ciężaru gatunkowego; oprócz takich, jak cytowana uprzednio z wywiadu w styczniu 1949 r., były obszerne i zasadnicze, takie jak np. artykuł [35]. Ciekawe wypowiedzi Ważewskiego na tematy metodologiczne łączyły się z jego pasją nauczycielską, o czym będzie jeszcze mowa szerzej. W powiązaniu natomiast z zainteresowaniami dotyczącymi zastosowań, warto przytoczyć taką, może nieco zaskakującą, wypowiedź Ważewskiego: „lepiej mieć ogólną metodę niż ogólne twierdze-

[9] Przypomnijmy zacytowane wcześniej fragmenty wywiadu z r. 1949 na temat zadań matematyki i matematyków.

nie". W kontekście, w jakim ta opinia została wyrażona, chodziło przede wszystkim o to, że czasem sprawdzanie założeń bardzo ogólnego twierdzenia, które chcemy zastosować w jakimś konkretnym przypadku, może być bardziej pracochłonne niż posłużenie się ogólną metodą i udowodnienie bezpośrednio stosownego, potrzebnego wariantu tego ogólnego twierdzenia, przydatnego do rozważanego konkretnego przypadku. Chodziło zapewne i o to, że podchodząc do zagadnienia z punktu widzenia elegancji rozumowania, nie powinno się używać zbyt skomplikowanej maszynerii, zbyt zaawansowanych środków tam, gdzie można posłużyć się bardziej elementarnymi. Ale chodziło także na pewno i o to, że myśląc o zastosowaniach, dobrze mieć dostatecznie elastyczną metodę postępowania, i to może nie tyle zamiast, ile — niezależnie od sformalizowanych wyników, których ewentualne modyfikacje mogą być stymulowane zagadnieniami przyrodniczymi, a osiągane właśnie przez stosowanie ogólnej metody.

Do nurtu bliskiego z jednej strony zastosowaniom, z drugiej zaś ujmowaniu problemów poprzez możliwie ogólne metody, można zaliczyć zagadnienia dotyczące metody kolejnych przybliżeń w różnych jej wariantach. W pracach [36] i [37] udowodnione są twierdzenia o zbieżności ciągów kolejnych przybliżeń bez użycia szeregów porównawczych, a więc metodą inną niż klasyczna. Okazało się, że metoda Ważewskiego nadaje się do pewnych istotnych uogólnień, którym nie poddaje się ta klasyczna. W pracy [38] przeanalizowano związek między zbieżnością do zera różnicy między kolejnymi wyrazami ciągu przybliżeń i zbieżnością (do rozwiązania omawianego problemu) samego ciągu. Implikacja w jedną stronę jest oczywista, w drugą zaś ma miejsce przy pewnych dodatkowych założeniach (w tym jednoznaczności a priori, ale bez zakładania istnienia rozwiązania[10]). Podejście Ważewskiego (zaproponowanie ogólnej metody!) zaowocowało wieloma zastosowaniami w pracach innych autorów. Miało też znaczenie metodologiczne w odniesieniu do zagadnień całkiem elementarnych.

Jeszcze jednego przykładu problemów, których rozwiązanie dało nie tylko interesujący wynik naukowy, ale i ważną obserwację metodologiczną, dostarcza praca [39], w której podano ogólny dowód tzw. reguły de l'Hospitala, wspólny dla wszystkich przypadków, w jakich ta reguła jest stosowana. Podobnie aspekty metodologiczne wraz z interesującymi rezultatami naukowymi, przedstawiają prace [42] i [43].

Prace [40] i [41] zawierają wyniki dotyczące wprowadzonego przez Ważewskiego pojęcia asymptotycznej koincydencji rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych. Okazało się ono bardzo użyteczne w badaniach z zakresu jakościowej teorii tych równań. Zajmowali się nim potem inni matematycy.

Przedstawiony powyżej, z konieczności daleki od kompletności i bardzo ogólny, zarys głównych nurtów i wybranych osiągnięć naukowych Tadeusza Ważewskiego opracowano, opierając się m.in. na artykułach [3]–[7][11]. Lista publikacji Ważew-

[10] Co oznacza, że wiemy, iż jeśli istnieje rozwiązanie, to jest jedyne, ale nie zakładamy, że ono istnieje.

[11] Artykuł [6] stanowi zresztą podstawę niniejszego opracowania także i w dalszej jego części.

skiego liczy 129 pozycji; tutaj zacytowano 36. Nie doczekał się, niestety, realizacji zamysł wydania podręcznika równań różniczkowych (zachowany rękopis zawiera tylko początek projektowanej książki).

Wspomniano o pasji dydaktycznej Tadeusza Ważewskiego. Trzeba tu powiedzieć, że pasja ta szła w parze z ogromnym talentem z tym zakresie, ze wspaniałą umiejętnością prowadzenia wykładów i seminariów. I z wielkim zaangażowaniem w ich przygotowanie. Wyjątkowe znaczenie przywiązywał Ważewski do wyrabiania wyobraźni i intuicji fizycznej oraz geometrycznej. Zachowały się rękopiśmienne notatki zawierające elementarny wstęp do jakiegoś wykładu (zapewne analizy lub też może ogólnego wykładu dla nauczycieli matematyki). Jest tam najpierw mowa o nierównościach między liczbami, o przedziałach i o przyporządkowywaniu liczbom punktów na prostej. Warto przytoczyć obszerny fragment tych notatek (w cytacie zachowuje się podkreślenia z oryginału):

> Mogłoby się wydawać, że używanie wyrazu punkt, wtedy gdy się ma na myśli liczbę, jest wynikiem jakiegoś dziwacznego kaprysu powodującego tylko trudności. Tak jednak nie jest. Trudno **jednym chwytem myśli** ująć wszystkie liczby należące do przedziału [1, 3]. Jeżeli jednak narysujemy odcinek [B, C] będący odpowiednikiem geometrycznym tego przedziału (zob. rys. poprzedni[12]), to **jednym ruchem oka** możemy przebiec przez wszystkie **punkty** tego odcinka. W ten sposób uzyskujemy jasny obraz zbioru liczb, które odpowiadają tym punktom. Rysunek lepiej bowiem przemawia do naszej wyobraźnie niż pojęcie czysto liczbowe. **Pojęcia czysto liczbowe stają się dla nas bardziej przystępne i zrozumiałe, gdy je zobaczymy na rysunku.** Dlatego tzw. **interpretacja geometryczna** [...] różnych pojęć matematycznych ma ogromne znaczenie w matematyce.[13]

Pamiętający wykłady Ważewskiego mogą przytaczać dziesiątki przykładów zaskakujących niejednokrotnie pomysłowością, trafnością i sugestywnością interpretacji geometrycznych, fizycznych (i różnych innych[14]), służących wyrabianiu intuicji słuchaczy i stymulujących ich samodzielne poszukiwania. Wyjątkowemu darowi jasnego wykładu, a więc talentowi dydaktycznemu „na poziomie studenckim", towarzyszyła niezwykła umiejętność (oparta na własnych dokonaniach naukowych) takiego stawiania problemów badawczych, że będąc wysoce niebanalnymi, dawały się rozwiązać. Przy rozwiązywaniu tych problemów trzeba się było napracować i — powiedziałbym — „sprężyć", ale wysoko ustawioną poprzeczkę udawało się z reguły pokonać. Bo była ona ustawiona na miarę tego, który ją atakował. Sukces był więc realny, ale nie banalny; jako osiągany z trudem dawał prawdziwą satysfakcję.

Ważewski był Mistrzem bardzo wymagającym, ale najwięcej wymagał od siebie i to było jasno wyczuwalne przez uczniów. I jeszcze jedno: Mistrz w sposób widoczny cieszył się sukcesami uczniów, a to sprawiało im podwójną satysfakcję.

---

12 Odesłanie do wcześniej zrobionego, odręcznego, rysunku, na którym $B = 1$, $C = 3$.

13 Archiwum Oddziału Krakowskiego PAN (materiały profesora Ważewskiego).

14 Zaprezentowane wyżej opowiadanie o głosowaniu przez wychodzenie z sali naśladuje jedną z interpretacji metody retraktowej, którą swego czasu przedstawił Ważewski.

Ważewski wymagał solidności, co zrozumiałe, od swych uczniów. Oczekiwał też, a może jednak lepiej i tu powiedzieć — wymagał — solidności od wszystkich, z którymi się stykał na płaszczyźnie intelektualnej, w pierwszym rzędzie od matematyków. Nie godził się na grę pozorów. Po pewnym odczycie, który miał tytuł *Z filozoficznych podstaw...* (tu była nazwa pewnej teorii), Ważewski zadał zasadnicze pytanie: „Po czym poznać, że w pewien sposób traktowany temat jest filozoficzny?" Było to pytanie ostre, ale zadane z pozycji potencjalnego partnera w ewentualnej debacie (nie przeciwnika!) i chyba bardzo pożyteczne zarówno dla audytorium, jak i dla samego prelegenta, gdyż w trakcie dyskusji wydobyto naturę rzeczy i uratowano wartościową część treści referatu, odsuwając od niej zbyteczne ornamenty i pozory. Gdy szło o precyzję sformułowań w tekstach już nie tyle matematycznych (w których brak precyzji dyskwalifikuje je z góry), ile w tekstach o matematyce w ogóle czy też o pewnych metodach matematycznych, Ważewski zabierał głos zdecydowanie i, wypowiadając się na takie tematy, okazywał temperament polemisty[15]. Zawsze chodziło o nazwanie rzeczy po imieniu, o to, by jakaś ozdobna fasada nie zasłaniała tego, co istotne, albo — co gorsza — nie zasłaniała... braku rzeczy istotnych. Nie oznacza to jednak oczywiście lekceważenia formy. Wręcz przeciwnie, do eleganckiej i atrakcyjnej formy przywiązywał Ważewski wielką wagę zarówno w odniesieniu do tekstów pisanych, jak i mówionych, zarówno do wszystkich wykładów ściśle matematycznych (dla matematyków i — zwłaszcza — dla słuchaczy nie będących matematykami[16]), jak i do wypowiedzi na inne tematy. Forma, nawet najatrakcyjniejsza, nie mogła jednak pokrywać braku treści.

Ważewski stworzył taką atmosferę w gronie swych uczniów i współpracowników, że niemal namacalnie czuło się bezpośredniość relacji Mistrz-uczeń, opartej na wielu naturalnych elementach, wśród których wzajemne zaufanie było jednym z najważniejszych.

Pozwolę sobie na bardzo osobiste wspomnienie dotyczące specjalnego doświadczenia z okresu po zakończeniu mego „terminowania". Chyba każdy z uczniów Ważewskiego może przypomnieć sobie taki okres, krótszy lub dłuższy, w którym nie tylko każda praca naukowa była sprawdzana przez Mistrza, ale także i zwykłe pisma urzędowe czy półurzędowe (sprawozdania, podania itp.) należało — lub co najmniej: dobrze było — przedstawić do aprobaty albo przynajmniej „do wiadomości". Po tym okresie — powiedziałbym „po wyzwoleniu", mając na myśli analogię do klasycznego „wyzwolenia czeladnika" — cieszyć się już było można naprawdę pełnym zaufaniem Profesora. Pamiętam, że gdy mając już, jak — chyba słusznie —

[15] Bywało i tak, że z ciętą uwagą mogła się spotkać redakcja ingerująca w teksty jego prac. W liście do Redakcji „Biuletynu PAN" (15 III 1960), Ważewski protestuje przeciw pominięciu znaku paragrafu § i dodaje: „Nie znam powodów dyskryminacji znaku § w naszym piśmiennictwie matematycznym. Byłbym zobowiązany za łaskawe wyjaśnienie mi, przy sposobności, powodów tego faktu".

[16] Adiunkt rozpoczynający wykład z matematyki dla biologów usłyszał od Profesora: „taki wykład trzeba prowadzić na oklaskach!"

uważałem, okres „terminowania" za sobą, przedstawiałem Profesorowi sukcesywnie serię prac, które on kierował do „Biuletynu PAN" bez recenzji wydawniczej, do czego miał prawo jako członek Akademii. Okazało się, co więcej, że przedstawiał je, sam ich nie czytając. Był to oczywiście dowód wielkiego zaufania. Gdy więc stwierdziłem pewnego dnia, że w jednej z tych prac jest luka (dowód pewnego lematu, czyli pomocniczego twierdzenia, był źle poprowadzony), byłem ogromnie zaambarasowany. Poszedłem z drżeniem serca do Profesora i przyznając się do błędu, byłem przekonany o konieczności powrotu, na jakiś czas, do statusu „terminatora" (byłem wtedy dość młody). A spotkała mnie taka mniej więcej uwaga: „Zdarza się; trzeba w najbliższej pracy skierowanej do «Biuletynu» zamieścić erratę". I to było wszystko. Ale to było bardzo dużo. Trudno sobie wyobrazić ważniejsze zobowiązanie na przyszłość. Także i w taki sposób kształtował Ważewski postawy swych uczniów, z których stworzył krakowską szkołę równań różniczkowych.

Mówiąc o indywidualnej pasji dydaktycznej Tadeusza Ważewskiego i jego talentach w tym zakresie uzewnętrznianych wobec uczniów na każdym poziomie, od studentów pierwszych lat studiów począwszy, po doktorantów i habilitantów, trzeba koniecznie dodać, iż wszystko to było niejako zanurzone w ogólnym przeświadczeniu, że uniwersytet musi łączyć w naturalny sposób funkcje badawcze i nauczycielskie, że powołaniem uniwersytetu jest poznawanie i przekazywanie prawdy. Mając w pamięci troskę Ważewskiego o precyzję nauczania, czystość przekazu wykładanego materiału oraz dociekliwość, umiejętność wydobywania natury rozważanych problemów i jasne dążenie do poznania prawdy przez nie niesionej, można bez obawy o przesadny patos powiedzieć, że jego działalność akademicka była piękną i skuteczną realizacją tak pojętej idei uniwersytetu. „Całe Jego życie stanowi przykład na to, że badania naukowe i nauczanie są ze sobą organicznie związane i nie mogą być sztucznie rozdzielone" — powiedział Jacek Szarski w cytowanym już uprzednio przemówieniu [7], kontynuując następnie: „Seminaria Ważewskiego odznaczały się zupełnie specyficzną atmosferą głębokiej i wnikliwej analizy rozważanych zagadnień, a z drugiej strony niezwykle swobodnej dyskusji i wymiany myśli, przetykanej nierzadko ciętym i finezyjnym dowcipem".

Skoro powiedziano tutaj o dowcipie, warto odnotować pewien znamienny szczegół. Ważewski był obdarzony świetnym poczuciem humoru, dopuszczał dowcipy na wiele tematów, z żartami „typu personalnego" włącznie (ale, oczywiście, z naturalnymi ograniczeniami, które wyznacza poczucie dobrego smaku i zasada, iż nie można nikomu robić przykrości). Nie tolerował jednak anegdot i dowcipów na temat Stanisława Zaremby, swego mistrza. Nie znałem osobiście Stanisława Zaremby, który zmarł w r. 1942, ale wiem z opowiadań tych, którzy się z nim zetknęli, że wielki matematyk był osobą wspaniale nadającą się na bohatera kapitalnych, zresztą z reguły bardzo ciepłych i dość niewinnych, anegdot. Ale, powtarzam, nie były one tolerowane przez Ważewskiego. Sądzę, że to mówi samo za siebie. To zaś, co i jak mówią uczniowie Ważewskiego o swoim Mistrzu, najlepiej przedstawić cytując dwa ostatnie akapity z opracowania [4]: „Ważewski był człowiekiem o rzadkich zaletach charakteru. Delikatny i nieśmiały, był równocześnie niezłomny i twardy w pełnieniu wziętych na siebie najtrudniejszych zadań. Umiał wybrać prawdę, którą można było powiedzieć, i prawdę, którą należało powiedzieć. Cechą jego natury było organiczne połączenie dobroci z mądrością. Mało żądał dla siebie, hojnie obdarzał innych. W obcowaniu z ludźmi był człowiekiem ujmująco czarującym. Z precyzji myśli krytycznej płynął szczególny wdzięk jego dowcipu. Wrażliwy na osiągnięcia nauki i sztuki, dociekliwość swą i energię skierował na matematykę i ona był pasją jego życia. W sercach tych, którym dane było z Nim współpracować i czerpać z nieograniczonej dobroci i wiedzy, na zawsze pozostanie niedoścignionym wzorem".

Bibliografia

Wykorzystano dokumenty znajdujące się w: Archiwum UJ, Archiwum Instytutu Matematyki UJ, Archiwum PAN w Krakowie, Archiwum Instytutu Matematycznego PAN w Warszawie, Archiwum Państwowym w Krakowie — Oddział w Tarnowie, I LO w Mielcu, zbiorze dokumentów p. Michała Kurdziela z Mielca, archiwum własnym autora.

[1] *Development of Mathematics 1900–1950*, ed J.-P. Pier, Basel–Boston–Berlin 1994.

[2] C. Olech, *On the Ważewski Equation. Proceedings of the Conference „Topological Methods in Differential Equations and Dynamical Systems"*, „Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica" 36, 1998, s. 55–64.

[3] C. Olech, J. Szarski, Z. Szmydt, *Tadeusz Ważewski (1896–1972)*, „Annales Polonici Mathematici" 29, 1974, s. 1–13.

[4] C. Olech, J. Szarski, Z. Szmydt, *Tadeusz Ważewski (1896–1972)*, „Wiadomości Matematyczne" 20, 1976, 55–62.

[5] C. Olech, A. Pelczar, Z. Szmydt, *Tadeusz Ważewski*, [w:] T. Ważewski, *Selected Papers*, Warszawa 1990, s. VII-VIII.

[6] A. Pelczar, *Tadeusz Ważewski — uczony i nauczyciel*, X Szkoła Historii Matematyki [materiały], „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Opolskiego. Matematyka" 30, 1997, s. 131–139.

[7] J. Szarski, *Przemówienie na Sesji Naukowej poświęconej pamięci Profesora Tadeusza Ważewskiego*, „Wiadomości Matematyczne" 20, 1976, s. 64–65.

[8] T. Ważewski, *Sur un continu singulier*, „Fundamenta Mathematicae" 4, 1923, s. 214–145.

[9] T. Ważewski, *Sur le courbes de Jordan ne renfermant aucune courbe simple fermée de Jordan*, „Thèse présente à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris" 35, 1923 oraz: „Annales de la Société Polonaise Mathématique" 2, 1923, s. 49–170.

[10] T. Ważewski, *Kontinua prostowalne w związku z funkcjami i odwzorowaniami absolutnie ciągłymi*, dodatek do „Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego" 1927, s. 9–49.

[11] T. Ważewski, *Sur les jacobiens généralisés. Compte Rendus du premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves*, Warszawa 1929, s. 210–213.

[12] T. Ważewski, *O zmianie zmiennych w całkach pojedynczych* [*Un théorem sur le changement de variable dans intégrales simples*], „Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles", Série A, 1929, s. 203–211.

[13] T. Ważewski, *Sur le changement de variable dans une intégrale simple*, „Annales de la Société Polonaise Mathématique" 7, 1928, s. 273 [sprawozdania z posiedzeń PTM w Krakowie w dniach 26 VI i 20 X 1928].

[14] T. Ważewski, *O jakobjanach asymptotycznych i zmianie zmiennych w całkach wielokrotnych* [*Sur les jacobiens asymptotiques et la changemenet de variables dans les intégrales multiples*], „Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles", Série A, 1930, s. 249–299.

[15] T. Ważewski, *Sur l'unicité et la limitation des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, „Atti della Accademia Nazionale dei Lincei" 1933, s. 372–376.

[16] T. Ważewski, *O zasięgu całek równań cząstkowych rzędu pierwszego*, [w:] *Pamiętnik XIV Zjazdu Lekarzy i Przyrodników w Poznaniu, 11–15 IX 1934*, 1, s. 187–194.

[17] T. Ważewski, *Sur le domaine d'existence des intégales de l'équation aux dérivées patielles du premier ordre*, „Annales de la Société Polonaise Mathématique" 13, 1934, s. 1–9.

[18] T. Ważewski, *Sur l'équation aux dérivées partielles du premier ordre essentiellement non-linéaire*, „Annales de la Société Polonaise Mathématique" 13, 1934, s. 10–12.

[19] T. Ważewski, *Sur l'appréciation du domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*, „Annales de la Société Polonaise Mathématique" 14, 1935, s. 149–177.

[20] T. Ważewski, *Sur l'unicité et la limitation des intégrales de certaines systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Mat. Pura Appl., Sér. IV, 15, 1937, s. 155–158.

[21] T. Ważewski, *Sur le problème de Cauchy rélatif à un système d'équations aux dérivées partielles*, „Annales de la Société Polonaise Mathématique" 15, 1936, s. 101–127.

[22] T. Ważewski, *Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung*, „Mathematische Zeitschrift" 43, 1938, s. 522–532.

[23] T. Ważewski, *Sur un problème de caractère intégral relatif à l'équation* $\delta z/\delta tx + Q(x, y)\delta z/\delta y = 0$ „Mathematica" (Cluj) 8, 1933, s. 103–116.

[24] T. Ważewski, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, „Annales de la Société Polonaise Mathématique" 23, 1950, s. 112–166.

[25] T. Ważewski, *Sur un système d'inégalités différentielles*, „Annales de la Société Polonaise Mathématique" 18, 1945, s. 158–159.

[26] T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentiells ordinaires,* „Annales de la Société Polonaise Mathématique" 20, 1947, s. 279–313.

[27] T. Ważewski, *Sur les intégrales asymptotiques des équations différentielles ordinaires*, „Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie", Classe III, 1947, s. 38–42 (22 III 1947).

[28] T. Ważewski, *Une méthode topologique de l'examen du phénomène asymptotique relativement aux équations différentielles ordinaires*, „Atti della Accademia Nazionale dei Lincei", Ser. VIII, III, 1947, s. 210–215.

[29] T. Ważewski, *Sur une méthode topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles*, [w:] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954*, 3, 1956, s. 5–14.

[30] T. Ważewski, *Sur l'évaluation du domiane d'existence des fonctions implicites réelles ou complexes*, „Annales de la Société Polonaise Mathématique" 20, 1947, s. 81–120.

[31] T. Ważewski, *Systèmes de comande et équations au contingent*, „Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences", Séries: „Sciences Mathémathiques, Astronomiques et Physiques" 9, 1961, s. 151–155.

[32] T. Ważewski, *Sur une généralisation de la notion des solutions d'une équation au contingent*, „Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences", Séries: „Sciences Mathémathiques, Astronomiques et Physiques" 10, 1962, s. 11–15.

[33] T. Ważewski, *Sur quelques définitions équivalentes des quasitrajectoires des systèmes de commande*, „Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences", Séries: „Sciences Mathémathiques, Astronomiques et Physiques" 10, 1962, s. 469–471.

[34] T. Ważewski, *On an optimal control problem (in connection with the theory of orientor fields of A. Marchaud and S. K. Zaremba)*, [w:] *Differential Equations and their Applications. Proceedings of the Conference hekld in Prague in September 1962*, Praha 1963, s. 229–242.
[35] T. Ważewski, *O matematyce i jej związku z naukami innymi*, Katowice 1947, s. 11–37.
[36] T. Ważewski, *Sur une extension du procédé de I. Jungermann pour établir la convergence des approximations successives au cas des équations différentielles ordinaires*, „Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences", Séries: „Sciences Mathémathiques, Astronomiques et Physiques" 8, 1960, s. 43–46.
[37] T. Ważewski, *Sur un procédé de prouver la convergence des approximations successives sans utilisation des séries de comparison*, „Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences", Séries: „Sciences Mathémathiques, Astronomiques et Physiques" 8, 1960, s. 47–52.
[38] T. Ważewski, *Sur la convergence des approximations successives pour les équations différentielles ordinaires au cas de l'espace de Banach*, „Annales de la Société Polonaise Mathématique" 16, 1965, s. 231–235.
[39] T. Ważewski, *Quelques démonstrations uniformes pour tous les cas du théorème de l'Hospital*, „Prace Matematyczno-Fizyczne" 47, 1949, s. 117–128.
[40] T. Ważewski, *O koincydencji asymptotycznej całek dwóch układów równań różniczkowych* [*Sur la coïncidence asymptotique des intégrales des deux systèmes d'équations différerntielles*], „Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles", Série A, 1949, s. 147–150.
[41] T. Ważewski, *Sur certaines conditions de coïncidence asymptotique des intégrales de deux systèmes d'équations différentielles*, „Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie", Classe III, 42, 1949, s. 198–203.
[42] T. Ważewski, *Pewne uogólnienie twierdzenia o przyrostach skończonych na przypadek przestrzeni abstrakcyjnych. Zastosowania* [*Une généralisation des théorèmes sur les accroissement finis au cas des especes abstraits. Applications*], „Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles", Série A, 1949, s. 183–185.
[43] T. Ważewski, *Pewien sposób wyprowadzania wzorów na pochodną agregatu, iloczynu i ilorazu dwóch funkcji*, „Matematyka" 3 (5), 1949, s. 30–35 oraz 4 (6), 1949, s. 35–38.

Andrzej Pelczar