

Streszczenie
“Arytmetyczne własności funkcji A -partycji”
Krystian Gajdzica

Teoria partycji stanowi nieodłączną część kombinatoryki i teorii liczb, która zajmuje się badaniem możliwych reprezentacji liczby całkowitej n za pomocą sumy liczb naturalnych dodatnich. Przypomnijmy, że przez partycję $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j)$ liczby całkowitej n rozumiemy dowolny nierosnący ciąg $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_j$ liczb naturalnych dodatnich o tej własności, że

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j.$$

Ponadto dwie partycje uważamy za jednakowe, jeżeli różnią się wyłącznie kolejnością swoich składowych. Funkcja partycji $p(n)$ określa liczbę wszystkich możliwych partycji n .

Funkcja partycji $p(n)$ była po raz pierwszy intensywnie badana przez Eulera w XVIII wieku, który udowodnił między innymi, że liczba partycji liczby naturalnej n o składowych nieparzystych jest równa liczbie partycji liczby n o składowych różnych. Co więcej, Euler wyprowadził wzór na funkcję tworzącą $p(n)$ postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}.$$

Współcześnie teoria partycji stanowi nieodłączną część nie tylko matematyki, ale i innych dziedzin nauki. Dla przykładu, tożsamości Rogersa-Ramanujana są bezpośrednio związane z rozwiązaniami tak zwanego modelu „hard hexagon” w mechanice statystycznej [2, 3]. Partycje znajdują zastosowanie także w chemii molekularnej, krystalografii oraz mechanice kwantowej.

Istnieje wiele różnych możliwości na uogólnienie funkcji partycji $p(n)$. W szczególności możemy ustalić zbiór (lub ogólniej multizbiór) A liczb całkowitych dodatnich i brać pod uwagę wyłącznie te partycje liczby naturalnej n , których składowe należą do A . Partycje takiego typu nazywamy A -partycjami, natomiast funkcję je zliczającą oznaczamy przez $p_A(n)$. W tym przypadku okazuje się, że funkcja tworząca dla $p_A(n)$ jest postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_A(n)x^n = \prod_{a \in A} \frac{1}{1 - x^a}. \quad (1)$$

Dla przykładu, biorąc $A = \mathbb{N}_+$ otrzymujemy, że $p_{\mathbb{N}_+}(n) = p(n)$.

W połowie ubiegłego dziesięciolecia rozpoczęły się intensywne badania poświęcone tak zwanemu log-zachowaniu funkcji partycji $p(n)$ oraz jej różnym wariantom. W 2015 roku DeSalvo i Pak [5] udowodnili rezultat wcześniej uzyskany przez Nicolasa [17] mówiący, że funkcja $p(n)$ jest log-wklęsła dla wszystkich $n \geq 26$. Innymi słowy, nierówność

$$p^2(n) > p(n+1)p(n-1)$$

jest spełniona dla każdej liczby całkowitej $n > 25$. Od tamtej pory log-wklęsłość została sprawdzona dla wielu różnych wariantów funkcji $p(n)$. Niemniej jednak, spektrum log-zachowania nie ogranicza się wyłącznie do powyższej nierówności. Innym ciekawym zagadnieniem jest tak zwana nierówność Bessenrodt-Ono.

W roku 2016 Bessenrodt oraz Ono udowodnili, że funkcja partycji $p(n)$ spełnia nierówność postaci

$$p(a)p(b) > p(a+b)$$

dla wszystkich takich $a, b \geq 2$, że $a + b > 9$. Powyższy rezultat był motywacją do badania analogicznych właściwości dla innych wariantów funkcji partycji.

Istnieje również wiele innych znaczenie głębszych problemów związanych z log-zachowaniem. Pierwszym z nich jest tak zwana r -log-wklęsłość, która jest swego rodzaju iteracją problemu log-wklęsłości. Kolejnym zagadnieniem tego typu są tak zwane nierówności Turána wyższych rzędów, które są bezpośrednio związane z hiperbolicznością wielomianów Jensena związanych z daną funkcją partycji. Następnym interesującym zagadnieniem związanym z log-zachowaniem są nierówności Laguerrea wyższych rzędów, które z kolei powiązane są z klasą Laguerrea-Pólyi. Ze względu na złożoność wyżej wymienionych zagadnień, nie przedstawiamy w streszczeniu szczegółów, lecz zwracamy uwagę, że były one intensywnie badane w przypadku funkcji $p(n)$ i kilku jej wariantów.

Z zagadnień o charakterze dyskretnym można przejść na zagadnienia typu ciągłego przez rozpatrywanie pewnej szczególnej rodziny wielomianów związanych z daną funkcją A -partycji. Dokładniej, biorąc funkcję tworzącą funkcji $p(n)$ do potęgi x otrzymamy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^n)^x},$$

gdzie $P_n(x)$ jest wielomianem stopnia n o współczynniku wiodącym równym $1/n!$. Wielomiany $P_n(x)$ były intensywnie studiowane przez Heima i Neuhasera, którzy przedstawili wielomianową wersję nierówności Bessenrodt-Ono [14]. Dokładniej, udowodnili, iż nierówność

$$P_a(x)P_b(x) > P_{a+b}(x)$$

jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych dodatnich a i b takich, że $a + b > 2$, oraz $x > 2$. Warto w tym miejscu wspomnieć, że podobne wyniki zostały uzyskane w przypadku tak zwanej dwuwymiarowej funkcji partycji [15] oraz dla „overpartition function” [16].

Niniejsza rozprawa doktorska poświęcona jest arytmetycznym własnościom funkcji A -partycji oraz jej uogólnieniom.

W Rozdziale 1 ustalamy odpowiednią notację, wprowadzamy podstawowe definicje oraz przedstawiamy własności, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy.

Rozdział 2 poświęcony jest log-zachowaniu funkcji A -partycji w przypadku, gdy A jest skończonym multizbiorem liczb całkowitych dodatnich. Rozdział bazuje na trzech pracach Gajdzicy [7, 8, 9].

Na początku tego rozdziału zajmujemy się badaniem nierówności typu Bessenrodt-Ono dla funkcji $p_A(n)$. Innymi słowy, rozważamy, jakie warunki musi spełniać multizbiór A , aby zachodziła nierówność postaci

$$p_A(a)p_A(b) > p_A(a + b)$$

dla odpowiednio dużych wartości a oraz b . Naszym głównym celem jest udowodnienie, że powyższa własność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\gcd(A) = 1$ oraz $\#A \geq 2$.

Następnie przechodzimy do bardziej skomplikowanego zagadnienia log-wklęsłości funkcji A -partycji. Chcemy wykazać, że

$$p_A^2(n) > p_A(n + 1)p_A(n - 1)$$

jest spełniona dla dostatecznie dużych wartości parametru n wtedy i tylko wtedy, gdy $\gcd(B) = 1$ dla każdego $(\#A - 2)$ -elementowego podmultizbioru B multizbioru A oraz $\#A \geq 2$.

W następnym kroku przechodzimy do podstawowych uogólnień własności log-wklęsłości. Na tym etapie dążymy do wyprowadzenia odpowiednich kryteriów na zachodzenie nierówności postaci

$$\begin{aligned} p_A^2(n) &> p_A(n+m)p_A(n-m), \\ p_A^2(n) &> \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) p_A(n-1)p_A(n+1), \\ \left(\frac{p_A(n)}{n^\alpha}\right)^2 &> \frac{p_A(n+1)p_A(n-1)}{(n^2-1)^\alpha} \end{aligned}$$

dla odpowiednio dużych wartości parametru n , gdzie $m \geq 1$ jest liczbą całkowitą zaś $\alpha > 0$ dowolną liczbą rzeczywistą.

Na końcu Rozdziału 2 zajmujemy się najbardziej złożonymi uogólnieniami własności log-wklęsłości. Tutaj badamy r -log-wklęsłość, nierówności Turána wyższych rzędów oraz nierówności Laguerrea wyższych rzędów dla funkcji A -partycji $p_A(n)$ oraz funkcji, tak zwanego, typu kwazi-wielomianowego.

Warto w tym miejscu wspomnieć, że zachowanie asymptotyczne funkcji $p_A(n)$ dla skończonego multizbioru A odgrywa w tym rozdziale niejednokrotnie kluczową rolę.

Rozdział 3 oparty jest na wspólnej pracy Gajdzicy i in. [13] oraz dotyczy nierówności typu Bessenrodt-Ono, własności log-wklęsłości, a także powiązań pomiędzy tymi własnościami. Ze względu na fakt, że dla przypadku $\#A = \infty$ wiemy jedynie, że $p_A(n)$ asymptotycznie zachowuje się superwielomianowo, w tym rozdziale nie ograniczamy się do żadnych funkcji A -partycji, ale zakładamy, iż istnieje funkcja $F : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ taka, że nierówności

$$c_1(n)e^{f(n)} < F(n) < c_2(n)e^{f(n)}$$

są prawdziwe dla odpowiednio dużych wartości parametru n , gdzie $c_1, c_2, f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ są dowolne. Przy takich założeniach badamy, pod jakimi warunkami na powyższe przekształcenia zachodzi odpowiednia log-własność. W szczególności okazuje się, że właściwość log-wklęsłości często (ale nie zawsze) implikuje nierówność typu Bessenrodt-Ono.

W Rozdziale 4 raz jeszcze zajmujemy się badaniem nierówności typu Bessenrodt-Ono dla szerokiej klasy funkcji A -partycji. Tym razem zakładamy, że $A = \{a_i : 1 \leq i \leq k\}$ ($k = \infty$ jest dopuszczalne) jest zbiorem dodatnich liczb naturalnych takim, że $a_1 = 1$, $a_j < a_{j+1}$ dla każdego $j \in \mathbb{N}_+$ i $a_{l+1} - a_l \geq a_3$ dla wszystkich $l \geq 3$. Naszym celem jest udowodnienie kryterium na nierówności typu Bessenrodt-Ono dla funkcji $p_A(n)$ za pomocą rozumowania kombinatorycznego. Z otrzymanego rezultatu wywnioskujemy pożądaną własność dla m -arnej funkcji partycji $b_m(n)$ oraz potęgowej funkcji partycji $p_d(n)$.

Zawartość tego rozdziału w istotny sposób jest oparta na pracy Gajdzicy[10].

Rozdział 5 jest poświęcony wielomianowej wersji nierówności typu Bessenrodt-Ono dla funkcji A -partycji. Dokładniej, wprowadzamy tutaj rodzinę wielomianów $f_{A,n}(x)$ przez funkcję tworzącą postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{A,n}(x) q^n = \prod_{a \in A} \left(\frac{1}{1 - q^a} \right)^x.$$

Z tego względu otrzymujemy, że $f_{A,n}(1) = p_A(n)$ dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n . Naszym pierwszym celem jest zbadanie nierówności

$$f_{A,a}(x)f_{A,b}(x) > f_{A,a+b}(x)$$

dla $a, b \in \mathbb{N}_+$ i $x > 0$. Następnie przejdziemy do uogólnienia powyższego problemu na rodzinę wielomianów $f_{g,n}(x)$ zdefiniowaną wzorem rekurencyjnym postaci

$$\begin{cases} f_{g,0}(x) &= 1, \\ f_{g,n}(x) &= \frac{x}{n} \sum_{j=1}^n g(j) f_{g,n-j}(x) \text{ dla } n \geq 1, \end{cases}$$

gdzie $(g(n))_{n \in \mathbb{N}_+}$ jest ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych. Ten rozdział jest oparty na pracach Gajdzicy i in. [11, 12].

Rozdział 6 oparty na pracy Gajdzicy [6] jest niezależny od poprzednich i poświęcony badaniom własności podzielności funkcji A -partycji w przypadku, gdy A jest multizbiorem skończonym. Naszym głównym celem jest wyprowadzenie oszacowania zarówno dolnego, jak i górnego na tak zwaną nieparzystą gęstość $p_A(n)$, czyli wartość wyrażenia

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : p_A(n) \equiv 1 \pmod{2}\}}{N}.$$

Po czym przejdziemy do szczególnego przypadku i rozważymy własności arytmetyczne skończonego analogonu funkcji m -arnej. W szczególności otrzymamy tutaj odpowiednik znanego twierdzenia Alkauskasa [1].

Literatura

- [1] G. Alkauskas, *m-nariniai skaidiniai*, DOI: 10.13140/RG.2.2.23219.12321.
- [2] G. E. Andrews, *The hard-hexagon model and Rogers-Ramanujan type identities*, Proc. Nat. Acad. Sci. 78 (1981), 5290–5292.
- [3] R. J. Baxter, *Hard hexagons: exact solution*, J. Phys. A 13 (1980), 161—170.
- [4] C. Bessenrodt, K. Ono, *Maximal multiplicative properties of partitions*, Ann. Comb. 20 (1) (2016), 59–64.
- [5] S. DeSalvo, I. Pak, *Log-concavity of the partition function*, Ramanujan J. 38 (2015), 61–73.
- [6] K. Gajdzica, *A note on the restricted partition function $p_A(n, k)$* , Discrete Math. 345 (2022), 112943.
- [7] K. Gajdzica, *Log-concavity of the restricted partition function $p_A(n, k)$ and the new Bessenrodt–Ono type inequality*, J. Number Theory 251 (2023), 31–65.
- [8] K. Gajdzica, *Restricted partition functions and the r -log-concavity of quasi-polynomial-like functions*, <https://arxiv.org/abs/2305.00085> (2023).
- [9] K. Gajdzica, *The Turán and Laguerre inequalities for quasi-polynomial-like functions*, Res. Number Theory, to appear.
- [10] K. Gajdzica, *On the Bessenrodt–Ono type inequality for a wide class of A -partition functions*, <https://arxiv.org/abs/2401.16267> (2024).
- [11] K. Gajdzica, B. Heim, M. Neuhauser, *Polynomization of the Bessenrodt–Ono Type Inequalities for A -Partition Functions*, Annals of Combinatorics (2024), <https://doi.org/10.1007/s00026-024-00692-4>.

- [12] K. Gajdzica, B. Heim, M. Neuhauser, B. Žmija, *On the Bessenrodt-Ono inequality for a special class of polynomials*, work in progress.
- [13] K. Gajdzica, P. Miska, M. Ulas, *On general approach to Bessenrodt-Ono type inequalities and log-concavity property*, <https://arxiv.org/abs/2312.14501> (2023).
- [14] B. Heim, M. Neuhauser, R. Tröger, *Polynomization of the Bessenrodt-Ono inequality*, *Ann. Comb.* 24 (2020), 697—709.
- [15] B. Heim, M. Neuhauser, R. Tröger, *Inequalities for Plane Partitions*, *Ann. Comb.* 27 (2023), 87–108.
- [16] X. Li, *Polynomization of the Liu–Zhang inequality for the overpartition function*, *Ramanujan J.* 62 (2023), 797–817.
- [17] J.-L. Nicolas, *Sur les entiers N pour lesquels il y a beaucoup des groupes abéliens d’ordre N* , *Ann. Inst. Fourier* 28 No. 4 (1978), 1–16.