11

PODSTAWOWE MODELE WZROSTU GOSPODARCZEGO W TEORII EKONOMII

(Katarzyna Filipowicz, Tomasz Tokarski)

Przedmiotem rozważań w niniejszym rozdziale są teoretyczne analizy opisujące determinanty zróżnicowania wydajności pracy na gruncie wybranych, makroekonomicznych modeli wzrostu gospodarczego.

Zaprezentowano podstawowe, keynesistowskie, modele wzrostu gospodarczego (Harroda, Domara, Harroda-Domara, Kaldora i Kaleckiego), neoklasyczne modele Solowa, Mankiwa-Romera-Weila i Nonnemana-Vanhoudta oraz modele optymalnego sterowania Lucasa i Romera. Podstawowe idee modelu Solowa łączy się z występowaniem przestrzennych interakcji rozwoju ekonomicznego między gospodarkami, przez analogię do prawa powszechnej grawitacji Newtona, kwantyfikowanych za pomocą tzw. efektów grawitacyjnych. Zakłada się, że gospodarki wzajemnie oddziałują na siebie z siłą wprost proporcjonalną do ich potencjału ekonomicznego i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości pomiędzy nimi. Potencjał gospodarki mierzony jest zaś wielkością technicznego uzbrojenia pracy.

Alternatywne modele wzrostu gospodarczego opisują też m.in. Robert J. Barro, Xawier Sala-i-Martin (1995), David Romer (1996), Philippe Aghion, Peter Howitt (1998), Daren Acemoglu (2009), Krzysztof Malaga (2011, 2013) lub Sylwia Roszkowska (2013).

Prekursorami teorii wzrostu gospodarczego są znani w historii myśli ekonomicznej: Adam Smith, David Ricardo, Thomas Malthus, John S. Mill, Karol Marks, Alfred Marshall czy Joseph A. Schumpeter (Domar 1962: 52–53; Solow 1988: 307 oraz Barro, Sala-i-Martin 1995: 9–10). Pierwsze sformalizowane matematycznie modele wzrostu gospodarczego powstają w XX w., jak model amerykańskiego matematyka Franka Ramseya z 1928 r., do którego bezpośrednio lub pośrednio nawiązują współczesne modele optymalizacyjne (Barro, Sala-i-Martin 1995; Makarski, Pońsko, Weretka, Winek 1998; Roszkowska 2004, 2013 lub Krawiec, Szydłowski 2004: 50–53), oraz model z lat 1927 i 1928 radzieckiego ekonomisty Grigorija A. Feldmana, którego wysoko cenił Evsey D. Domar i do którego się odwołuje (Domar 1962 oraz Bródy 1991: 25)[1].

[1] Punkt ten w znacznej mierze oparty jest na pracy: Tokarski 2001.

Evsey D. Domar twierdzi:

> Wzrost zajmował w teorii ekonomii dziwne miejsce: zawsze dostrzegano go w pobliżu, dokoła, ale rzadko zapraszano go do środka. Albo traktowano go jako coś z góry przesądzonego, albo też niejednokrotnie był on dopiero refleksją *ex post*. Przez cały czas żwawo posuwaliśmy się naprzód dyskutując na temat zatrudnienia i inwestycji, procentu i zysków, akumulacji kapitału, cyklów koniunkturalnych i wielu innych fascynujących problemów, które wymagają w oczywisty sposób wyraźnego zastosowania stopy wzrostu, a dla których staraliśmy się niezmiernie przemyślnie szukać gotowych rozwiązań w teoretycznej krainie czarów (Domar 1962: 51).

Powstałe na gruncie makroekonomii keynesistowskiej kompleksowe analizy Roya F. Harroda (1939, 1942), Evseya D. Domara (1962), Nicolasa Kaldora (1971) i Michała Kaleckiego (w odniesieniu do gospodarki socjalistycznej; 1963, 1970) na trwałe wprowadzają teorię wzrostu gospodarczego do współczesnej makroekonomii. Modele neoklasyczne to model Roberta M. Solowa (1956), złote reguły akumulacji kapitału Edmunda S. Phelpsa (1961, 1966), model N. Gregory'ego Mankiwa, Davida Romera, Davida N. Weila (1992) czy Waltera Nonnemana, Patricka Vanhoudta (1996).

W latach 80. XX w. powstaje tzw. szkoła realnego cyklu koniunkturalnego, która łączy teorię wzrostu gospodarczego z teorią cyklu koniunkturalnego oraz z modelami nawiązującymi do koncepcji równowagi ogólnej Leona Walrasa. W drugiej połowie lat 80. XX w. pojawiają się także modele wzrostu endogenicznego, w których usiłuje się rozszerzyć neoklasyczny model Solowa i endogenizuje się zarówno postęp techniczny, jak i stopy oszczędności/inwestycji w ujęciu makroekonomicznym. Do modeli wzrostu endogenicznego (nazywanych dalej również modelami optymalnego sterowania) można zaliczyć m.in. modele optymalnego sterowania Roberta E. Lucasa (1988) i Paula M. Romera (1986, 1990).

Keynesistowskie modele wzrostu gospodarczego

John M. Keynes znany jest jako twórca nowej, stworzonej w okresie międzywojennym, teorii makroekonomicznej. Porównując keynesistowskie modele wzrostu, Janusz Górski i Witold Sierpiński piszą:

> Z teorią Keynesa, która jest ich punktem wyjścia, musimy zwrócić uwagę przede wszystkim na to, że teorie te szerzej niż Keynes ujmują wpływ inwestycji na procesy gospodarcze. Dla Keynesa inwestycje były przede wszystkim czynnikiem tworzącym popyt i tylko w ten sposób oddziaływały na poziom dochodu narodowego. (...) Teorie wzrostu ujmują natomiast inwestycje szerzej, badając także ich wpływ na rozszerzenie

potencjału produkcyjnego społeczeństwa[2]. Powstanie teorii wzrostu gospodarczego jest więc pewnym logicznym wyciągnięciem wniosków z teorii Keynesa. Jeśli bowiem zaczniemy prowadzić analizę w okresach nieco dłuższych, dostrzeżenie podażowego efektu inwestycji jest czymś dość oczywistym (Górski, Sierpiński 1972: 389; Górski 1967: 403–404).

Należy zaznaczyć, że keynesistowskie modele wzrostu powstają pod silnym wpływem wielkiego kryzysu lat 30. XX w. i szczególnie mocno akcentują niedostosowania popytowych i podażowych czynników determinujących wzrost gospodarczy. Uwzględniając fakt, że w keynesistowskich modelach wzrostu występuje niemal zerowa substytucja nakładów kapitału i pracy w procesie produkcyjnym, należy wnioskować, że gospodarka kapitalistyczna jest ciągle zagrożona stanem permanentnej nierównowagi. Zagrożenie to polega na niepełnym wykorzystaniu zdolności produkcyjnych gospodarki, co stosunkowo szybko zostaje zaakceptowane przez makroekonomię keynesistowską, zwracającą szczególną uwagę na ów problem (Barro, Sala-i-Martin 1995: 10).

Pierwszy keynesistowski model wzrostu gospodarczego, który na trwałe wchodzi do historii myśli ekonomicznej, opracował Roy F. Harrod (1939, 1942) na podstawie analizy dwóch stóp wzrostu gospodarczego: tzw. gwarantowanej stopy wzrostu oraz naturalnej stopy wzrostu gospodarczego. Gwarantowana stopa wzrostu G_W wynika z równowagi oszczędności i inwestycji oraz z wpływu realizowanych nakładów inwestycyjnych na możliwości produkcyjne gospodarki i jest ilorazem stopy oszczędności s $\in (0;1)$ (udziału oszczędności w produkcji) oraz współczynnika kapitałochłonności $v_K = \frac{K}{Y}$ (gdzie K oznacza zasób kapitału w gospodarce, zaś Y – strumień wytworzonego produktu), co można zapisać w równaniu $G_W = \frac{s}{v_K}$ (Gandolfo 1971: 41–43; Bródy 1991: 22). Naturalna stopa wzrostu G_N wynika zaś ze wzrostu liczby pracujących oraz postępu technicznego i jest sumą stopy wzrostu liczby pracujących $n > 0$ oraz stopy wzrostu wydajności pracy $g > 0$, co można zapisać jako $G_N = n + g$ (Górski 1967: 419–420; Górski, Sierpiński 1972: 401–410).

Gospodarka Harroda jest w stanie długookresowej równowagi, gdy gwarantowana stopa wzrostu równa jest stopie naturalnej, co można zapisać jako $\frac{s}{v_K} = g + n$.

Stopa wzrostu liczby pracujących i stopa postępu technicznego w modelu Harroda to zmienne egzogeniczne, natomiast współczynnik kapitałochłonności w modelach keynesistowskich jest stały w czasie, zatem by gospodarka Harroda znajdowała się w stanie długookresowej równowagi, stopa oszczędności musi się kształtować na poziomie $s = v_K(g + n)$. Zbyt wysoka stopa oszczędności [czyli $s > v_K(g + n)$] powoduje, że opisująca podażowe możliwości gospodarki

[2] Ani w keynesowskim modelu mnożnika, ani w modelu IS-LM Johna R. Hicksa (będącym rozwinięciem modelu mnożnika Keynesa) nie uwzględnia się podażowych efektów realizowanych nakładów inwestycyjnych.

gwarantowana stopa wzrostu jest wyższa od stopy naturalnej. Oznacza to, że w gospodarce część występującego potencjału produkcyjnego jest niewykorzystana na skutek zbyt niskiego efektywnego popytu. Jeśli zaś $s < v_K(g + n)$, to $G_W < G_N$ i wystąpi sytuacja odwrotna. Zdaniem Harroda stopa oszczędności w gospodarce kapitalistycznej kształtuje się żywiołowo, zatem długookresowa równowaga (bez interwencji państwa) może być tylko wynikiem szczególnego zbiegu okoliczności, a odchylenia od tej równowagi mogą być przyczyną stagnacji sekularnej (GÓRSKI, WITOLD 1972: 406–410).

Evsey D. Domar przyjmuje założenia, że[3]:

1) Popyt na rynku produktu $Y^d(t)$ w ciągłym czasie $t \in [0; +\infty)$ zależny jest od egzogenicznych inwestycji netto $I(t)$, zgodnie z formułą keynesowskiego mnożnika $Y^d = \frac{1}{s} I$, gdzie $s \in (0;1)$ jest krańcową, równą przeciętnej, skłonnością do oszczędności, co oznacza, że $1/s$ jest keynesowskim mnożnikiem inwestycyjnym.
2) Inwestycje prowadzą także do efektów po stronie zagregowanej podaży w gospodarce, a zależność pomiędzy bieżącymi nakładami inwestycyjnymi netto i przyrostem podażowych możliwości gospodarki[4] $\dot{Y}^s$ opisuje równanie $\dot{Y}^s = \kappa I$, gdzie $\kappa > 0$ jest „potencjalną społecznie przeciętną efektywnością inwestycji" (DOMAR 1962: 124–141; GÓRSKI 1967: 410–419; GÓRSKI, SIERPIŃSKI 1972: 390–400; CHIANG 1994: 464–468; OSTOJA-OSTASZEWSKI 1996: 225–228)[5].

Z założenia 1. wynika, że przyrost popytu $\dot{Y}^d$ dany jest wzorem $\dot{Y}^d = \frac{\dot{I}}{s}$. Równowaga gospodarki Domara, definiowana jako sytuacja, w której zagregowany popyt i podaż są sobie równe, prowadzi do wniosku, że wówczas musi zachodzić zależność $\frac{\dot{I}}{s} = \kappa I$. Implikuje to równanie stopy wzrostu inwestycji w postaci $\frac{\dot{I}}{I} = \kappa s$ lub $\frac{\dot{I}}{I} = \frac{s}{v_K}$ (można również wykazać, że jeśli $\frac{\dot{I}}{I} = \kappa s = \frac{s}{v_K}$,

[3] Warto zwrócić uwagę na model wzrostu przedstawiony w pracy Amida Bhaduriego (1994: rozdz. 7), który charakteryzuje się założeniami (opisującymi popytowe i podażowe efekty realizowanych nakładów inwestycyjnych) bardzo zbliżonymi do modelu Domara, ale jest bardziej zdezagregowany, gdyż Bhaduri dzieli gospodarkę na sektor wytwarzający dobra konsumpcyjne i inwestycyjne. Pewne możliwości aplikacji modelu Domara w analizach wpływu polityki monetarnej na proces wzrostu gospodarczego można znaleźć również w pracy Tomasza Tokarskiego (2003).

[4] Zapis postaci $\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}$ lub $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$ oznacza pochodną zmiennej x po czasie t, czyli (ekonomicznie rzecz biorąc) przyrost wartości owej zmiennej w momencie t.

[5] Należy uznać, że κ w modelu Domara można również traktować jako odwrotność współczynnika kapitałochłonności v_K. Wynika to stąd, iż gdyby założyć, że gospodarka charakteryzuje się jednoczynnikową funkcją produkcji postaci $Y^s = \frac{K}{v_K}$, zaś przyrost zasobu kapitału $\dot{K}$ równy jest inwestycjom netto I, wówczas $\dot{Y}^s = \frac{\dot{K}}{v_K} = \frac{I}{v_K}$, czyli $\kappa = \frac{1}{v_K}$.

to $\frac{\dot{Y}^d}{Y^d} = \frac{\dot{Y}^s}{Y^s} = \kappa s = \frac{s}{v_K}$, co oznacza, że także zagregowany popyt i podaż będą rosły według stopy $\kappa s = s / v_K$).

Gospodarka Domara jest w stanie długookresowej równowagi, gdy stopa wzrostu inwestycji wynosi $\kappa s = s / v_K$. Pojawia się jednak pytanie, co stanie się w owej gospodarce, jeśli rzeczywista stopa wzrostu inwestycji wyniesie $\imath \neq \kappa s$? Można pokazać, że jeśli $\imath < \kappa s$, to analizowana gospodarka będzie się charakteryzować stanem permanentnej, nadwyżkowej podaży (Chiang 1994: 466–468; Ostoja-Ostaszewski 1996: 225–228).

Przy stałych $\imath$, κ oraz s stan tej nierównowagi powiększa się wraz z upływem czasu, a wyjście gospodarki z owej sytuacji będzie niemal niemożliwe. Wynika to stąd, iż jeśli $\imath < \kappa s$ oraz $Y^s(t) > Y^d(t)$ w każdym momencie $t \in [0;+\infty)$, to inwestorzy uzmysłowią sobie, iż w gospodarce istnieją niewykorzystane zdolności produkcyjne i będą skłonni obniżyć rzeczywistą stopę wzrostu inwestycji $\imath$, co powiększy różnicę pomiędzy stopami κs a $\imath$ i przyczyni się do powiększenia nierównowagi na rynku produktu (przypadek ten nazywany jest w literaturze paradoksem Domara). Płynie stąd wniosek, że gospodarka w modelu Domara, podobnie jak analizowana wcześniej gospodarka w modelu Harroda, delikatnie balansuje na tzw. ostrzu noża jedynej możliwej ścieżki wzrostu zapewniającej równowagę makroekonomiczną. Każde zejście z owej ścieżki oznacza stan długookresowej, pogłębiającej się nierównowagi.

W literaturze przedmiotu opisuje się także tzw. model Harroda-Domara z funkcją produkcji Leontiewa, który jest kompilacją obu wspomnianych uprzednio modeli wzrostu. W modelu Harroda-Domara zakłada się, że:

1) Funkcja produkcji jest funkcją Leontiewa o zerowej substytucyjności nakładów pracy (w ujęciu efektywnościowym) L_E i kapitału K w postaci $Y = \min\left\{\frac{K}{v_K}, \frac{L_E}{v_L}\right\} = \min\left\{\frac{K}{v_K}, \frac{AL}{v_L}\right\}$, gdzie Y oznacza wielkość produkcji, $L_E = AL$ (A jest zasobem wiedzy technologicznej, zaś L nakładem pracy w ujęciu ilościowym), a $v_K > 0$ i $v_L > 0$ to (odpowiednio) współczynniki kapitało- i pracochłonności.
2) Przyrost zasobu kapitału $\dot{K}$ równy jest inwestycjom netto stanowiącym stałą, s-tą [$s \in (0;1)$] część produktu (przy założeniu równości oszczędności i inwestycji stopę s można zatem interpretować jako stopę oszczędności/inwestycji), co oznacza, że $\dot{K} = I = sY$.
3) Zasoby A i L rosną według egzogenicznych stóp wzrostu $g > 0$ i $n > 0$. Płynie stąd wniosek, że stopa wzrostu efektywnej pracy dana jest wzorem $\frac{\dot{L}_E}{L_E} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} = g + n$ (Allen 1975: 199–202; Barro, Sala-i-Martin 1995: 46–49).

Analiza funkcji produkcji Leontiewa prowadzi do wniosku, że warunkiem pełnego wykorzystania istniejącego zasobu kapitału jest spełnienie równania

$Y = \dfrac{K}{v_K}$, co implikuje, że $\dot{Y} = \dfrac{\dot{K}}{v_K}$. Z powyższej zależności i założenia 2. wynika, że stopa wzrostu produktu (w warunkach pełnego wykorzystania zakumulowanego w gospodarce kapitału) jest stopą wzrostu równą $\dfrac{\dot{Y}}{Y} = \dfrac{s}{v_K}$. Analogicznie w gospodarce wykorzystany jest cały zasób pracy (w ujęciu efektywnościowym), gdy zachodzi relacja $Y = \dfrac{L_E}{v_L}$, a stąd i z założenia 3. wynika, że $\dfrac{\dot{Y}}{Y} = \dfrac{\dot{L}_E}{L_E} = g + n$.

Spełnienie relacji $\dfrac{s}{v_K} = g + n$ jest warunkiem pełnego wykorzystania zdolności produkcyjnych gospodarki Harroda-Domara (por. równanie równowagi w modelu Harroda). Jeśli $\dfrac{s}{v_K} > g + n$ $\left(\dfrac{s}{v_K} < g + n\right)$, to zasób kapitału rośnie szybciej (wolniej) od zasobu efektywnej pracy. Przy stałych współczynnikach kapitało- i pracochłonności w funkcji produkcji Leontiewa powoduje to permanentne niewykorzystanie części istniejącego zasobu kapitału (efektywnej pracy) i, podobnie jak w modelach Harroda i Domara, gospodarka spada z ostrza noża jedynej ścieżki wzrostu gwarantującej długookresową równowagę makroekonomiczną.

Złagodzenie wspomnianego wyżej problemu ostrza noża z modeli Harroda, Domara oraz Harroda-Domara występuje w keynesistowskim modelu wzrostu Kaldora[6]. Funkcja produkcji posiada w nim takie same właściwości, jak funkcja produkcji w modelu Harroda-Domara. Również przyrosty zasobów K i L_E zdefiniowane są w ten sam sposób, a jedyna (ale zasadnicza) różnica między modelem Kaldora a wcześniejszymi, keynesistowskimi modelami wzrostu gospodarczego polega na dezagregacji stopy oszczędności w skali całej gospodarki na stopy oszczędności z sumy płac i zysków. Kaldor przyjmuje, że dochód narodowy podzielony jest na płace W i zyski Π (a zatem $Y = W + \Pi$), zaś – jak pisze –

> ważna różnica między tymi dwoma kategoriami polega na różnicach w krańcowej skłonności do konsumpcji (lub oszczędzania), tj. na tym, że krańcowa skłonność do oszczędzania ludzi żyjących z płacy jest mała w porównaniu z krańcową skłonnością kapitalistów do oszczędzania (KALDOR 1971: 83).

W modelu wzrostu Kaldora przyjmuje się zatem, że $s_W < s_\Pi$, przy czym s_W i $s_\Pi \in (0;1)$ oznaczają skłonności do oszczędności z płac i zysków. Założenie to implikuje równanie stopy oszczędności w skali całej gospodarki (KALDOR 1971: 83; ALLEN 1975: 215 lub BLAUG 1990: 189) jako:

$$s = s_W + (s_\Pi - s_W)\,\frac{\Pi(t)}{Y(t)}.$$

[6] Podano uproszczoną wersję modelu Kaldora na podstawie pracy Roya D.G. Allena (1975: 215–217). Pełny model Kaldora prezentowany jest w jego pracy (1971: 93–144), por. też: Mark Blaug (1990: 186–209).

Można pokazać, że warunkiem istnienia równowagi gospodarki Kaldora jest spełnienie następującej nierówności:

$$\frac{s_W}{v_K} \leq g + n \leq \frac{s_\Pi}{v_K} \tag{11.1}$$

lub:

$$0 \leq \pi \leq \frac{1}{v_K}, \tag{11.2}$$

przy czym $\pi = \Pi / K$ oznacza stopę zysków w skali całej gospodarki (Allen 1975: 215–216).

Rozluźnienie sztywnych założeń co do stopy oszczędności w modelu Kaldora (tj. dezagregacja owej stopy na oszczędności z płac i zysków) prowadzi do tego, że warunki długookresowej równowagi gospodarki Kaldora (11.1–11.2) łagodzą zagadnienie ostrza noża występujące we wcześniejszych, keynesistowskich modelach wzrostu. Z warunków tych wynika bowiem, iż do tego, aby gospodarka Kaldora znajdowała się w stanie długookresowej równowagi potrzeba i wystarcza, by stopa wzrostu efektywnej pracy $g + n$ znajdowała się w przedziale domkniętym, ograniczonym z dołu przez iloraz stopy oszczędności z płac do współczynnika kapitałochłonności, i z góry przez relację stopy oszczędności z zysków do owego współczynnika. Oznacza to, że jeśli stopy oszczędności kształtują się np. na poziomie $s_\Pi = 66\%$, $s_W = 0\%$ (przypadek zerowych oszczędności z płac), zaś $n + g = 4\%$, to współczynnik kapitałochłonności powinien być nie większy od ok. 50/3 (Kaldor 1971: 301; Allen 1975: 217).

Przyjmując, że współczynnik kapitałochłonności w funkcjonujących gospodarkach jest równy ok. 3–5, prawdopodobieństwo tego, iż gospodarka natknie się na problem ostrza noża jest stosunkowo niewielkie[7]. Analiza warunku równowagi (11.2) wskazuje, że przy współczynniku kapitałochłonności 3–5 stopa zysków gwarantująca równowagę gospodarki Kaldora nie może być wyższa od ok. 20–33%, zaś przekroczenie tej wielkości oznacza, podobnie jak we wcześniej analizowanych, keynesistowskich modelach wzrostu, stan permanentnej nierównowagi owego modelu.

Należy zaznaczyć, że niewątpliwym wkładem polskiej myśli ekonomicznej w rozwój keynesistowskich modeli wzrostu jest model Kaleckiego (1963, 1970)[8]. Kluczowym równaniem owego modelu jest tzw. formuła Kaleckiego (por. np.: Kalecki 1970: 130–132)[9]:

---

[7] Z drugiej strony, gdyby przyjąć, że $s_W = 9\%$, zaś $v_K = 3$, to roczna stopa wzrostu efektywnej pracy, która nie powoduje stanu permanentnej nierównowagi, musi być wyższa od 3%, co przy niskiej stopie wzrostu liczby ludności we współczesnych gospodarkach wysoko rozwiniętych wymaga dość wysokiej stopy postępu technicznego.

[8] Por. też: Janusz Górski, Witold Sierpiński (1972: 417–419). Mimo iż model Kaleckiego odnosi się (w zasadzie) do realiów gospodarki socjalistycznej, to można znaleźć próby jego aplikacji do analizy gospodarki polskiej w okresie transformacji (Koziński 1991; Glikman 1997, 2002 lub Domański 2000).

[9] W oryginalnym modelu Kaleckiego formuła wzrostu przedstawiona jest w czasie skokowym. Tutaj jednak, podobnie jak w innych prezentowanych w pracy modelach wzrostu, podana jest jako równanie różniczkowe, co nie zmienia jednak sensu jej interpretacji ekonomicznej.

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{I(t)}{mY(t)} - a + u, \tag{11.3}$$

gdzie $\dot{Y} / Y$ oznacza stopę wzrostu strumienia produktu, I / Y – stopę inwestycji brutto (udział owych inwestycji w produkcie), $m > 1$ – współczynnik kapitałochłonności (odpowiadający współczynnikowi v_K w modelach Harroda, Domara lub Kaldora), $a \in (0;1)$ – stopę deprecjacji kapitału, zaś u jest stopą wzrostu produktu wynikającą „z lepszego wykorzystania istniejących zdolności wytwórczych dzięki usprawnieniom organizacyjnym" (KALECKI 1970: 131)[10].

Opisując gospodarkę (w rzeczy samej socjalistyczną), Kalecki pisze:

> Wszystkie trzy współczynniki, *m*, *a* oraz *u*, są wyznaczone (...) przez stronę podażową; *m* oraz *a* zależą od decyzji centralnego planisty w sprawie wyboru techniki produkcji (od kapitałochłonności nowej produkcji oraz od polityki usuwania przestarzałych obiektów); *u* przedstawia stopę wzrostu wykorzystania istniejących urządzeń w wyniku postępu organizacyjnego (KALECKI 1970: 131).

Należy zaznaczyć, że równanie Kaleckiego można również odnieść do realiów gospodarki kapitalistycznej. Pojawia się tylko wówczas problem odmiennej interpretacji współczynników *m*, *u* oraz *a*. W warunkach gospodarki rynkowej interpretacja tych współczynników jest – jak pisze Kalecki – zupełnie inna, gdyż:

> Tempo zmiany stopnia wykorzystania urządzeń, *u*, zależy od efektywnego popytu i w przebiegu cyklu koniunkturalnego może nawet zmieniać znak (...). Elementy strony popytowej mogą oddziaływać na *m*; prawdą jest, że nowe, a zatem najnowocześniejsze, urządzenia będą wykorzystywane w pełni, ale i w tym przypadku nie można wykluczyć niepełnego wykorzystania obiektów na skutek braku efektywnego popytu (KALECKI 1970: 131).

Neoklasyczne modele wzrostu gospodarczego

W opozycji (lub alternatywie) do keynesistowskich modeli wzrostu powstaje neoklasyczny model wzrostu Solowa (1956)[11]. Punktem wyjścia dla nowatorskich analiz Solowa jest spostrzeżenie, że:

---

[10] Formuła wzrostu Kaleckiego jest w dużej mierze zbliżona do równań stopy wzrostu strumienia produktu z modeli wzrostu typu Harroda-Domara postaci $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{s}{v_K}$. Wyrażenie s / v_K w modelu Harroda-Domara odpowiada bowiem wyrażeniu $\frac{I}{mY} - a$ w modelu Kaleckiego. Wynika to stąd, że zmienna s w modelu wzrostu Harroda-Domara oznacza stopę oszczędności/inwestycji netto, zaś I / Y w modelu Kaleckiego oznacza stopę inwestycji brutto.

[11] Por. też np.: Hansen (1976: 278–284), Levačić, Rebmann (1982: 272–277) lub Romer (1996: 12–23). Model Solowa czasami bywa również nazywany modelem Solowa-Swana. Wynika to stąd,

> Szczególnie prace Harroda były pełne nie do końca dopracowanych twierdzeń, że wzrost zrównoważony był bardzo niestabilnym rodzajem równowagi,

zaś:

> (...) ekspedycja przybywająca z Marsa na Ziemię po przeczytaniu całej tej literatury [tj. dotyczącej keynesistowskich modeli wzrostu – przyp. aut.] spodziewałaby się, że znajdzie tylko ruiny kapitalizmu, który rozpadł się na części dawno temu. Historia gospodarcza rzeczywiście była zapisem fluktuacji i wzrostu, jednakże większość cykli koniunkturalnych wydawała się samoograniczająca (Solow 1988: 307–308)[12].

Oznacza to, iż realnie funkcjonujące gospodarki, jakimś szczególnym zbiegiem okoliczności, poruszają się po ostrzu noża wynikającym z keynesistowskich modeli wzrostu Harroda czy Domara, albo że modele te nieadekwatnie opisują rzeczywistość.

Pisząc o swych wczesnych (tj. z połowy lat 50. XX w.) pracach nad neoklasycznym modelem wzrostu, Robert M. Solow stwierdza również, że:

> W takim nastroju zacząłem zmagać się z teorią wzrostu gospodarczego, próbując poprawić model Harroda-Domara. (...) Pamiętam, że kiedy jeszcze byłem studentem bardziej przyciągała mnie teoria produkcji niż, formalnie prawie identyczna, teoria wyboru konsumenta. Wydawała się bardziej związana z rzeczywistością. Pamiętam, że jako urodzonemu makroekonomiście wydawało mi się, że nawet jeśli technologia sama w sobie nie jest zbyt elastyczna (...) to współczynniki czynnikochłonności muszą być bardziej zmienne, ponieważ gospodarka może wybrać [w procesie produkcyjnym – przyp. aut.] dobra kapitałochłonne, pracochłonne lub ziemiochłonne (Solow 1988: 308).

Spostrzeżenia te stają się impulsem do skonstruowania przez Solowa neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego. Model Solowa zostaje rozszerzony (odpowiednio na 2 i *N* zasobów kapitałowych) w pracach N. Gregory'ego Mankiwa, Davida Romera, Davida N. Weila (1992) oraz Waltera Nonnemana, Patricka Vanhoudta (1996).

---

iż model Solowa został przedstawiony w jego artykule z lutego 1956 r., zaś w listopadzie tegoż roku Swan (niezależnie od Solowa) opublikował swoje opracowanie, w którym przedstawił bardzo zbliżony model wzrostu gospodarczego (Solow 1956; Swan 1956). Co ciekawe, nie tylko Solow, lecz również inni przedstawiciele neoklasycznej teorii wzrostu gospodarczego (jak Phelps czy Mankiw, Romer i Weil) zaliczani są obecnie do czołowej grupy ekonomistów keynesistowskich lub tzw. nowej ekonomii keynesistowskiej (Snowdon, Vane, Wynarczyk 1998; Wojtyna 1997a, 1997b, 2000; Brémond, Salort 1997: 179–182). Modele owych ekonomistów nazywane zaś są w literaturze neoklasycznymi modelami wzrostu głównie z tego względu, że wykorzystywali oni neoklasyczną, agregatową funkcję produkcji.

[12] Por. też wywiad z Robertem M. Solowem w książce Briana Snowdona, Howarda R. Vane'a (2003).

Model wzrostu Solowa

W modelu Solowa przyjmuje się następujące założenia[13]:

1) Proces produkcyjny opisuje funkcja produkcji Cobba-Douglasa dana wzorem:

$$Y(t)=(K(t))^{\alpha}(L_E(t))^{1-\alpha}, \tag{11.4}$$

gdzie Y oznacza wielkość strumienia produktu wytworzonego w momencie $t \in [0; +\infty)$, K – zasób kapitału rzeczowego w owym momencie, $L_E = AL$ – jednostki efektywnej pracy, zaś $\alpha \in (0;1)$ i $1 - \alpha \in (0;1)$ – to elastyczności produktu Y względem nakładów K i L_E lub, na gruncie marginalnej teorii podziału Johna B. Clarka, udziały owych nakładów w wytworzonym produkcie.

2) Przyrost zasobu kapitału $\dot{K}$ opisuje równanie różniczkowe:

$$\dot{K}(t)=sY(t)-\delta K(t), \tag{11.5}$$

gdzie $s \in (0;1)$ oznacza stopę oszczędności/inwestycji, zaś $\delta \in (0;1)$ – stopę deprecjacji kapitału.

3) Jednostki efektywnej pracy L_E rosną według egzogenicznej stopy wzrostu będącej sumą stopy wzrostu liczby pracujących ($\dot{L}/L = n > 0$) oraz stopy postępu technicznego w sensie Harroda[14] ($\dot{A}/A = g > 0$) i zachodzi równanie:

$$\frac{\dot{L}_E(t)}{L_E(t)}=\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}+\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}=g+n. \tag{11.6}$$

Oznaczenie przez $y = Y / L_E$ oraz przez $k = K / L_E$ odpowiednio strumienia produktu i zasobu kapitału na jednostkę efektywnej pracy oraz podzielenie funkcji produkcji (11.4) przez $L_E > 0$ prowadzi do funkcji produkcji w postaci intensywnej, określonej przez związek:

$$y_E(t)=(k_E(t))^{\alpha}. \tag{11.7}$$

Funkcja produkcji w postaci intensywnej opisuje relacje pomiędzy nakładami kapitału na jednostkę efektywnej pracy a wielkością produkcji na jednostkę owej pracy. Przekształcenie równania akumulacji kapitału (11.5) oraz wykorzystanie zależności (11.6) prowadzi do równania Solowa:

[13] Prezentowany w tym punkcie model wzrostu Solowa jest modelem z funkcją produkcji Cobba--Douglasa (1928). Wynika to stąd, że zarówno modele Mankiwa-Romera-Weila, Nonnemana--Vanhoudta, jak i prezentowany w punkcie 11.3 grawitacyjny model wzrostu gospodarczego bezpośrednio nawiązują do modelu Solowa z funkcją produkcji Cobba-Douglasa. Model Solowa można jednak rozszerzyć na model z ogólną, neoklasyczną funkcją produkcji. Owo rozszerzenie znajduje się m.in. w takich podręcznikach jak np.: BARRO, SALA-I-MARTIN 1995 lub TOKARSKI 2009, 2011.

[14] To jest takiego postępu technicznego, który bezpośrednio potęguje produkcyjność pracy.

$$\dot{k}_E(t) = sy_E(t) - (\delta + g + n)k_E(t), \tag{11.8}$$

które interpretuje się ekonomicznie w ten sposób, że przyrost kapitału na jednostkę efektywnej pracy ($\dot{k}_E$) równy jest różnicy pomiędzy inwestycjami przypadającymi na jednostkę efektywnej pracy (sy_E) a ubytkiem owego kapitału $(\delta + g + n) k_E$, który wynika zarówno z jego deprecjacji (część równa δk_E), jak i ze wzrostu jednostek efektywnej pracy ($(g + n)k_E$). Stopa $\mu = \delta + g + n > 0$ nazywana jest dalej stopą ubytku kapitału na jednostkę efektywnej pracy.

Wstawienie funkcji produkcji w postaci intensywnej (11.7) oraz podstawienie $\mu = \delta + g + n$ do równania Solowa (11.8) prowadzi do równania różniczkowego Bernoulliego:

$$\dot{k}_E(t) = s(k_E(t))^\alpha - \mu k_E(t), \tag{11.9}$$

które posiada dwa rozwiązania (całki): całkę trywialną $k_E(t) = 0$[15] oraz pewną całkę nietrywialną, przy czym nietrywialną całkę równania różniczkowego (11.9) określa związek:

$$k_E(t) = \left(\frac{s}{\mu} + \left(k_{E0}^{1-\alpha} - \frac{s}{\mu} \right) e^{-(1-\alpha)\mu t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{11.10}$$

gdzie $k_{E0} > 0$ oznacza zasób kapitału na jednostkę efektywnej pracy w momencie $t = 0$. Wstawienie całki (11.10) do funkcji produkcji w postaci intensywnej (11.7) prowadzi do związku:

$$y_E(t) = \left(\frac{s}{\mu} + \left(k_{E0}^{1-\alpha} - \frac{s}{\mu} \right) e^{-(1-\alpha)\mu t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{11.11}$$

Równania (11.10–11.11) wyznaczają ścieżki wzrostu kapitału i produktu na jednostkę efektywnej pracy w modelu Solowa z funkcją produkcji Cobba-Douglasa.

Jeśli zaś przez $y = Y / L$ oznaczymy wydajność pracy, a przez $k = K / L$ – techniczne uzbrojenie pracy, to zachodzą związki:

$$k(t) = A_0 e^{gt} k_E(t)$$

oraz:

$$y(t) = A_0 e^{gt} y_E(t),$$

gdzie $A_0 > 0$ oznacza wielkości zasobu A w momencie $t = 0$. Logarytmując stronami oraz różniczkując uzyskane wówczas zależności względem czasu t, dochodzi się do równań:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = g + \frac{\dot{k}_E(t)}{k_E(t)} \tag{11.12}$$

[15] Zarówno w modelu Solowa, jak i Mankiwa-Romera-Weila, Nonnemana-Vanhoudta oraz w grawitacyjnym modelu wzrostu gospodarczego rozwiązania trywialne z ekonomicznego i matematycznego punktu widzenia są tu pomijane.

i:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = g + \frac{\dot{y}_E(t)}{y_E(t)}. \tag{11.13}$$

Z równań (11.10–11.13) można wyciągnąć następujące wnioski natury ekonomicznej:

- Jeśli wyjściowy zasób kapitału na pracującego k_{E0} jest wyższy/niższy od $\left(\frac{s}{\mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, to w każdym momencie $t \geq 0$ $\dot{k}_E$ i $\dot{y}_E$ są dodatnie/ujemne, co powoduje, że stopy wzrostu technicznego uzbrojenia pracy $\dot{k}/k$ i wydajności pracy $\dot{y}/y$ są wówczas wyższe od stopy harrodiańskiego postępu technicznego g, natomiast przy $k_{E0} = \left(\frac{s}{\mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ zachodzi $\dot{k}_E = \dot{y}_E = 0$, co powoduje, że w tej sytuacji $\dot{k}/k = \dot{y}/y = g$.
- W długim okresie, przy t $\to +\infty$, kapitał na jednostkę efektywnej pracy oraz produkt na jednostkę owej pracy dążą do wielkości równych (odpowiednio) $k_E^* = \left(\frac{s}{\mu}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ i $y_E^* = \left(\frac{s}{\mu}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Co więcej, im wyższe wartości przyjmują $\dot{k}_E$ oraz $\dot{y}_E$, tym wyżej położone są długookresowe ścieżki wzrostu technicznego uzbrojenia pracy k^* i wydajności pracy y^*.
- Położenie długookresowych ścieżek wzrostu technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy jest zatem zależne m.in. od stopy oszczędności/inwestycji s oraz stopy ubytku kapitału na jednostkę efektywnej pracy, czyli μ. Stąd zaś, że:

$$\frac{\partial \ln k_E^*}{\partial s} = \frac{1}{(1-\alpha)s} > 0,$$

$$\frac{\partial \ln y_E^*}{\partial s} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)s} > 0,$$

$$\frac{\partial \ln k_E^*}{\partial \mu} = -\frac{1}{(1-\alpha)\mu} < 0$$

oraz:

$$\frac{\partial \ln y_E^*}{\partial \mu} = -\frac{\alpha}{(1-\alpha)\mu} < 0.$$

płynie wniosek, iż im wyższa jest stopa oszczędności/inwestycji s i/lub niższą wartość przyjmuje stopa ubytku μ, tym wyżej położone są długookresowe ścieżki wzrostu technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy.

Model wzrostu Mankiwa-Romera-Weila

Rozszerzeniem jednokapitałowego, neoklasycznego modelu wzrostu Solowa jest dwukapitałowy model Mankiwa-Romera-Weila. W modelu tym czyni się następujące założenia:

1) Wielkość produkcji Y zależna jest (podobnie jak ma to miejsce w modelu Solowa) od nakładów kapitału rzeczowego K, jednostek efektywnej pracy L_E oraz (czego nie ma w modelu Solowa) od zasobu kapitału ludzkiego H. Relacje pomiędzy Y a K, H i L_E opisuje rozszerzona funkcja produkcji Cobba-Douglasa dana wzorem:
$$Y(t) = (K(t))^{\alpha_K} (H(t))^{\alpha_H} (L_E(t))^{1-\alpha_K-\alpha_H}, \tag{11.14}$$
gdzie $\alpha_K, \alpha_H, \alpha_K + \alpha_H \in (0;1)$. Parametry α_K i α_H w modelu Mankiwa-Romera-Weila odczytuje się ekonomicznie – analogicznie do parametru α w modelu Solowa – jako elastyczności Y względem (odpowiednio) K i H albo – na gruncie teorii podziału Clarka – jako udziały kapitału rzeczowego i ludzkiego w wytworzonym produkcie.
2) Przyrost zasobu kapitału rzeczowego $\dot{K}$ (ludzkiego $\dot{H}$) stanowi różnicę między inwestycjami $s_K Y$ ($s_H Y$) w ów zasób a jego deprecjacją[16] $\delta_K K$ ($\delta_H H$), gdzie s_K (s_H) oznacza stopę inwestycji w kapitał rzeczowy (ludzki), zaś δ_K (δ_H) – stopę deprecjacji owego zasobu kapitałowego. O stopach inwestycji i stopach deprecjacji zakłada się, iż $s_K, s_H, s_K + s_H \in (0;1)$ oraz $\delta_K, \delta_H \in (0;1)$. Stąd płynie wniosek, że przyrosty zasobów kapitału rzeczowego i ludzkiego opisują równania różniczkowe:
$$\dot{K}(t) = s_K Y(t) - \delta_K K(t) \tag{11.15}$$
oraz:
$$\dot{H}(t) = s_H Y(t) - \delta_H H(t). \tag{11.16}$$
3) W modelu Mankiwa-Romera-Weila, podobnie jak w modelu Solowa, przyjmuje się założenie, że jednostki efektywnej pracy $L_E = AL$ rosną według stopy wzrostu $g + n$, gdzie $g > 0$ oznacza stopę harrodiańskiego postępu technicznego, zaś $n > 0$ – stopę wzrostu liczby pracujących. Zachodzi zatem równanie (11.6).

Niech $y_E = Y / L_E$, $k_E = K / L_E$ oraz $h_E = H / L_E$ oznaczają odpowiednio strumień produktu i zasoby kapitału rzeczowego oraz ludzkiego na jednostkę efektywnej pracy, zaś $y = Y / L$, $k = K / L$ i $h = H / L$ – wydajność pracy, techniczne uzbrojenie pracy oraz kapitał ludzki na pracującego. Przy wprowadzonych tu oznaczeniach funkcję produkcji (11.14) można sprowadzić do funkcji produkcji w postaci intensywnej danej wzorem:

---

[16] Deprecjacja kapitału ludzkiego może być (przede wszystkim) efektem odchodzenia z zasobu pracujących starszych, najbardziej doświadczonych pracowników wraz z ich umiejętnościami (czyli zgromadzonym zasobem kapitału ludzkiego).

$$y_E(t) = (k_E(t))^{\alpha_K}(h_E(t))^{\alpha_H}. \tag{11.17}$$

Funkcja (11.17) jest uogólnieniem funkcji (11.7) z modelu Solowa.

Z równań (11.15–11.16) oraz z założenia, że $\frac{\dot{L}_E}{L_E} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} = g + n$ dochodzi się do związków:

$$\dot{k}_E(t) = s_K y_E(t) - \mu_K k_E(t) \tag{11.18}$$

i:

$$\dot{h}_E(t) = s_H y_E(t) - \mu_H k_E(t), \tag{11.19}$$

gdzie: $\mu_K = \delta_K + g + n > 0$ oraz $\mu_H = \delta_H + g + n > 0$ oznaczają stopy ubytku kapitału rzeczowego i ludzkiego na jednostkę efektywnej pracy. Równania (11.18–11.19) są uogólnieniem równania Solowa (11.8), dlatego też interpretuje się je ekonomicznie w ten sposób, że przyrost zasobu kapitału rzeczowego $\dot{k}_E$ (ludzkiego $\dot{h}_E$) na jednostkę efektywnej pracy jest różnicą pomiędzy inwestycjami $s_K y_E$ ($s_H y_E$) w zasób owego kapitału, przypadającymi na jednostkę efektywnej pracy, a jego ubytkiem $\mu_K k_E$ ($\mu_H h_E$), który jest skutkiem zarówno deprecjacji kapitału rzeczowego (ludzkiego), jak i wzrostu jednostek efektywnej pracy.

Wstawienie funkcji produkcji w postaci intensywnej (11.17) do zależności (11.18–11.19) prowadzi do układu równań różniczkowych:

$$\left.\begin{aligned} \dot{k}_E(t) &= s_K (k_E(t))^{\alpha_K}(h_E(t))^{\alpha_H} - \mu_K k_E(t) \\ \dot{h}_E(t) &= s_H (k_E(t))^{\alpha_K}(h_E(t))^{\alpha_H} - \mu_H h_E(t) \end{aligned}\right\}. \tag{11.20}$$

Równania układu różniczkowych (11.20) wyznaczają tzw. równania ruchu (*equations of motion*) modelu Mankiwa-Romera-Weila. Układ ów analizuje się w przestrzeni fazowej $P = [0;+\infty]$. W przestrzeni P układ równań różniczkowych (11.20) posiada dwa punkty stacjonarne: punkt trywialny (0;0) oraz pewien punkt nietrywialny $\kappa^* = (k_E^*, h_E^*) \in (0;+\infty)^2$.

Ilustracja układu równań różniczkowych (11.20) to diagram fazowy przedstawiony na wykresie 11.1.

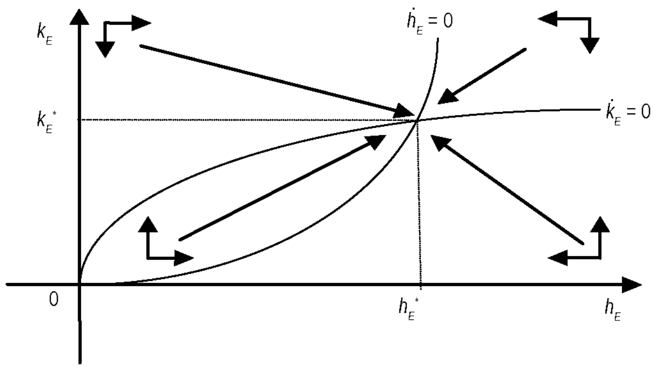
Diagram fazowy na wykresie (11.1) jest diagramem z węzłem stabilnym w punkcie $\kappa^* = (k_E^*, h_E^*)$, skąd płynie wniosek, że (najpóźniej przy $t \to +\infty$) zasoby kapitału rzeczowego k_E i ludzkiego h_E na jednostkę efektywnej pracy dążą do wielkości równych (odpowiednio) k_E^* oraz h_E^*. Dlatego też punkt κ^* utożsamiany będzie z punktem długookresowej równowagi gospodarki Mankiwa-Romera-Weila.

W punkcie κ^* zachodzą następujące związki:

$$\ln k_E^* = \frac{1-\alpha_H}{1-\alpha_K-\alpha_H}\ln\frac{s_K}{\mu_K} + \frac{\alpha_H}{1-\alpha_K-\alpha_H}\ln\frac{s_H}{\mu_H} \tag{11.21}$$

i:

$$\ln h_E^* = \frac{1-\alpha_K}{1-\alpha_K-\alpha_H}\ln\frac{s_H}{\mu_H} + \frac{\alpha_K}{1-\alpha_K-\alpha_H}\ln\frac{s_K}{\mu_K}. \tag{11.22}$$



Rysunek 11.1. Diagram fazowy układu równań różniczkowych (11.20)
Źródło: opracowania własne

Z zależności (11.21–11.22) oraz z funkcji produkcji w postaci intensywnej (11.17) wynika, że produkt na jednostkę efektywnej pracy w równowadze analizowanego modelu wzrostu gospodarczego, czyli $y_E^* = (k_E^*)^{\alpha_K}(h_E^*)^{\alpha_H}$, spełnia równanie:

$$\ln y_E^* = \frac{\alpha_K}{1-\alpha_K-\alpha_H}\ln\frac{s_K}{\mu_K} + \frac{\alpha_H}{1-\alpha_K-\alpha_H}\ln\frac{s_H}{\mu_H}. \tag{11.23}$$

Ze związków (11.20–11.22) oraz diagramu fazowego na wykresie 11.1 płyną następujące wnioski:

- Po dojściu gospodarki Mankiwa-Romera-Weila do punktu długookresowej równowagi κ^* przyrosty zasobów kapitału rzeczowego i ludzkiego na jednostkę efektywnej pracy, czyli $\dot{k}_E$ i $\dot{h}_E$, zerują się, co zgodnie ze związkiem (11.17) powoduje, że również $\dot{y}_E = 0$. Z definicji k, h, y, k_E, h_E, y_E oraz z założenia, że $\dot{A}/A = g$ wynika, iż:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{k}_E(t)}{k_E(t)} = g + \frac{\dot{k}_E(t)}{k_E(t)}$$

$$\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{h}_E(t)}{h_E(t)} = g + \frac{\dot{h}_E(t)}{h_E(t)}$$

oraz:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{y}_E(t)}{y_E(t)} = g + \frac{\dot{y}_E(t)}{y_E(t)}$$

zatem w długookresowej równowadze Mankiwa-Romera-Weila techniczne uzbrojenie pracy k, kapitał ludzki na pracującego h i wydajność pracy y (podobnie jak k oraz y w modelu Solowa) rosną według stopy wzrostu g równej stopie harrodiańskiego postępu technicznego.

- Wartości k_E^*, h_E^* oraz y_E^* zależne są m.in. od stóp inwestycji (s_K i s_H) oraz stóp ubytków kapitału rzeczowego i ludzkiego (μ_K oraz μ_H), zatem położenie długookresowych ścieżek wzrostu technicznego uzbrojenia pracy k, kapitału ludzkiego na pracującego h i wydajności pracy y zależne jest również od wartości s_K, s_H, μ_K oraz μ_H.
- Ponieważ:

$$\frac{\partial \ln k_E^*}{\partial s_K} = \frac{1-\alpha_H}{(1-\alpha_K-\alpha_H)s_K} > 0,$$

$$\frac{\partial \ln k_E^*}{\partial s_H} = \frac{\alpha_H}{(1-\alpha_K-\alpha_H)s_H} > 0,$$

$$\frac{\partial \ln h_E^*}{\partial s_K} = \frac{\alpha_K}{(1-\alpha_K-\alpha_H)s_K} > 0,$$

$$\frac{\partial \ln h_E^*}{\partial s_H} = \frac{1-\alpha_K}{(1-\alpha_K-\alpha_H)s_H} > 0,$$

$$\frac{\partial \ln y_E^*}{\partial s_K} = \frac{\alpha_K}{(1-\alpha_K-\alpha_H)s_K} > 0$$

oraz:

$$\frac{\partial \ln y_E^*}{\partial s_H} = \frac{\alpha_H}{(1-\alpha_K-\alpha_H)s_H} > 0,$$

co oznacza, że wysokim stopom inwestycji s_K i s_H towarzyszą wysokie wartości k_E^*, h_E^* oraz y_E^* i – tym samym – wysoko położone długookresowe ścieżki wzrostu k, h oraz y.
- Stąd, że:

$$\frac{\partial \ln k_E^*}{\partial \mu_K} = -\frac{1-\alpha_H}{(1-\alpha_K-\alpha_H)\mu_K} < 0,$$

$$\frac{\partial \ln k_E^*}{\partial \mu_H} = -\frac{\alpha_H}{(1-\alpha_K-\alpha_H)\mu_H} < 0,$$

$$\frac{\partial \ln h_E^*}{\partial \mu_K} = -\frac{\alpha_K}{(1-\alpha_K-\alpha_H)\mu_K} < 0,$$

$$\frac{\partial \ln h_E^*}{\partial \mu_H} = -\frac{1-\alpha_K}{(1-\alpha_K-\alpha_H)\mu_H} < 0,$$

$$\frac{\partial \ln y_E^*}{\partial \mu_H} = -\frac{\alpha_H}{(1-\alpha_K-\alpha_H)\mu_H} < 0$$

oraz:

$$\frac{\partial \ln y_E^*}{\partial \mu_K} = -\frac{\alpha_K}{(1-\alpha_K-\alpha_H)\mu_K} < 0$$

wynika, iż wysokim stopom ubytku μ_K i μ_H odpowiadają niskie wartości k_E^*, h_E^* oraz y_E^* i nisko położone długookresowe ścieżki wzrostu technicznego uzbrojenia pracy, kapitału ludzkiego na pracującego oraz wydajności pracy.

Model wzrostu Nonnemana-Vanhoudta

Uogólnieniem modeli wzrostu Solowa i Mankiwa-Romera-Weila jest N-kapitałowy model wzrostu Nonnemana-Vanhoudta z 1996 r. W modelu tym czyni się następujące założenia:

1) Proces produkcyjny opisany jest za pomocą uogólnionej (N+1)-czynnikowej funkcji produkcji Cobba-Douglasa danej wzorem[17]:

$$Y(t)=\left(\prod_j (K_j(t))^{\alpha_j}\right)(L_E(t))^{1-\sum_j \alpha_j}, \tag{11.24}$$

gdzie Y oznacza wielkość wytworzonego w gospodarce produktu, K_j (dla kolejnych j) – nakłady j-tego zasobu kapitałowego, L_E – jednostki efektywnej pracy. Parametry $\alpha_j \in (0;1)$, przy czym $\sum_j \alpha_j \in (0;1)$, są zarówno elastycznościami produktu względem kolejnych zasobów kapitałowych, jak i (na gruncie teorii podziału Clarka) udziałami owych zasobów w produkcie.

2) Akumulację każdego z zasobów kapitałowych opisują następujące równania różniczkowe:

$$\forall j \;\; \dot{K}_j(t)=s_jY(t)-\delta_jK_j(t), \tag{11.25}$$

gdzie dla kolejnych j s_j oraz δ_j oznaczają (odpowiednio) stopy inwestycji w j-ty zasób kapitału i stopy ich deprecjacji. O stopach s_j oraz δ_j zakłada się, że $\forall j$ s_j, $\delta_j \in (0;1)$ oraz $\sum_j s_j \in (0;1)$.

3) Jednostki efektywnej pracy L_E definiowane są tak, jak ma to miejsce w modelach Solowa i Mankiwa-Romera-Weila, a zatem $L_E = AL$, co powoduje, że $\dot{L}_E / L_E = g + n$, gdzie g, $n > 0$ interpretuje się ekonomicznie tak, jak w analizowanych uprzednio modelach wzrostu gospodarczego.

Niech $y_E=Y / L_E$ oznacza produkt na jednostkę efektywnej pracy, a $k_{Ej} = K_j / L_E$ (dla kolejnych j) zasób j-tego kapitału na jednostkę efektywnej pracy, zaś $k_E = (k_{E1}, k_{E2},\ldots,k_{EN})$ – dowolną kombinację zasobów kapitałowych na jednostkę

[17] Zapis $\forall j$ dalej będzie oznaczał $\forall j = 1,2,\ldots, N$, gdzie $N > 2$. Podobnie odczytuje się również wyrażenia $\sum_j x_j$ oraz $\prod_j x_j$.

efektywnej pracy w przestrzeni fazowej P = $[0;+\infty)^N$ wyprowadzonego dalej układu równań różniczkowych (11.30). Oznaczmy ponadto przez $y = Y / L$ – wydajność pracy, zaś $\forall j\ k_j = K_j / L$ – zasób j-tego kapitału na pracującego. Stąd oraz z założenia 3. wynika, iż zachodzą następujące związki:

$$y(t) = A(t)y_E(t) \Rightarrow \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = g + \frac{\dot{y}_E(t)}{y_E(t)} \tag{11.26}$$

oraz:

$$\forall j\ k_j(t) = A(t)k_{Ej}(t) \Rightarrow \frac{\dot{k}_j(t)}{k_j(t)} = g + \frac{\dot{k}_{Ej}(t)}{k_{Ej}(t)}. \tag{11.27}$$

Dzieląc funkcję produkcji (11.24) przez jednostki efektywnej pracy $L_E > 0$, dochodzi się do funkcji produkcji w postaci intensywnej danej wzorem:

$$y_E(t) = \prod_j (k_{Ej}(t))^{\alpha_j}. \tag{11.28}$$

Funkcja (11.28) stanowi naturalne uogólnienie funkcji produkcji w postaci intensywnej (11.7) z modelu Solowa oraz (11.17) z modelu Mankiwa-Romera-Weila.

Z równań (11.25) oraz założenia 3. uzyskuje się następujące związki:

$$\forall j\ \dot{k}_{Ej}(t) = s_j y_E(t) - \mu_j k_j(t), \tag{11.29}$$

gdzie dla kolejnych j $\mu_j = \delta_j + g + n > 0$ oznaczają stopy ubytku kolejnych zasobów kapitałowych na jednostkę efektywnej pracy. Równania (11.29) stanowią zaś uogólnienie równania Solowa (11.8) oraz równań (11.18) z modelu wzrostu Mankiwa-Romera-Weila.

Wstawienie funkcji produkcji w postaci intensywnej (11.28) do równań (11.29) prowadzi do układu równań różniczkowych:

$$\forall j\ \dot{k}_{Ej}(t) = s_j \prod_j (k_{Ej}(t))^{\alpha_j} - \mu_j k_j(t), \tag{11.30}$$

który ma dwa punkty stacjonarne w przestrzeni fazowej P: punkt trywialny (0;0;…;0) oraz pewien punkt nietrywialny $k_E^* = (k_{E1}^*, k_{E2}^*, \ldots, k_{EN}^*) \in (0;+\infty)^N$, przy czym w punkcie nietrywialnym spełnione są następujące związki:

$$\forall j\ \ln k_{Ej}^* = \frac{1 - \sum_{m \neq j} \alpha_m}{1 - \sum_m \alpha_m} \ln \frac{s_j}{\mu_j} + \frac{\sum_{m \neq j} \left(\alpha_m \ln \frac{s_m}{\mu_m} \right)}{1 - \sum_m \alpha_m}. \tag{11.31}$$

Korzystając z twierdzenia Grobmana-Hartmana (OMBACH 1999: 219–221), można pokazać, że punkt k_E^* charakteryzuje się asymptotyczną stabilnością. Oznacza to, iż punkt ten jest punktem długookresowej równowagi modelu Nonnemana-Vanhoudta (DYKAS, SULIMA, TOKARSKI 2008; DYKAS, EDIGARIAN, TOKARSKI 2011).

Z równań (11.31) oraz funkcji (11.28) wynika, że długookresowa produkcja na jednostkę efektywnej pracy, y_E^*, spełnia zależność:

$$\ln y_E^* = \frac{\sum_j \left(\alpha_j \ln \frac{s_j}{\mu_j} \right)}{1 - \sum_j \alpha_j}. \tag{11.32}$$

Z zależności (11.26–11.27) oraz (11.31–11.32) płyną następujące wnioski natury ekonomicznej:

- W punkcie stacjonarnym k_E^* modelu Nonnemana-Vanhoudta dla kolejnych j, przy $t \to +\infty$, $k_{Ej}(t) \to k_{Ej}^*$ oraz $y_E(t) \to y_E^*$. Wówczas, zgodnie z zależnościami (11.26–11.27), $\forall j \ \frac{\dot{k}_j}{k_j} \to g$ i $\frac{\dot{y}}{y} \to g$, skąd wniosek, że w warunkach długookresowej równowagi Nonnemana-Vanhoudta stopy wzrostu kolejnych zasobów kapitału na pracującego ($\dot{k}_j / k_j$) oraz strumienia wydajności pracy ($\dot{y} / y$) – podobnie jak ma to miejsce w modelu Solowa i Mankiwa-Romera-Weila – są zbieżne ze stopą egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda.
- Na wartość produktu na jednostkę efektywnej pracy y_E^*, a tym samym na położenie długookresowej ścieżki wzrostu wydajności pracy y, oddziałują zarówno stopy inwestycji s_j w kolejne zasoby kapitałowe, jak też stopy ich ubytku, czyli μ_j. Co więcej, ponieważ:

$$\forall j \ \frac{\partial \ln y_E^*}{\partial s_j} = \frac{\alpha_j}{\left(1 - \sum_m \alpha_m\right) s_j} > 0$$

oraz:

$$\forall j \ \frac{\partial \ln y_E^*}{\partial \mu_j} = -\frac{\alpha_j}{\left(1 - \sum_m \alpha_m\right) \mu_j} < 0,$$

zatem wysokim wartościom s_j lub niskim wartościom μ_j towarzyszą wysokie wartości y_E^* i wysoko położona długookresowa ścieżka wzrostu wydajności pracy.
- Zasób j-tego kapitału na jednostkę efektywnej pracy w długookresowej równowadze Nonnemana-Vanhoudta, czyli k_{Ej}^*, zależny jest zarówno od stopy inwestycji w ów zasób, s_j, jak i od stóp inwestycji w pozostałe zasoby kapitałowe, czyli s_m dla $m \neq j$, stopy ubytku j-tego zasobu kapitału, μ_j, oraz stóp ubytków pozostałych zasobów kapitałowych, a więc μ_m dla $m \neq j$.

- Stąd, że:

$$\forall j,m \wedge m \neq j \quad \frac{\partial \ln k^*_{Ej}}{\partial s_m} = \frac{\alpha_m}{\left(1-\sum_p \alpha_p\right)s_m} > 0$$

oraz:

$$\forall j \quad \frac{\partial \ln k^*_{Ej}}{\partial s_j} = \frac{1-\sum_{m\neq j}\alpha_m}{\left(1-\sum_m \alpha_m\right)s_j} > 0$$

można wyciągnąć dwa wnioski. Po pierwsze, im wyższe wartości przyjmują s_j i/lub s_m, tym wyższa jest wartość k^*_{Ej}. Po drugie, wysokim wartościom s_j i/lub s_m towarzyszą wysoko położone długookresowe ścieżki wzrostu kolejnych zasobów kapitału na pracującego.

- Im wyższe wartości przyjmują μ_j i/lub μ_m, tym niższe jest k^*_{Ej} oraz niżej położone są ścieżki wzrostu k_j w warunkach długookresowej równowagi Nonnemana-Vanhoudta. Wynika to stąd, że:

$$\forall j \quad \frac{\partial \ln k^*_{Ej}}{\partial \mu_j} = -\frac{1-\sum_{m\neq j}\alpha_m}{\left(1-\sum_m \alpha_m\right)s_j} < 0$$

i:

$$\forall j,m \wedge m \neq j \quad \frac{\partial \ln k^*_{Ej}}{\partial \mu_m} = -\frac{\alpha_m}{\left(1-\sum_p \alpha_p\right)s_m} < 0.$$

Modele optymalnego sterowania

W prowadzonych tu analizach scharakteryzowano podstawowe, makroekonomiczne modele wzrostu gospodarczego, nazywane w literaturze przedmiotu modelami wzrostu endogenicznego. Nazwa wynika stąd, że w modelach tych endogenizuje się zarówno postęp techniczny, który wynika z akumulacji wiedzy naukowo-technicznej i/lub akumulacji kapitału ludzkiego, jak i stopy inwestycji w zasoby rozważanych w tych modelach czynników produkcji. Modele te oparte są na matematycznej zasadzie maksimum Pontriagina, stąd można je nazwać również modelami optymalnego sterowania.

Model wzrostu Lucasa

Lucas przyjmuje następujące założenia dotyczące funkcjonowania gospodarki w długim okresie[18]:

1) Typowy, zachowujący się racjonalnie konsument (podmiot gospodarczy) maksymalizuje sumę zdyskontowanej użyteczności konsumpcji w nieskończonym przedziale czasowym. Suma ta maksymalizowana jest przez następującą całkę niewłaściwą (nazywaną dalej również całką preferencji owego konsumenta):

$$\int_0^{+\infty} \frac{(c(t))^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt, \tag{11.33}$$

gdzie c oznacza konsumpcję typowego konsumenta w modelu Lucasa utożsamianą z konsumpcją na pracującego, a $\sigma \in (0;1)\cup(1;+\infty)$ – to odwrotność międzyokresowej substytucji konsumpcji owego konsumenta, zaś $\rho > 0$ to jego stopa dyskontowa.

2) Agregatowa funkcja produkcji dana jest wzorem:

$$Y(t) = (h(t))^{\beta} (K(t))^{\alpha} (\Xi(t)h(t)L(t))^{1-\alpha}, \tag{11.34}$$

przy czym α i $(1 - \alpha) \in (0;1)$ – to elastyczności strumienia produktu Y względem nakładów kapitału rzeczowego K oraz nakładów pracy w sferze produkcji ΞhL, $\Xi \in (0;1)$ oznacza udział czasu przeznaczonego na pracę, który jest wykorzystywany w sferze produkcji dóbr i usług, h jest zasobem kapitału ludzkiego typowego konsumenta-pracownika w gospodarce, a $\beta \in [0;1)$ jest zaś siłą oddziaływania tzw. procesów zewnętrznych akumulacji kapitału ludzkiego.

3) Przyrost zasobu kapitału rzeczowego $\dot{K}$ opisuje równanie różniczkowe w postaci:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) = Y(t) - C(t) - \delta K(t), \tag{11.35}$$

gdzie I oznacza inwestycje (równe różnicy pomiędzy produkcją Y a konsumpcją C), natomiast $\delta \in (0;1)$ to stopa deprecjacji kapitału.

4) Przyrost zasobu kapitału ludzkiego opisuje tzw. funkcja Uzawy-Rosena dana wzorem:

$$\dot{h}(t) = \kappa(1 - \Xi(t))h(t), \tag{11.36}$$

gdzie $\kappa \in (0;1)$ jest maksymalną, możliwą do uzyskania, stopą wzrostu zasobu kapitału ludzkiego.

5) Liczba pracujących rośnie według stopy wzrostu $n > 0$, czyli:

$$\dot{L}(t) = nL(t). \tag{11.37}$$

[18] Lucas 1988, 1990, 1993, 2010; Aulin 1992: 222–223, Dykas, Tokarski 2013.

6) Gospodarka charakteryzuje się stałymi stopami wzrostu $g = \dot{y} / y = \dot{k} / k = \dot{c} / c$ i $g_h = \dot{h} / h$ (gdzie $y = Y / L$, $k = K / L$ i $c = C / L$) oraz stałym udziałem czasu przeznaczonego na działalność w sferze produkcji $\Xi(t) = \Xi^* \in (0;1)$ (dla dowolnego $t \geq 0$).

Problem wyznaczenia optymalnej ścieżki wzrostu gospodarczego w modelu wzrostu endogenicznego Lucasa sprowadza się do maksymalizacji całki preferencji (11.33) przy ograniczeniu równaniami (11.34–11.37). Problem ten można rozwiązać za pomocą ekstremum Pontriagina[19]. Można pokazać, że przy założeniach 1–6 optymalne stopy wzrostu g i g_h oraz optymalny udział czasu przeznaczony na działalność w sferze produkcji Ξ^* dane są wzorami (TOKARSKI 2009: rozdz. 10):

$$g = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha}\kappa - \rho\right) \tag{11.38}$$

$$g_h = \frac{1}{\sigma}\left(\kappa - \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\beta}\rho\right) \tag{11.39}$$

oraz:

$$\Xi^* = 1 - \frac{1}{\sigma}\left[1 - \frac{(1-\alpha)\rho}{(1-\alpha+\beta)\kappa}\right]. \tag{11.40}$$

Z równań (11.38–11.40), przy dodatkowym założeniu, że zachodzi również nierówność[20] $\frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha} \geq \frac{\rho}{\kappa} \geq \frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha}(1-\sigma)$, wynika, iż stopy wzrostu strumieni produkcji i konsumpcji oraz zasobu kapitału rzeczowego (wszystkich na pracującego) i indywidualnych kwalifikacji pracowników w gospodarce zależne są, w głównej mierze, od czynników opisujących preferencje co do struktury konsumpcji w czasie (a więc od międzyokresowej substytucji konsumpcji $1/\sigma$ i od stopy dyskontowej ρ typowego konsumenta). Co więcej, im bardziej konsumenci w modelu Lucasa preferują konsumpcję bieżącą w stosunku do konsumpcji przyszłej (czyli im większe będzie $1/\sigma$ lub im niższe będzie ρ), tym niższe stopy wzrostu będą uzyskiwać podstawowe zmienne makroekonomiczne. Dlatego też w modelu wzrostu gospodarczego Lucasa, w przeciwieństwie do analizowanych poprzednio neoklasycznych modeli wzrostu, możliwe jest trwałe podniesienie stóp wzrostu gospodarczego. Należy jednak zaznaczyć, że trwałe podniesienie długookresowych stóp wzrostu gospodarczego musi być połączone ze zmianą preferencji konsumentów w stosunku do struktury konsumpcji w czasie.

[19] Zasada maksimum Pontriagina syntetycznie omówiona jest np. w pracach Alpha C. Chianga (1992: 210–212, 250–257) lub Roberta J. Barro, Xawiera Sala-i-Martina (1995: 498–510). Szeroki zaś przegląd możliwości aplikacji maksimum Pontriagina w modelowaniu procesów wzrostu gospodarczego znajduje się np. w pracach Emila Panka (1986, 2003). Por. też: Krzysztof Malaga (2009) lub Michał Konopczyński (2015).

[20] Nierówność ta nie ma bezpośredniej interpretacji ekonomicznej.

Model wzrostu Romera

Romer czyni następujące założenia opisujące funkcjonowanie gospodarki:

1) W gospodarce istnieje skończony, niezmienny w czasie zasób kapitału ludzkiego $H > 0$. Kapitał ów jest dzielony na część zaangażowaną w sferze produkcji dóbr i usług (równą H_Y) oraz część, która jest wykorzystywana w tworzeniu nowej wiedzy naukowo-technicznej (oznaczana przez H_A). Wynika stąd, że spełnione jest równanie:

$$H = H_Y + H_A. \tag{11.41}$$

2) Zasób wiedzy naukowo-technicznej A zmienia się w czasie zgodnie z następującym równaniem różniczkowym:

$$\dot{A}(t) = \kappa H_A A(t), \tag{11.42}$$

gdzie $\kappa > 0$ jest współczynnikiem efektywności nakładów kapitału ludzkiego w sferze kreacji wiedzy naukowo-technicznej.

3) Strumień produktu Y opisany jest przez funkcję produkcji w postaci:

$$Y(t) = (H_Y)^\beta L^\alpha \int_0^{A(t)} [x(i)]^{1-\alpha-\beta} di, \tag{11.43}$$

gdzie $x(i)$ jest nakładem i-tego dobra kapitałowego, natomiast $i \in (0;A)$, co oznacza, że ilość dóbr kapitałowych i (wykorzystywanych w procesach produkcyjnych w gospodarce) jest zależna od istniejącego w niej zasobu wiedzy naukowo-technicznej. Natomiast parametry $\alpha, \beta \in (0;1)$ oraz $(1-\alpha+-\beta) \in 0$ są elastycznościami Y względem L, H_Y oraz $x(i)$. Oznaczenie przez $\bar{x} = x(i)$, dla każdego $i \in (0;A)$, przeciętnego dobra kapitałowego pozwala zapisać funkcję produkcji (11.43) wzorem:

$$Y(t) = (H_Y)^\beta L^\alpha \int_0^{A(t)} [x(i)]^{1-\alpha-\beta} di = (H_Y)^\beta L^\alpha (\bar{x})^{1-\alpha-\beta} \int_0^{A(t)} di = (H_Y)^\beta L^\alpha (\bar{x})^{1-\alpha-\beta}. \tag{11.44}$$

4) Łączny zasób kapitału rzeczowego K w gospodarce jest sumą dóbr kapitałowych $x(i)$, co implikuje zależności:

$$K(t) = \int_0^{A(t)} x(i)di = \bar{x}\int_0^{A(t)} di = A(t)\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = K(t)/A(t). \tag{11.45}$$

5) Przyrost kapitału rzeczowego $\dot{K}$ jest różnicą między produkcją Y a konsumpcją C (dla uproszczenia rozważań w modelu wzrostu Romera pomija się deprecjację kapitału δK). Stąd zaś oraz z równań (11.44–11.45) wynika, że:

$$\dot{K}(t) = (H_Y A(t))^\beta (LA(t))^\alpha (K(t))^{1-\alpha-\beta} - C(t) \tag{11.46}$$

6) Liczba pracujących nie ulega zmianie w czasie i w każdym momencie $t \geq 0$ wynosi $L > 0$.

7) Celem działania typowego podmiotu (konsumenta) w gospodarce Romera jest maksymalizacja sumy zdyskontowanej użyteczności konsumpcji w postaci:

$$\int_0^{+\infty} \frac{[C(t)]^{1-\sigma}}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt, \tag{11.47}$$

gdzie parametry $\sigma \in (0;1) \cup (1;+\infty)$ oraz $\rho > 0$ interpretuje się ekonomicznie tak, jak ma to miejsce w modelu wzrostu Lucasa.

Z równań (11.41–11.46) otrzymuje się równania ruchu modelu wzrostu Romera w postaci:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{A}(t) = \kappa H_A A(t) \\ \dot{K}(t) = (A(t))^{\alpha+\beta} (H - H_A)^{\beta} L^{\alpha} (K(t))^{1-\alpha-\beta} - C(t) \end{array}\right\}. \tag{11.48}$$

Problem wyznaczenia równowagi gospodarki Romera sprowadza się do maksymalizacji całki preferencji (11.47) przy ograniczeniu układem równań różniczkowych (11.48). Posługując się zasadą maksimum Pontriagina, można pokazać, że rozwiązaniem owego problemu w warunkach wzrostu równomiernego (przy $\dot{Y} / Y = \dot{K} / K = \dot{C} / C = \dot{A} / A = \kappa H_A$) jest zasób kapitału ludzkiego kierowany do sfery kreacji wiedzy naukowo-technicznej, dany wzorem (Chiang 1992: 272–274):

$$H_A = \frac{\kappa(\alpha+\beta)H - \beta\rho}{\kappa(\beta\sigma+\alpha)} \tag{11.49}$$

oraz stopy wzrostu gospodarczego postaci:

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\kappa(\alpha+\beta)H - \beta\rho}{\beta\sigma+\alpha}. \tag{11.50}$$

Z równań (11.49–11.50), przy dodatkowym warunku $\kappa(\alpha + \beta)H > \beta\rho$[21], wynika, że w modelu wzrostu gospodarczego Romera zarówno wielkość kapitału ludzkiego kierowanego do działalności naukowo-technicznej, jak i stopy wzrostu podstawowych, wyróżnionych w tym modelu, zmiennych makroekonomicznych, są tym wyższe, im wyższy jest łączny zasób kapitału ludzkiego (H) oraz im wyższy jest egzogeniczny współczynnik efektywności nakładów kapitału ludzkiego w sferze naukowo-technicznej (κ).

Długookresowe stopy wzrostu gospodarczego $\dot{Y} / Y = \dot{K} / K = \dot{C} / C = \dot{A} / A$, podobnie jak ma to miejsce w modelu Lucasa, powinny być również tym wyższe, im bardziej konsumenci w gospodarce będą przedkładali konsumpcję przyszłą nad konsumpcją bieżącą (tj. im niższa jest stopa dyskontowa ρ oraz im wyższa jest stopa międzyokresowej substytucji konsumpcji $1/\sigma$).

Zasób kapitału ludzkiego oraz jego podział – na kapitał ludzki wykorzystywany w sferze produkcji dóbr i usług oraz akumulacji wiedzy – zasadniczo determinują

[21] Nierówność $\kappa(\alpha + \beta)H > \beta\rho$ jest niezbędna do tego, by optymalny zasób kapitału ludzkiego H_A w równaniu (11.49) był dodatni.

podstawowe stopy wzrostu w modelu Romera określone przez równanie (11.50). Można się zatem spodziewać, że gospodarki o względnie małym zasobie kapitału ludzkiego uzyskują stosunkowo niskie stopy wzrostu gospodarczego. Warto jednak zauważyć, iż do wniosku tego (szczególnie w modelu wzrostu endogenicznego Romera) należy podchodzić bardzo ostrożnie, gdyż w modelu tym zakłada się, że zasób kapitału ludzkiego jest stały w czasie od dziś aż do nieskończoności.

Grawitacyjny model wzrostu gospodarczego

Grawitacyjny model wzrostu gospodarczego[22] stanowi kompilację modelu wzrostu Solowa z tzw. efektami grawitacyjnymi zaproponowanymi m.in. w pracach Jana Tinbergena (1962), Kyosti Pulliainena (1963) lub Hans Linnemanna (1963). W modelu tym czyni się następujące założenia:

1) Analizie poddaje się funkcjonowanie pewnej, skończonej liczby N krajów (lub regionów)[23], między którymi istnieją przestrzenne interakcje rozwoju ekonomicznego scharakteryzowane przez opisane niżej indywidualne i łączne efekty grawitacyjne.
2) Przyjmuje się, że proces produkcyjny w j-tej gospodarce opisany jest przez funkcję produkcji Cobba-Douglasa, co powoduje, iż wydajność pracy y_j w owej gospodarce można zapisać wzorem[24]:

$$\forall j \;\; y_j(t) = a_j \left(g_j(t)\right)^{\beta} \left(k_j(t)\right)^{\alpha} \tag{11.51}$$

gdzie: $\forall j a_j > 0, \alpha, \beta \in 0$ i $\beta < \frac{1-\alpha}{2}$[25], a y_j oznacza wydajność pracy w kraju/regionie j, k_j – techniczne uzbrojenie pracy w owym kraju/regionie, zaś

[22] Model ten został zaproponowany w opracowaniu: Mroczek, Tokarski, Trojak 2014. Por. też: Mroczek, Tokarski 2014; Mroczek, Nowosad, Tokarski 2015.

[23] Kraje/regiony nazywane są dalej również gospodarkami.

[24] Wielkości y_j oraz k_j w równaniu (11.51) i dalszych można traktować zarówno jako wydajność pracy oraz techniczne uzbrojenie pracy w j-tej gospodarce, jak i jako produkt na jednostkę efektywnej pracy i kapitał na jednostkę efektywnej pracy w owej gospodarce. W pierwszym z rozważanych tu przypadków gospodarka dąży do punktu stacjonarnego, w którym się zatrzymuje, w drugim zaś przypadku w długookresowej równowadze produkt i kapitał na pracującego w każdym z krajów/regionów rosną według stopy wzrostu równej stopie harrodiańskiego postępu technicznego (por. też: Mroczek, Tokarski, Trojak 2014).

[25] Przyjęcie założenia, że $\beta < \frac{1-\alpha}{2}$ w równaniu (11.51) jest bardzo istotne dla pokazania stabilności nietrywialnego punktu stacjonarnego układu równań różniczkowych (11.57). Założenie to oznacza tyle, że elastyczność produkcji względem efektu grawitacyjnego jest mniejsza od połowy elastyczności produkcji względem nakładów kapitału.

wielkość g_j^{β} w funkcji wydajności pracy (11.51) opisuje tę część łącznej produktywności czynników produkcji[26] ($a_j g_j^{\beta}$) w gospodarce j, która wynika z działania efektu grawitacyjnego (opisanego w założeniach 3–4). Natomiast $a_j > 0$ jest częścią łącznej produktywności czynników produkcji wynikającą z działania pewnych czynników, które nie są uwzględnione w prowadzonych dalej rozważaniach[27]. Parametr α oznacza elastyczność wielkości produkcji (lub wydajności pracy) względem nakładów kapitału rzeczowego (lub technicznego uzbrojenia pracy) bądź też – na gruncie marginalnej teorii podziału Clarka – udział nakładów kapitału w wytworzonym produkcie. Parametr β oznacza elastyczność łącznej produktywności czynników produkcji względem łącznego efektu grawitacyjnego opisanego przez g_j.

3) Indywidualne efekty grawitacyjne łączące gospodarkę j z gospodarką m opisują zależności:

$$\forall j, m \wedge m \neq j \quad g_{jm}(t) = \frac{k_j(t) k_m(t)}{d_{jm}^2}, \tag{11.52}$$

gdzie $\forall j, m \wedge m \neq j$ $d_{jm} > 0$ oznacza odległość między stolicą kraju/regionu j a stolicą kraju/regionu m. Przez analogię do prawa powszechnej grawitacji Newtona przyjmuje się też, że siła oddziaływania indywidualnych efektów grawitacyjnych, łączących dwa kraje/regiony, jest wprost proporcjonalna do ich potencjału ekonomicznego, mierzonego wartościami technicznego uzbrojenia pracy (k_j i k_m), oraz odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.

4) Łączne efekty grawitacyjne oddziałujące na gospodarkę j są średnią geometryczną z indywidualnych efektów grawitacyjnych. Oznacza to, że spełnione są związki:

$$\forall j \quad g_j(t) = \sqrt[N-1]{\prod_{m \neq j} g_{jm}(t)}. \tag{11.53}$$

---

[26] Jeśli weźmie się pod uwagę oryginalną funkcję produkcji Cobba-Douglasa w postaci: $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, gdzie $A > 0$, zaś $\alpha \in (0;1)$, to łączną produktywność czynników produkcji, czyli A, można definiować jako produkt, który mógłby być wytworzony z jednostkowych nakładów kapitału i pracy, gdyż przy $K = L = 1$ produkt $Y = A$. Termin: łączna produktywność czynników produkcji pochodzi zaś stąd, iż przekształcając funkcję produkcji $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ otrzymuje się:

$$A = \frac{Y}{K^{\alpha}L^{1-\alpha}} = \left(\frac{Y}{K}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y}{L}\right)^{1-\alpha},$$

skąd wynika, iż łączna produktywność czynników produkcji jest ważoną średnią geometryczną z produktywności kapitału Y / K i wydajności pracy Y / L, gdzie rolę wag pełnią udziały nakładów kapitału i pracy w wytworzonym produkcie, czyli α oraz $1 - \alpha$.

[27] Zróżnicowanie a_j może (jak to ma miejsce np. w modelu Lucasa lub Mankiwa-Romera-Weila) wynikać ze zróżnicowania kapitału ludzkiego pomiędzy analizowanymi krajami/regionami bądź też może być skutkiem różnych instytucjonalnych lub sektorowych struktur badanych gospodarek.

5) Podobnie jak w modelu wzrostu Solowa, równania przyrostów technicznego uzbrojenia pracy w każdym z krajów/regionów opisują równania różniczkowe:

$$\forall j \ \dot{k}_j(t) = s_j y_j(t) - \mu_j k_j(t), \tag{11.54}$$

przy $\forall j,\ s_j \in (0;1) \wedge \mu_j > 0$, gdzie s_j oznaczają stopy inwestycji w j-tym kraju/regionie, zaś μ_j – stopy ubytku kapitału na pracującego w tym kraju/regionie. Stopy μ_j (dla kolejnych j) są sumami stóp deprecjacji kapitału i stopy wzrostu liczby pracujących.

Równowaga modelu

Z zależności (11.52–11.53) uzyskuje się równania łącznych efektów grawitacyjnych dane wzorami:

$$\forall j \ g_j(t) = \frac{k_j(t)\left(\prod_{m \neq j} k_m(t)\right)^{\frac{1}{N-1}}}{d_j^2}, \tag{11.55}$$

przy $\forall j \ d_j = \sqrt[N-1]{\prod_{m \neq j} d_{jm}} > 0$, gdzie d_j oznacza średnią geometryczną z odległości stolicy j-tej gospodarki od stolic pozostałych gospodarek, co oznacza, że im mniejszą wartość przyjmuje d_j, tym bardziej centralnie położona jest j-ta gospodarka, zaś wysokie wartości d_j są tożsame z peryferyjnym charakterem j-tej gospodarki.

Wstawiając związki (11.55) do równań (11.51), mamy:

$$\forall j \ y_j(t) = \frac{a_j}{d_j^{2\beta}}\left(\prod_{m \neq j} k_m(t)\right)^{\frac{\beta}{N-1}} \left(k_j(t)\right)^{\alpha+\beta}. \tag{11.56}$$

Z zależności (11.54) i (11.56) dochodzi się do układu równań różniczkowych:

$$\forall j \ \dot{k}_j(t) = s_j \frac{a_j}{d_j^{2\beta}}\left(\prod_{m \neq j} k_m(t)\right)^{\frac{\beta}{N-1}} \left(k_j(t)\right)^{\alpha+\beta} - \mu_j k_j(t). \tag{11.57}$$

Korzystając z twierdzenia Grobmana-Hartmana, można pokazać, że układ równań różniczkowych (11.57) ma dokładnie jeden nietrywialny punkt stacjonarny $k^* = (k_1^*, k_2^*, \ldots, k_N^*)$ w przestrzeni fazowej $\mathrm{P} = [0;+\infty)^N$, który charakteryzuje się asymptotyczną stabilnością[28]. Punkt k^* można zatem traktować jako punkt długookresowej równowagi grawitacyjnego modelu wzrostu gospodarczego (Mroczek, Tokarski, Trojak 2014).

[28] Układ równań różniczkowych (11.57) posiada także rozwiązanie trywialne (0, 0,…, 0).

Można również pokazać, że w nietrywialnym punkcie stacjonarnym k^* techniczne uzbrojenie pracy k_j^* oraz wydajność pracy y_j^* w j-tym kraju/regionie opisane są przez równania (MROCZEK, TOKARSKI, TROJAK 2014):

$$\forall j \ \ln k_j^* = \frac{\dfrac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)}\sum_m \ln\dfrac{s_m a_m}{\mu_m d_m^{2\beta}} + \ln\dfrac{s_j a_j}{\mu_j d_j^{2\beta}}}{1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta} \tag{11.58}$$

oraz:

$$\begin{gathered}\forall j \ \ln y_j^* = \ln\frac{a_j}{d_j^{2\beta}} + \frac{\alpha+\dfrac{N-2}{N-1}\beta}{1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta}\ln\frac{s_j a_j}{\mu_j d_j^{2\beta}} + \\ + \frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)}\sum_m \ln\frac{s_m a_m}{\mu_m d_m^{2\beta}}.\end{gathered} \tag{11.59}$$

Z równań (11.58–11.59) płyną m.in. cztery następujące wnioski:

- Długookresowy zasób technicznego uzbrojenia pracy i strumień wydajności pracy w kraju/regionie j, podobnie jak ma to miejsce w oryginalnym modelu Solowa, są tym wyższe, im wyższa jest stopa inwestycji s_j oraz im niższa jest stopa ubytku kapitału na pracującego μ_j w tym kraju/regionie. Wynika to stąd, iż:

$$\forall j \ \frac{\partial \ln k_j^*}{\partial s_j} = \frac{\dfrac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)s_j} + \dfrac{1}{s_j}}{1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta} > 0,$$

$$\forall j \ \frac{\partial \ln y_j^*}{\partial s_j} = \frac{\alpha+\dfrac{N-2}{N-1}\beta}{\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)s_j} + \frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)s_j} > 0,$$

$$\forall j \ \frac{\partial \ln k_j^*}{\partial \mu_j} = -\frac{\dfrac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\mu_j} + \dfrac{1}{\mu_j}}{1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta} < 0$$

i:

$$\forall j \ \frac{\partial \ln y_j^*}{\partial \mu_j} = -\frac{\alpha+\dfrac{N-2}{N-1}\beta}{\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)\mu_j} - \frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)\mu_j} < 0.$$

- Im bardziej centralnie położona jest dana gospodarka, czyli im niższa jest średnia geometryczna z odległości d_{jm}, tym wyższy jest poziom zarówno technicznego uzbrojenia pracy, jak i wydajności pracy w warunkach długookresowej równowagi grawitacyjnego modelu wzrostu gospodarczego. Dzieje się tak dlatego, że:

$$\forall j \quad \frac{\partial \ln k_j^*}{\partial d_j} = -\frac{\dfrac{2\beta^2}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)d_j} + \dfrac{2\beta}{d_j}}{1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta} < 0$$

oraz:

$$\forall j \quad \frac{\partial \ln y_j^*}{\partial d_j} = -\frac{2\beta}{d_j} - \frac{2\left(\alpha+\dfrac{N-2}{N-1}\right)\beta^2}{\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)d_j} - \frac{2\beta^2}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)d_j} < 0.$$

- Stąd, że:

$$\forall j,m \wedge m \neq j \quad \frac{\partial \ln k_j^*}{\partial s_m} = \frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)s_m} > 0,$$

$$\forall j,m \wedge m \neq j \quad \frac{\partial \ln y_j^*}{\partial s_m} = \frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)s_m} > 0,$$

$$\forall j,m \wedge m \neq j \quad \frac{\partial \ln k_j^*}{\partial \mu_m} = -\frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)\mu_m} < 0$$

i:

$$\forall j,m \wedge m \neq j \quad \frac{\partial \ln y_j^*}{\partial \mu_m} = -\frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)\mu_m} < 0$$

można wnioskować, iż poziomy rozważanych tu zmiennych makroekonomicznych w j-tym kraju/regionie są tym wyższe, im wyższa jest średnia geometryczna $\sqrt[N-1]{\prod_{m\neq j} s_m}$ ze stóp inwestycji w pozostałych krajach/regionach oraz im niższa jest średnia geometryczna $\sqrt[N-1]{\prod_{m\neq j} \mu_m}$ ze stóp ubytku kapitału na pracującego w tych krajach/regionach.

- Wpływ na poziom wydajności pracy oraz technicznego uzbrojenia pracy w j-tej gospodarce w warunkach długookresowej równowagi ma także pozagrawitacyjna część łącznej produktywności czynników produkcji a_j zarówno w tej gospodarce, jak i średnia geometryczna $\sqrt[N-1]{\prod_{m\neq j} a_m}$ z pozagrawitacyjnych części łącznych produktywności czynników produkcji w pozostałych krajach/regionach. Można zauważyć, że im wyższe jest a_j i/lub $\sqrt[N-1]{\prod_{m\neq j} a_m}$, tym wyższe wartości przyjmują y_j^* oraz k_j^*. Dzieje się tak dlatego, że:

$$\forall j,m \wedge m \neq j \quad \frac{\partial \ln k_j^*}{\partial a_m} = \frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta\right)a_m} > 0$$

i:

$$\forall j,m \wedge m \neq j \quad \frac{\partial \ln y_j^*}{\partial a_m} = \frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta\right)a_m} > 0.$$

Podsumowanie

Podstawowe modele wzrostu gospodarczego można podzielić na trzy główne kategorie: modele keynesistowskie, neoklasyczne oraz modele optymalnego sterowania, nazywane także modelami wzrostu endogenicznego.

W opracowaniu zaprezentowano także grawitacyjny model wzrostu gospodarczego, zaproponowany przez Katarzynę Mroczek, Tomasza Tokarskiego i Mariusza Trojaka (2014) i oparty na założeniach neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego Solowa. W modelu tym akcentuje się rolę interakcji przestrzennych jako czynnika determinującego zróżnicowanie wydajności pracy, co znacznie odróżnia go od podstawowych modeli neoklasycznych.

Należy stwierdzić, że modele keynesistowskie powstają pod silnym wpływem wielkiego kryzysu lat 30. XX w. Cechą wspólną tych modeli jest ogólna konkluzja, że gospodarka kapitalistyczna jest narażona na stan permanentnej nierównowagi, wynikającej m.in. z założenia prawie zerowej substytucji nakładów kapitału i pracy w procesie produkcyjnym. W modelach keynesistowskich podkreślane jest także znaczenie aktywnych działań państwa w utrzymaniu gospodarki na ścieżce wzrostu gwarantującej długookresową równowagę makroekonomiczną. Wśród najważniejszych modeli keynesistowskich należy wyróżnić modele: Harroda, Domara, Harroda-Domara, Kaldora oraz (w polskiej literaturze makroekonomicznej) model wzrostu Kaleckiego.

Alternatywne wobec modeli keynesistowskich są modele neoklasyczne, których sztandarowym reprezentantem jest model wzrostu gospodarczego Solowa z 1956 r. Geneza powstania tego modelu to spostrzeżenie Solowa, iż modele keynesistowskie niedostatecznie dobrze opisują rzeczywistość, ponieważ, mimo że gospodarki ulegają pewnym fluktuacjom krótkookresowym, to mają tendencję do pozostawania na ścieżce wzrostu gwarantującej długookresową równowagę makroekonomiczną. W modelu Solowa długookresowe stopy wzrostu wydajności pracy i technicznego uzbrojenia pracy równe są egzogenicznej stopie postępu technicznego. W modelu tym na położenie długookresowych ścieżek wzrostu technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy wpływa m.in. stopa oszczędności/inwestycji oraz stopa ubytku kapitału na jednostkę efektywnej pracy. Można zauważyć, że im wyższa jest stopa oszczędności/inwestycji lub im niższa jest stopa ubytku, tym wyżej położone są długookresowe ścieżki wzrostu rozważanych tu zmiennych makroekonomicznych.

Do modeli neoklasycznych należą także model Mankiwa-Romera-Weila, który rozwija podstawowy model wzrostu Solowa o dodatkowy zasób kapitałowy (kapitał ludzki), oraz model Nonnemana-Vanhoudta będący uogólnieniem modelu Solowa i Mankiwa-Romera-Weila na skończoną liczbę N dowolnych zasobów kapitałowych.

Modele optymalnego sterowania to modele oparte na matematycznej zasadzie maksimum Pontriagina i zaproponowane m.in. przez Lucasa oraz Romera. Oba te modele podkreślają, że wpływ na stopy wzrostu podstawowych zmiennych makroekonomicznych mają subiektywne preferencje co do podziału konsumpcji w czasie (opisywane przez międzyokresową stopę substytucji konsumpcji i stopę dyskontową typowego konsumenta). Gospodarka uzyskuje tym wyższe stopy wzrostu podstawowych zmiennych makroekonomicznych, im konsumenci chętniej przedkładają konsumpcję przyszłą nad konsumpcję bieżącą. W modelu Romera wśród istotnych czynników wzrostu gospodarczego znajdują się także: łączny zasób kapitału ludzkiego oraz egzogeniczny współczynnik efektywności nakładów kapitału ludzkiego w sferze kreacji wiedzy naukowo-technicznej. Im wyższe są wartości tych zmiennych w modelu Romera, tym wyższe są stopy wzrostu podstawowych zmiennych makroekonomicznych. W odróżnieniu od neoklasycznych modeli wzrostu w modelach optymalnego sterowania możliwe jest stałe podniesienie długookresowej stopy wzrostu gospodarczego.

Grawitacyjny model wzrostu gospodarczego rozwija założenia neoklasycznego modelu Solowa o aspekt przestrzenny. W modelu tym interakcje przestrzenne opisane są przez indywidualne efekty grawitacyjne, równe iloczynowi potencjałów ekonomicznych dwóch krajów podzielonemu przez kwadrat odległości między nimi. Model ten posiada stabilny punkt stacjonarny, który jest punktem długookresowej równowagi modelu. W stanie długookresowej równowagi wydajność pracy w danym kraju zależy od stopy inwestycji, stopy ubytku kapitału na pracującego oraz efektów indywidualnych w tym kraju, stóp inwestycji, stóp ubytku technicznego uzbrojenia pracy, efektów indywidualnych w pozostałych krajach/regionach oraz od średniej odległości danego kraju/regionu, jaka dzieli go od pozostałych państw.

Bibliografia

Acemoglu D. (2009). *Introduction to the Modern Economic Growth*. New Jersey: Princeton University Press.

Aghion P., Howitt P. (1998). *Endogenous Growth Theory*, Cambridge, Massachusetts, London, England: The MIT Press.

Allen R.G.D. (1975). *Teoria makroekonomiczna. Ujęcie matematyczne*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Aulin A. (1992). *Foundation of Economic Development*. Berlin: Springer-Verlag.

Barro R.J., Sala-i-Martin X. (1995). *Economic Growth*. New York: McGraw-Hill.

Bhaduri A. (1994). *Makroekonomiczna teoria dynamiki produkcji towarowej*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Blaug M. (1990). *Economic Theories, True or False? Essays in the History and Methodology of Economics*. Hants, England, Vermont, USA: Edward Elgard Publishing Limited.

Brémond J., Salort M.M. (1997). *Leksykon wybitnych ekonomistów*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Bródy A. (1991). *Zwolnienie wzrostu. O globalnych schorzeniach gospodarczych*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Chiang A.C. (1992). *Elements of Dynamic Optimization*. New York: McGraw-Hill International Editions.

Chiang A.C. (1994). *Podstawy ekonomii matematycznej*. Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.

Cobb C.W., Douglas P.H. (1928). *A Theory of Production*, „American Economic Association", 18, s. 139–165.

Domański S.R. (2000). *Endogenizacja formuły wzrostu M. Kaleckiego*, „Ekonomista", 3, s. 325–338.

Domar E.D. (1962). *Szkice z teorii wzrostu gospodarczego*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Dykas P., Edigarian A., Tokarski T. (2011). *Uogólnienie N-kapitałowego modelu wzrostu gospodarczego Nonnemana-Vanhoudta* [w:] E. Panek (red.), *Wzrost gospodarczy. Teoria. Rzeczywistość*, „Zeszyty Naukowe", 176. Poznań: Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, s. 161–177.

Dykas P., Sulima A., Tokarski T. (2008). *Złote reguły akumulacji kapitału w N-kapitałowym modelu wzrostu gospodarczego*, „Gospodarka Narodowa", s. 11–12, 47–75.

Dykas P., Tokarski T. (2013). *Podażowe czynniki wzrostu gospodarczego – podstawowe modele teoretyczne* [w:] W. Welfe, I. Świeszewska (red.), *Systemy modeli gospodarki narodowej opartej na wiedzy*, „Acta Universitatis Lodziensis. Folia Oeconomica" 294. Łódź: Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, s. 9–43.

Gandolfo G. (1971). *Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics*. Amsterdam–London: North-Holland Publishing Company.

Glikman P. (1997). *Inwestycje a wzrost gospodarki polskiej w latach 1992–96 oraz prognozowany do 2000 r.* [w:] *Inwestycje i oszczędności. Znaczenie. Statystyka. Poziom i perspektywy*, Raport 28, Warszawa: Rządowe Centrum Studiów Strategicznych.

Glikman P. (2002). *Geneza deformacji strukturalnych w okresie transformacji*, „Ekonomista", 4, s. 525–554.

Górski J. (1967). *Zarys historii ekonomii politycznej*. Warszawa: Książka i Wiedza.

Górski J., Sierpiński W. (1972). *Historia powszechnej myśli ekonomicznej 1870–1950*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Hansen B. (1976). *Przegląd systemów równowagi ogólnej*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Harrod R.F. (1939). *An Essays in Dynamic Theory*, „The Economic Journal", (49) 193, s. 14–33.

Harrod R.F. (1942). *Toward a Dynamic Economic*. London: Macmillan.

Kaldor N. (1971). *Eseje z teorii stabilizacji i wzrostu gospodarczego*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Kalecki M. (1963). *Zarys teorii wzrostu gospodarki socjalistycznej* [w:] M. Kalecki, *Dzieła*, t. 4. *Socjalizm. Wzrost gospodarczy i efektywność inwestycji*. Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.

Kalecki M. (1970). *Teorie wzrostu w różnych systemach społecznych* [w:] M. Kalecki, *Dzieła*, t. 4. *Socjalizm. Wzrost gospodarczy i efektywność inwestycji*. Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.

Kalecki M. (1984). *Dzieła*, t. 4. *Socjalizm. Wzrost gospodarczy i efektywność inwestycji*. Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.

Krawiec A., Szydłowski M. (2004). *Endogenous Technological Progress and Economic Growth* [w:] W. Welfe, P. Wdowiński (red.), *Modelling Economies in Transition. Proceedings of the Eight Conference of International Association AMFET, Warsaw, December 3–6, 2003*, Łódź, s. 266–271.

Konopczyński M. (2015). *Optymalna polityka fiskalna w gospodarce otwartej w świetle teorii endogenicznego wzrostu gospodarczego*. Poznań: Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.

Koziński W. (1991). *Szkice z dynamiki gospodarczej*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Levačić R., Rebmann A. (1982). *Macroeconomics. An Introduction to Keynesian-Neoclassical Controversies*. Houndmills: Macmillan Publishers.

Linnemann H. (1963). *An Econometric Study of International Trade Flows*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Lucas R.E. (1988). *On the Mechanics of Economics Development*, „Journal of Monetary Economics", 22, s. 3–42.

Lucas R.E. (1990). *Why Doesn't Capital Flow from Rich to Poor Countries?*, „American Economic Review", (80) 2, s. 92–96.

Lucas R.E. (1993). *Making a Miracle*, „Econometrica", (61) 2, s. 251–272.

Lucas R.E. (2010). *Wykłady z teorii wzrostu gospodarczego*. Warszawa: Wydawnictwo C.H. Beck.

Makarski K., Pońsko P., Weretka M., Winek D. (1998). *Rozważania nad rozwojem teorii wzrostu gospodarczego*, „Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH", 6.

Malaga K. (2009). *Podstawy neoklasycznej teorii wzrostu gospodarczego*. Materiały Dydaktyczne nr 229. Poznań: Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.

Malaga K. (2011). *The Main Strands and Dilemmas of Contemporary Economic Growth Theory*, „Argumenta Oeconomica", (26) 1, s. 17–42.

Malaga K. (2013). *Jednolita teoria wzrostu gospodarczego – stan obecny i nowe wyzwania*, referat na IX Kongres Ekonomistów Polskich PTE, http://www.pte.pl/kongres/referaty/Malaga%20Krzysztof/Malaga%20Krzysztof%20z20JEDNOLITA%20TEORIA%20WZROSTU%20GOSPODARCZEGO%20%E2%80%93%20STAN%20OBECNY%20I%20NOWE%20WYZWANIA.pdf (dostęp: 13.02.2014).

Mankiw N.G., Romer D., Weil D.N. (1992, May). *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, „The Quarterly Journal of Economics", s. 407–437.

Mroczek K., Nowosad A., Tokarski T. (2015). *Oddziaływanie efektu grawitacyjnego na zróżnicowanie wydajności pracy w krajach bałkańskich*, „Gospodarka Narodowa", (276) 2, s. 15–53.
Mroczek K., Tokarski T. (2014). *Efekt grawitacyjny a zróżnicowanie wydajności pracy w krajach Unii Europejskiej* [w:] D. Appenzeller (red.), *Matematyka i informatyka na usługach ekonomii. Analityka gospodarcza. Metody i narzędzia*. Poznań: Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, s. 94–116.
Mroczek K., Tokarski T., Trojak M. (2014). *Grawitacyjny model zróżnicowania rozwoju ekonomicznego województw*, „Gospodarka Narodowa", (271) 3, s. 5–34.
Nonneman W., Vanhoudt P. (1996). *A Further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economic Growth for the OECD Countries*, „Quarterly Journal of Economics", (111) 3, s. 943–953.
Ombach J. (1999). *Wykłady z równań różniczkowych wspomagane komputerowo – Maple*. Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.
Ostoja-Ostaszewski A. (1996). *Matematyka w ekonomii. Modele i metody*, t. 2. *Elementarny rachunek różniczkowy*. Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.
Panek E. (1986). *Optymalne trajektorie wzrostu w zagregowanych modelach ekonomicznych*, „Zeszyty Naukowe AE w Poznaniu", seria II, 82. Poznań: Akademia Ekonomiczna w Poznaniu.
Panek E. (2003). *Ekonomia matematyczna*. Poznań: Akademia Ekonomiczna w Poznaniu.
Panek E. (red.) (2011). *Wzrost gospodarczy. Teoria. Rzeczywistość*, „Zeszyty Naukowe", 176. Poznań: Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.
Phelps E.S. (1961). *The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen*, „American Economic Review", (51) 1, s. 638–643.
Phelps E.S. (1966). *Model of Technical Progress and the Golden Rule of Research*, „Review of Economic Studies", (33) 2, s. 133–145.
Pulliainen K. (1963). *A World Trade Study. An Econometric Model of the Pattern of Commodity Flows in International Trade in 1948–1960*, „Ekonomiska Samfundet Tidskrift", 17, s. 78–91.
Romer D. (1996). *Advanced Macroeconomics*. New York: McGraw-Hill.
Romer P.M. (1986). *Increasing Returns and Long-Run Growth*, „The Journal of Political Economy", (94) 5, s. 1002–1037.
Romer P.M. (1990). *Endogenous Technological Change*, „The Journal of Political Economy", (98) 5, cz. 2 (S71–S102).
Roszkowska S. (2004). *Inwestycje a wzrost gospodarczy w krajach OECD*, praca magisterska napisana w Katedrze Ekonomii Uniwersytetu Łódzkiego pod kierunkiem T. Tokarskiego.
Roszkowska S. (2013). *Kapitał ludzki a wzrost gospodarczy w Polsce*. Łódź: Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.
Snowdon B., Vane H. (2003). *Rozmowy z wybitnymi ekonomistami*. Warszawa: Wydawnictwo PTE-Bellona.
Snowdon B., Vane H., Wynarczyk P. (1998). *Współczesne nurty teorii makroekonomii*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
Solow R.M. (1956). *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, „The Quarterly Journal of Economics", (70) 1, s. 65–94.
Solow R.M. (1988). *Growth Theory and After*, „The American Economic Review", (78) 3, s. 307–317.
Swan T.W. (1956). *Economic Growth and Capital Accumulation*, „Economic Record", (32) 2, s. 334–361.
Tinbergen J. (1962). *Shaping the World Economy: Suggestions for an International Economic Policy*. New York: The Twentieth Century Fund.

Tokarski T. (2001). *Dwadzieścia lat renesansu teorii wzrostu gospodarczego. Na ile lepiej rozumiemy jego mechanizm?* [w:] A. Wojtyna (red.), *Ewolucja keynesizmu a główny nurt ekonomii*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Tokarski T. (2003). *On the Long-Run Monetary Policy Rules in the Domar-Solow Type of Economy* [w:] W. Welfe, A. Welfe (red.), *Macromodels 2002, Proceedings of the Twenty Ninth International Conference Macromodels*. Łódź: University of Lodz.

Tokarski T. (2009). *Matematyczne modele wzrostu gospodarczego (ujęcie neoklasyczne)*. Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Tokarski T. (2011). *Ekonomia matematyczna. Modele makroekonomiczne*. Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.

Welfe W., Świeszewska I. (red.) (2013). *Systemy modeli gospodarki narodowej opartej na wiedzy*, „Acta Universitatis Lodziensis. Folia Oeconomica" 294. Łódź: Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.

Welfe W., Wdowiński P. (red.) (2004). *Modelling Economies in Transition. Proceedings of the Eight Conference of International Association AMFET, Warsaw, December 3–6, 2003*, Łódź.

Welfe W., Welfe A. (red.) (2003). *Macromodels 2002, Proceedings of the Twenty Ninth International Conference Macromodels*. Łódź: University of Lodz.

Wojtyna A. (1997a). *Nowy keynesizm w strukturze myśli ekonomicznej lat 80. i 90. (Część I)*, „Gospodarka Narodowa", 9, s. 1–15.

Wojtyna A. (1997b). *Nowy keynesizm w strukturze myśli ekonomicznej lat 80. i 90. (Część II)*, „Gospodarka Narodowa", 10, s. 1–18.

Wojtyna A. (2000). *Ewolucja keynesizmu a główny nurt ekonomii*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Wojtyna A. (red.) (2001). *Czy ekonomia nadąża z wyjaśnianiem rzeczywistości?*, VII Kongres Ekonomistów Polskich, t. I. Warszawa: Wydawnictwo PTE-Bellona.