Wahadło odwrócone

Tomasz Kawalec[1]

Instytut Fizyki im. Mariana Smoluchowskiego UJ

Wstęp

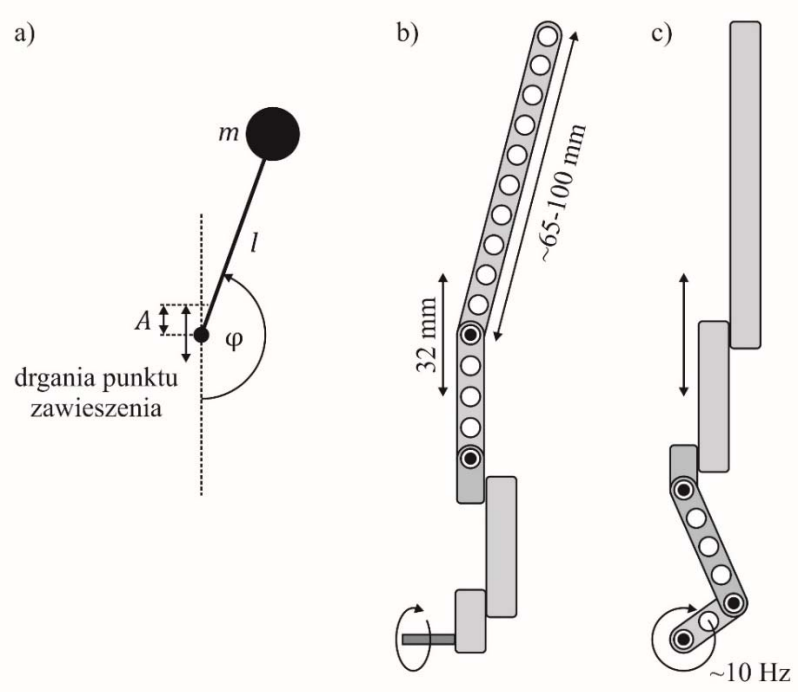
Wszyscy jesteśmy przyzwyczajeni do pojęcia wahadła matematycznego czy fizycznego. Wiemy dobrze, że ma ono jedno położenie równowagi trwałej – gdy znajduje się w swoim najniższym położeniu, wokół którego może oscylować. Okazuje się jednak, że wprowadzając pewne modyfikacje, wahadło można ustabilizować w jeszcze jednym, nieintuicyjnym położeniu – w pozycji odwróconej, czyli „do góry nogami", gdy środek masy wahadła znajduje się powyżej punktu jego zawieszenia. Wahadło takie nazywamy wahadłem odwróconym. Istnieje kilka metod na uzyskanie tego stanu równowagi. Jedna z nich to zamocowanie punktu zaczepienia wahadła na poziomym stoliku przesuwnym. Monitorując kąt chwilowego odchylenia wahadła od pionu, układ sterowania tak koryguje położenie stolika w kierunku poziomym, aby przesunąć punkt podparcia z powrotem pod środek masy wahadła. Inna metoda stabilizacji jest znana z dwukołowych pojazdów Segway oraz nowszych urządzeń – jednokołowych. Segway jest z jednej strony dicyklem (ma dwa koła, ale obok siebie, a nie jedno za drugim, jak w rowerze), a z drugiej strony – właśnie wahadłem odwróconym. W tym przypadku wychylenie przód-tył jest dynamicznie kompensowane działaniem silników napędzających koła. Działający przykład modelu napędu Segway, zbudowany z klocków LEGO Mindstorms, został przedstawiony na końcu tego artykułu. Kolejna metoda stabilizacji, opisana poniżej, polega na wprawieniu w szybkie drgania w pionie punktu zawieszenia wahadła. Taki rodzaj wahadła odwróconego nazywamy wahadłem Kapicy – od nazwiska Piotra Leonidowicza Kapicy – rosyjskiego fizyka, który podał matematyczny opis ruchu takiego układu. Nawiasem mówiąc, Piotr Kapica został laureatem Nagrody Nobla w roku 1978 za odkrycie nadciekłości helu. Co ciekawe, wahadłem odwróconym jesteśmy w zasadzie my sami, a równowagę utrzymujemy dzięki odpowiedniemu ciągłemu napinaniu mięśni.

W tym artykule przedstawiam szkic opisu matematycznego oraz konstrukcję prostego wahadła odwróconego, zbudowanego z popularnego zestawu klocków LEGO Mindstorms lub klasycznego zestawu LEGO Technic. Mam nadzieję, że zachęcę Czytelników do przeprowadzenia własnych eksperymentów.

[1] tomasz.kawalec@uj.edu.pl

Krótki opis matematyczny

Model naszego wahadła odwróconego przedstawiono na rys. 1 a). Jest to wahadło, którego punkt zawieszenia drga w pionie z amplitudą A i częstotliwością f (częstością $\omega = 2\pi f$), a kąt wychylenia wahadła względem pozycji spoczynkowej (czyli względem zwykłego położenia równowagi) wynosi φ. Długość wahadła to l, a ze względu na fakt, że w rzeczywistości będziemy mieli do czynienia z wahadłem fizycznym, a nie modelowym wahadłem matematycznym, l będzie długością zredukowaną tego wahadła.



Rys. 1. a) model wahadła odwróconego, b) i c) schematy głównej części wahadła zrealizowanego z klocków LEGO Mindstorms – widok z przodu i z boku

Równanie ruchu ma postać:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{l}(g + A\omega^2 \cos\omega t)\sin\varphi(t), \quad \omega = 2\pi f, \tag{1}$$

gdzie g to wartość przyspieszenia ziemskiego. Zauważmy, że gdy w tym równaniu przyjmiemy $A = 0$, otrzymujemy znane nam równanie ruchu wahadła matematycznego. Człon $A\omega^2\cos\omega t$ opisuje drgania punktu zawieszenia wahadła w taki sposób, jakby periodycznie było modyfikowane przyspieszenie grawitacyjne g. Sytuacja jest analogiczna do tej znanej nam z przyspieszającej lub hamującej windy. Tu jednak przyspieszanie i hamowanie jest szybkie i periodyczne.

Równanie (1) nie ma prostego rozwiązania w postaci konkretnych wzorów, ale można je łatwo rozwiązać numerycznie, na przykład przy pomocy programu Wolfram *Mathematica*. Aby jednak móc lepiej zrozumieć zachowanie się wahadła odwróconego, dokonamy przybliżeń i wyliczymy łatwy w interpretacji tak zwany potencjał efektywny. Zakładamy, że amplituda drgań A jest znacznie mniejsza niż długość wahadła l oraz że częstotliwość f drgań punktu zawieszenia jest znacznie większa niż częstotliwość drgań własnych (swobodnych) wahadła. Wtedy kąt wychylenia φ możemy rozbić na dwie składowe – „szybką", związaną wprost z drganiami punktu zawieszenia i „powolną", która odzwierciedla ruch całego wahadła, bez uwzględniania szczegółów związanych z jego szybkimi drganiami. Nas interesuje tutaj jedynie składowa „powolna" φ_S. Przybliżone równanie na tę składową jest następujące:

$$\ddot{\varphi}_S = -\frac{g}{l}\sin\varphi_S - \frac{1}{2}\left(\frac{A\omega}{l}\right)^2 \sin\varphi_S \cos\varphi_S. \tag{2}$$

Równanie (2) można zapisać w prostszej postaci:

$$ml^2\ddot{\varphi}_S = -\frac{\partial U}{\partial \varphi_S}, \tag{3}$$

gdzie U to tak zwany potencjał efektywny:

$$U = -mgl\cos\varphi_S + \frac{mA^2\omega^2}{4}\sin^2\varphi_S. \tag{4}$$

Zależność potencjału efektywnego od kąta φ_S daje nam cenną informację o tym, czy istnieją, a jeśli tak, to dla jakich parametrów, położenia równowagi wahadła – a w szczególności położenia równowagi trwałej. Jak wiemy, w minimum potencjału mamy równowagę trwałą, a w maksimum – chwiejną. Wyliczamy więc najpierw pierwszą, a potem drugą pochodną z U po φ_S:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_S{}^2} = mgl\cos\varphi_S + \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos 2\varphi_S. \tag{5}$$

Lokalne minima potencjału dla kątów φ_S równych…, −180°, 180°, … (czyli dla położenia odwróconego) istnieją, gdy spełniona jest nierówność:

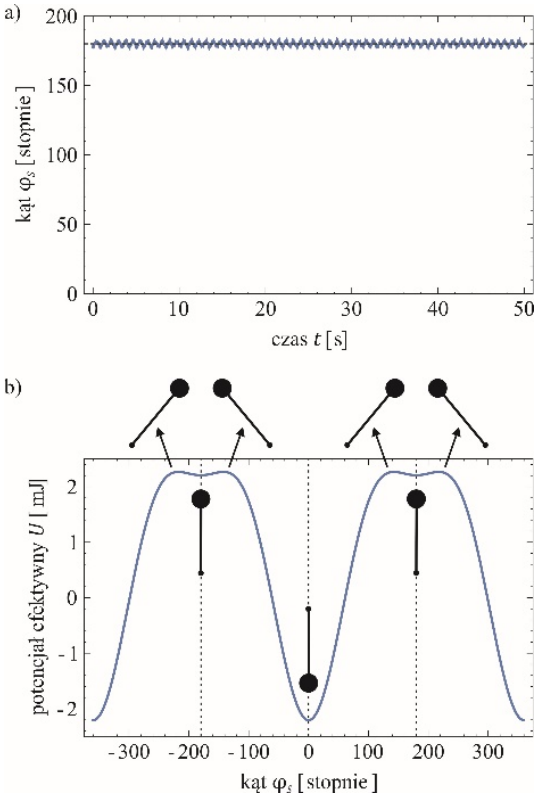
$$A^2\omega^2 > 2gl. \tag{6}$$

Proste przekształcenia dają nam wartość graniczną (minimalną) częstotliwości, z jaką musi drgać punkt zawieszenia wahadła, aby można je było ustabilizować w pozycji odwrotnej:

$$f_{gr} = \frac{1}{2\pi A}\sqrt{2gl}. \tag{7}$$

Widzimy, że im krótsze wahadło lub większa amplituda drgań, tym graniczna częstotliwość drgań f_{gr} jest niższa – i w prostym układzie mechanicznym łatwiejsza do uzyskania.

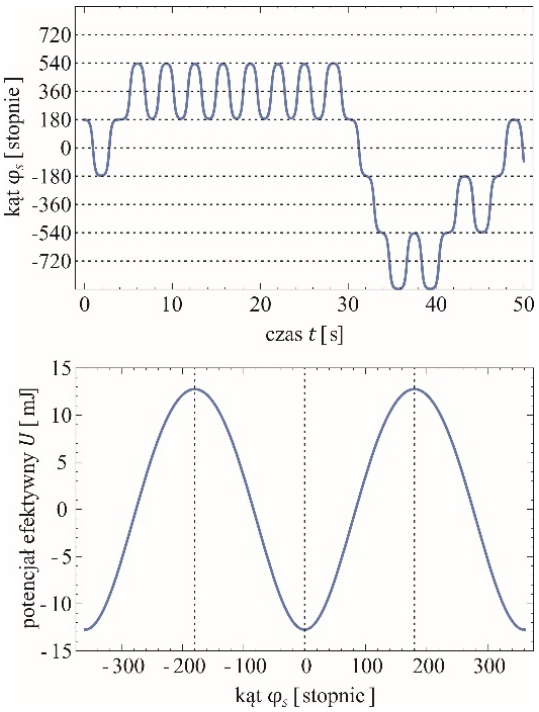
W poniższych obliczeniach przyjąłem parametry odpowiadające opisanemu w dalszej części układowi rzeczywistemu. Częstotliwość drgań to 10,5 Hz, amplituda drgań to 16 mm, a długość zredukowana wahadła to 45 mm (częstotliwość drgań własnych wahadła to 2,4 Hz). Masa ramienia to 5 g – wpływa jedynie na wartość potencjału efektywnego, ale nie na jego kształt. Na początku ruchu wahadło ma prędkość kątową zero ($\dot{\varphi}_S = 0$). Częstotliwość graniczna f_{gr} to 9,3 Hz – ze wzoru 7. Widzimy tutaj, że dla takich parametrów, przybliżenia potrzebne do wyprowadzenia wzoru (2) nie są bardzo dobrze spełnione, niemniej otrzymane wyniki pozwalają na lepsze zrozumienie fizyki wahadła odwróconego. Na rys. 2 a) przedstawiono wykres zależności „powolnej" składowej kąta wychylenia wahadła od czasu – rozwiązanie równania (1), a na rys. 2 b) – wykres potencjału efektywnego – równanie (4).



Rys. 2. a) „powolna" składowa kąta wychylenia wahadła w funkcji czasu; b) efektywny potencjał wahadła w funkcji „powolnej" składowej kąta wychylenia dla przypadku spełnienia warunku stabilizacji w ustawieniu odwróconym

Na początku wahadło zostało ustawione w pobliżu położenia odwróconego (prawie 180°) i blisko tej pozycji pozostaje. Małe oscylacje wahadła w położeniu odwróconym, widoczne na rys. 2 a), to drgania wokół nowego położenia równowagi, a ich amplituda zależy od początkowego wychylenia wahadła od pozycji odwróconej. Wyjaśnienie znajdujemy w przebiegu potencjału efektywnego U. Oprócz znanego nam dobrze minimum w położeniu dolnym (…, −360°, 0°, 360°, …), odpowiadającego dolnemu położeniu równowagi, pojawiło się dodatkowe minimum dla ustawienia odwróconego (nieparzyste wielokrotności 180°). Z wykresu potencjału widzimy też, że dla założonych tutaj parametrów, wychylenie może wynosić maksymalnie nawet około 40°, licząc względem pozycji odwróconej. Symbolizują to przechylone wahadła w górnej części rys. 2 b).

Zobaczmy teraz, co się dzieje, gdy częstotliwość drgań punktu zawieszenia wahadła jest za mała. Na rys. 3 przedstawiono wyniki obliczeń dla częstotliwości drgań f = 10,5 Hz i długości zredukowanej wahadła 260 mm. Dla tej długości częstotliwość graniczna wynosi 22,5 Hz. Dla ułatwienia analizy zachowania wahadła, poziomymi kreskowanymi liniami zaznaczono położenia równowagi – zwykłe (…, −360°, 0°, 360°, …) i odwrócone (…, −180°, 180°, …).

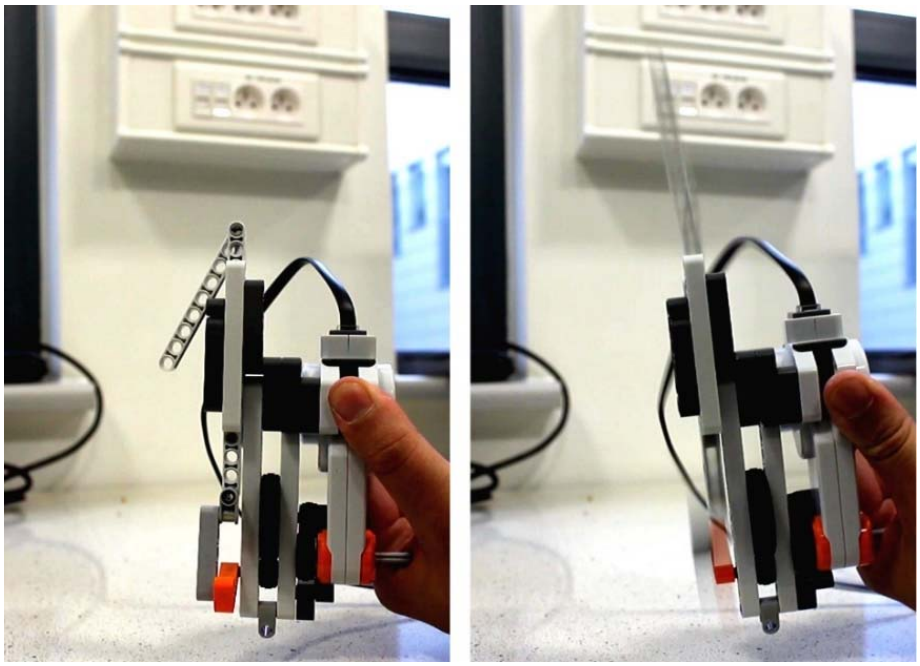


Rys. 3. Wykresy analogiczne do tych z rys. 2, ale dla przypadku, w którym stabilizacja w ustawieniu odwróconym nie zachodzi

Widzimy, że wahadło nie stabilizuje się w pozycji odwróconej, mimo że początkowo tak jest ustawiane (180°). Zamiast tego, wykonuje prawie pełne obroty wokół zwykłych położeń równowagi, co jakiś czas wykonując pełny obrót wokół punktu zawieszenia – na przykład w 4, 30 , 32, … sekundzie. Przebieg potencjału efektywnego faktycznie pokazuje, że jedyne minima to te odpowiadające położeniu dolnemu. Szczegóły zachowania wahadła przedstawione na rys. 3 a), takie jak chwile wykonania pełnego obrotu czy liczba wykonanych pełnych obrotów, bardzo zależą od parametrów początkowych – początkowego kąta czy częstotliwości drgań punktu zawieszenia.

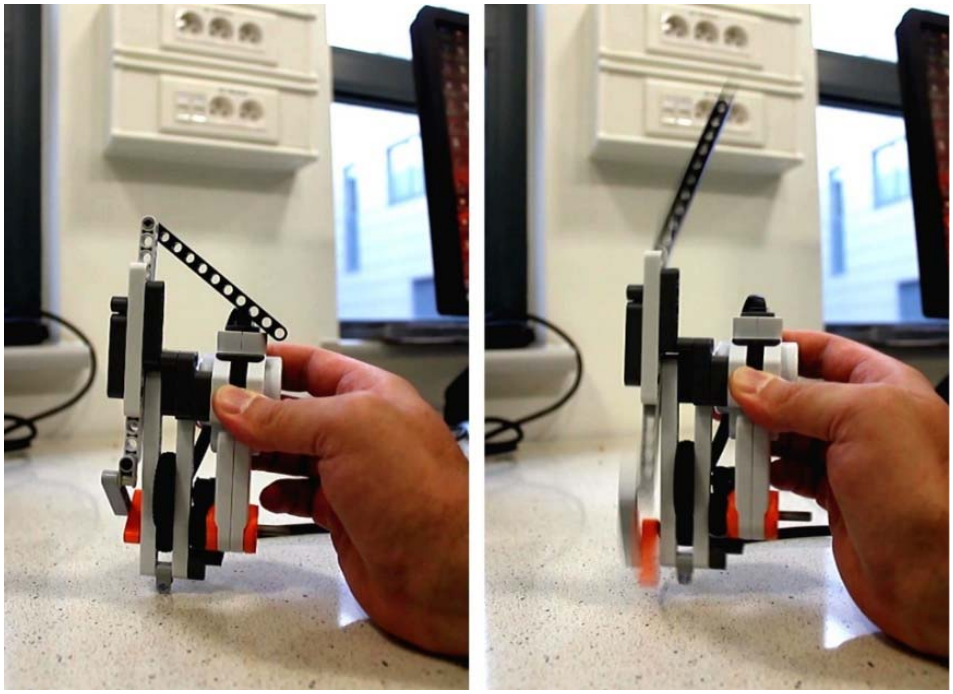
Realizacja wahadła Kapicy z klocków LEGO

Na rys. 1 b) i c) naszkicowana została główna część wahadła Kapicy zbudowanego z zestawu LEGO Mindstorms NXT. Z kolei na rys. 4 i 5 oraz filmie [1], dołączonym do artykułu w wersji *on-line*, widzimy zdjęcia całego układu oraz jego działanie.



Rys. 4. Układ do demonstracji wahadła odwróconego przy wyłączonych drganiach (po lewej) i z drganiami (po prawej). Stabilizacja jest utrzymywana nawet w przypadku lekkiego odchylenia całego układu od pionu

Całość składa się z silnika, dwóch połączonych szeregowo przekładni zębatych o przełożeniach 3:5 i 1:3, łączników oraz kilkunastu podłużnych klocków, dla których w terminologii polskich fanów LEGO przyjęła się nazwa „belka", będąca bezpośrednim tłumaczeniem angielskiej nazwy *beam*. Jedna z belek jest ramieniem wahadła. W naszym przykładzie rzeczywista długość ramienia, licząc od punktu zawieszenia, wynosiła 67 oraz 84 mm (belki „9" i „11"). Ponadto, ramię o długości 100 mm (belka „13") było używane z innym typem silnika – patrz sekcja „Uwagi praktyczne".



Rys. 5. Wahadło podobne do tego z rys. 4, ale z dłuższym ramieniem. Częstotliwość drgań punktu zawieszenia wahadła jest już na granicy warunku stabilizacji

Do rachunków, a szczególnie do obliczenia potrzebnej minimalnej częstotliwości drgań f_{gr}, potrzebna jest długość zredukowana wahadła l. W praktyce, pomiaru tej długości najłatwiej dokonać mierząc okres T jego drgań swobodnych:

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}. \tag{8}$$

Znaleziona w ten sposób długość zredukowana to 45 i 55 mm dla belki „9" i „11".

Okazuje się, że są to wartości bardzo bliskie długości zredukowanej wyliczonej dla cienkiego, jednorodnego pręta o długości rzeczywistej d, zawieszonego na jednym z jego końców:

$$l = \frac{2}{3} d. \tag{9}$$

Częstotliwość graniczna f_{gr}, obliczona ze wzoru (7) wynosi 9,1 Hz dla długości zredukowanej 45 mm i 10,1 Hz dla 55 mm. Przekładnie zapewniają zwiększenie częstotliwości obrotów silnika o czynnik 5. Nieobciążony silnik NXT wykonuje około 2,8 obrotu na sekundę, a w naszym wahadle – około 2 obroty na sekundę. W połączeniu z przekładniami daje to częstotliwość drgań punktu zawieszenia wahadła 10,4 Hz. Wartość ta została znaleziona przez analizę klatek filmu oraz bezpośredni pomiar liczby obrotów silnika przy pomocy sterownika NXT. Niestety, ze względu na relatywnie duże tarcie pomiędzy belką wahadła a punktem zawieszenia, oscylacje przewidziane w lewej części rys. 2 są praktycznie nie do zaobserwowania.

Uwagi praktyczne

Po włączeniu silnika ramię wahadła zazwyczaj trzeba ręcznie obrócić do pozycji pionowej. Trzeba też pamiętać o używaniu w pełni naładowanych baterii lub akumulatorów, ponieważ częstotliwość drgań jest niewiele większa niż częstotliwość graniczna f_{gr}.

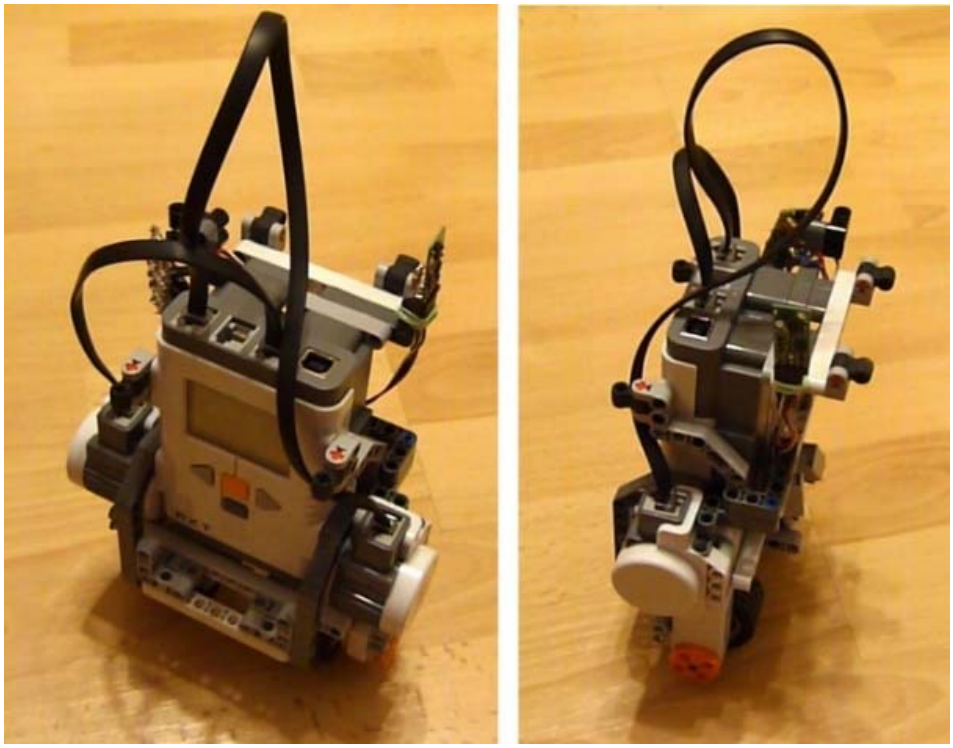
Wahadło odwrócone można również zrealizować z użyciem silników z klasycznej serii LEGO Technic Power Functions, które mają większą prędkość obrotową niż te z serii Mindstorms NXT czy EV3 (kosztem niższego momentu obrotowego). Przykładowo, silnik „Large” pozwolił na bardzo dobrą stabilizację wahadła odwróconego o rzeczywistej długości ramienia 100 mm (belka „13”). Zachęcam do eksperymentowania z różnymi typami napędów.

Przedstawiona tutaj prosta konstrukcja mocno drga podczas pracy, pogarszając stabilizację wahadła odwróconego. Aby temu zapobiec, wystarczy mocno docisnąć układ do stołu – zmniejsza to wibracje, a także redukuje obciążenie silnika, powodując delikatne zwiększenie jego prędkości obrotowej.

Wahadło typu Segway

Jako ciekawostkę na rys. 6 oraz na filmie [2] przedstawiono mały pojazd podobny do wózka Segway. Pojazd jest stabilizowany niewielkimi ruchami silników pracujących w pętli sprzężenia zwrotnego z czujnikiem wychylenia. Niestety, nie jest on dołączany do podstawowego zestawu NXT czy EV3. Czujnik taki można dokupić gotowy (nadający się wprost do użycia ze sterownikiem NXT lub EV3) lub – w przypadku znajomości podstaw elektroniki i programowania mikrokontrolerów – skonstruować samemu na bazie scalonego żyroskopowego miernika

prędkości kątowej, na przykład L3GD20H czy LSM6DS33. Wiele wyczerpujących opisów konstrukcji tego typu wahadła oraz przykładów oprogramowania można znaleźć w Internecie – tutaj również zachęcam do eksperymentowania.



Rys. 6. Realizacja wahadła odwróconego typu Segway z klocków LEGO Mindstorms

Filmy *on-line*:
[1] http://coldatoms.com/foton/wahadlo_odwrocone_LEGO.avi
[2] http://coldatoms.com/foton/segway_LEGO.avi