Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego

Sylwia Barnaś

Istnienie rozwiązań dla nierówności hemiwariacyjnych z $p(x)$-laplasjanem

Rozprawa doktorska
przygotowana pod kierunkiem
dra hab. Leszka Gasińskiego

Kraków 2014

Spis treści

Wstęp

W niniejszej pracy badamy istnienie rozwiązań dla pewnej klasy nieliniowych inkluzji różniczkowych typu eliptycznego modelowanych przy pomocy wielowartościowej subróżniczki Clarke'a. Nazywamy je nierównościami hemiwariacyjnymi, a ich badanie zostało zapoczątkowane przez Panagiotopoulosa w 1981 roku. Dzięki zastosowaniu pojęcia subróżniczki Clarke'a dla funkcji spełniającej lokalnie warunek Lipschitza, możliwe stało się badanie niewypukłych i niegładkich potencjałów, które pozwoliły na rozważanie niemonotonicznych i wielowartościowych praw rządzących zjawiskami fizycznymi.

Jednym z typów badanych inkluzji różniczkowych były zagadnienia z operatorem p-laplasjanu oraz z warunkiem brzegowym typu Dirichleta. W szczególności, uwaga została skierowana na zagadnienie postaci

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) - \lambda |u(x)|^{p-2}u(x) \in \partial j(x, u(x)) & \text{p.w. w } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

gdzie Ω jest otwartym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^N$ z gładkim brzegiem $\partial\Omega$ oraz $1 < p < \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$. W zagadnieniu (0.1) pojawia się również operator p-laplasjanu, który definiujemy jako

$$\Delta_p u := \operatorname{div}\Big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)$$

oraz superpotencjał $j(x,t)$, który jest mierzalny ze względu na pierwszą zmienną oraz spełnia lokalnie warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną. Przez $\partial j(x,t)$ rozumiemy subróżniczkę Clarke'a ze względu na zmienną t.

Nierówności hemiwariacyjne z p-laplasjanem typu (0.1) z warunkiem brzegowym typu Dirichleta lub Neumanna były rozważane między innymi w pracach Gasiński-Papageorgiou [24, 25, 26], Ge-Zhou [31], Papageorgiou-Rocha-Staicu [39], Halidias [32, 33], Iannizzotto-Papageorgiou [34]. Autorzy wykorzystywali różne techniki do wykazania istnienia rozwiązań wspomnianego zagadnienia, w szczególności takie jak teoria punktów krytycznych dla funkcji spełniających lokalnie warunek Lipschitza, zasadę wariacyjną Ekelanda, metodę Struwe'a, czy twierdzenia minimaksowe.

W późniejszym czasie, różni autorzy podejmowali się zadania uogólnienia zagadnienia z p-laplasjanem postaci (0.1) na zagadnienie z $p(x)$-laplasjanem. Wiązało się to z przejściem z przestrzeni $L^p(\Omega)$ na przestrzeń $L^{p(x)}(\Omega)$ jak i z przestrzeni Sobolewa $W^{1,p}(\Omega)$ na przestrzeń $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Przestrzenie te są zwane odpowiednio uogólnionymi przestrzeniami Lebesgue'a i uogólnionymi przestrzeniami Sobolewa. Teorią przestrzeni tego typu zajmowali się między innymi Orlicz [38], Musielak [37], Fan oraz Zhao [21], których badania dostarczyły niezbędną bazę do rozważania zagadnień wariacyjnych oraz nieliniowych równań eliptycznych. Wykazano szereg własności tych przestrzeni, takich jak twierdzenia o zanurzeniach, czy spełnianie nierówności Höldera oraz Poincarè'go. Okazało się, iż przejście z zagadnień z p-laplasjanem na zagadnienia z $p(x)$-laplasjanem nie jest automatyczne. Pewnych własności nie da się przełożyć w analogiczny sposób na przestrzenie uogólnione.

Celem niniejszej pracy jest badanie istnienia rozwiązań dla zagadnienia postaci

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u(x) - \lambda|u(x)|^{p(x)-2}u(x) \in \partial j(x, u(x)) & \text{p.w. w } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.2}$$

gdzie $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że $1 < p(x) < \infty$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$, zaś $\Delta_{p(x)}$ jest operatorem $p(x)$-laplasjanu (zobacz (2.1)). Szczegółowe założenia będą opisane w późniejszej części pracy. W przypadku p-laplasjanu wiemy, że pierwsza wartość własna jest dodatnia. W zagadnieniach z $p(x)$-laplasjanem tak nie jest tzn. pierwsza wartość własna może przyjmować wartość zerową (zobacz Fan-Zhang-Zhao [20]). Analogicznie do ilorazu Rayleigha zdefiniujmy wielkość

$$\lambda_* = \inf_{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)}dx}{\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx}.$$

Założenia na parametr λ występujący w zagadnieniu (0.2) będą podawały pewne związki z wyżej wprowadzonym λ_* (zobacz Rozdział 2.2).

W pracach, które pojawiły się do tej pory, rozważano zagadnienie (0.2) przy założeniu, że λ przyjmuje wartości ujemne (zobacz Ge-Xue-Zhou [30], Dai [11]). Również są dostępne prace, w których λ może przyjmować wartość dodatnią, ale przy założeniu znacznych ograniczeń na wykładnik $p(x)$ takich jak $\sqrt{2}p^- > N$ czy $\frac{2(p^-)^2}{p^+} > N$, gdzie $p^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \overline{\Omega}} p(x)$ oraz $p^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \overline{\Omega}} p(x)$ (zobacz Qian-Shen [40], Qian-Shen-Yang [41]). Te założenia są niezbędne do wykazania pewnych zanurzeń, które w znaczny sposób wpływają na przebieg dowodów twierdzeń o istnieniu rozwiązania. Ponadto, podobne zagadnienie do (0.2) z $\lambda = 1$ było rozważane w pracach Dai [12, 14]. Również tu pojawia się założenie postaci $p^- > N$. Jest ono niezbędne m. in. do wykazania zwartości zanurzenia przestrzeni $W^{1,p(x)}(\Omega)$ w przestrzeń $C^0(\overline{\Omega})$. Zagadnienia z operatorem $p(x)$-laplasjanu, niekoniecznie nierówności hemiwariacyjne, były również rozważane przez Ge-Xue [29], Fan [17, 18], Fan-Zhang [19], Dai [13].
Celem niniejszej pracy będzie uogólnienie warunków, przy których nieliniowa inkluzja różniczkowa z $p(x)$-laplasjanem postaci (0.2) posiada rozwiązanie przy założeniu zmienności znaku λ oraz z pominięciem wszystkich wspomnianych ograniczeń. Podejście, które zastosujemy, będzie oparte na teorii punktów krytycznych dla funkcji spełniających lokalnie warunek Lipschitza.

Zagadnienia nieliniowe z $p(x)$-laplasjanem, mają liczne zastosowania. Mają one swoją interpretację przy modelach przedstawiających zmianę konsystencji cieczy pod wpływem przepływu pola elektrycznego. Są to tzw. ciecze elektroreologiczne. W wyniku wieloletnich badań udało się uzyskać substancję o gęstości przypominającej plastik. Substancje te znalazły zastosowanie między innymi w medycynie przy wytwarzaniu sztucznych organów zastępczych, jak również są wykorzystywane w urządzeniach tłumiących drgania czy w amortyzatorach. Ponadto możemy znaleźć ich zastosowania w modelach związanych z przetwarzaniem obrazów (zobacz Ružička [42], Acerbi-Mingione [1], Diening-Hästö-Harjulehto-Ružička [16], Zikov [45], Chen-Levine-Rao [9], Mihăilescu-Rădulescu [36]).

W pierwszej części pracy przedstawione są podstawowe pojęcia analizy nieliniowej, w szczególności definicja subróżniczki Clarke'a oraz twierdzenia minimaksowe. Podano również definicję oraz własności uogólnionych przestrzeni Lebesgue'a oraz Sobolewa. W kolejnym rozdziale sformułowano zagadnienie Dirichleta z $p(x)$-laplasjanem, podano podstawowe założenia na zmienny wykładnik $p(x)$ i na parametr λ oraz zdefiniowano pojęcie słabego rozwiązania dla naszego zagadnienia. Następnie skojarzono z naszą inkluzją różniczkową funkcjonał energii, którego punkty krytyczne okażą się rozwiązaniami naszej inkluzji różniczkowej. W rozdziale trzecim sformułowano oraz wykazano kolejno cztery twierdzenia o istnieniu nietrywialnego rozwiązania dla nierówności hemiwariacyjnej z $p(x)$-laplasjanem. Twierdzenia te dotyczą różnych sytuacji zachowania się superpotencjału j.

Pracę kończymy podsumowaniem uzyskanych wyników oraz wskazaniem możliwych dalszych rozszerzeń oraz kierunków badań.

Na koniec chciałabym wyrazić serdeczne podziękowania wszystkim osobom, które okazały mi wsparcie i życzliwość w czasie pracy nad rozprawą. Przede wszystkim kieruję je do dra hab. Leszka Gasińskiego, promotora mojej rozprawy doktorskiej, który poświęcił mi wiele czasu, wspierał mnie na każdym etapie pracy oraz służył dobrą radą i pomocą.

1 Podstawowe definicje i twierdzenia

1.1 Uogólniona pochodna kierunkowa

Niech X będzie przestrzenią Banacha. Przez X^* oznaczmy przestrzeń dualną do X. Ponadto, przez $\|\cdot\|$ oznaczmy normę w X, przez $\|\cdot\|_*$ oznaczmy normę w X^*, zaś przez $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dualność dla pary (X, X^*). Rozpoczniemy od podania definicji funkcji spełniającej lokalnie warunek Lipschitza.

Definicja 1.1. *(Funkcja spełniająca lokalnie warunek Lipschitza)*
Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ spełnia lokalnie warunek Lipschitza, jeżeli dla każdego $x \in X$ istnieje otoczenie U punktu x oraz stała $K > 0$ zależna od U taka, że

$$|f(y) - f(z)| \leqslant K\|y - z\|$$

dla każdego $y, z \in U$.

Z teorii analizy wypukłej wiemy, że właściwa, wypukła i dolnie półciągła funkcja

$$g : X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

spełnia lokalnie warunek Lipschitza we wnętrzu swojej dziedziny

$$\operatorname{dom} g = \{x \in X : g(x) < \infty\}.$$

Dla funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ spełniającej lokalnie warunek Lipschitza możemy wprowadzić pojęcie uogólnionej pochodnej kierunkowej w punkcie $x \in X$ w kierunku wektora $h \in X$. Definicja ta jest uogólnieniem dobrze znanej definicji pochodnej kierunkowej dla funkcji wypukłych (zobacz Clarke [10, Rozdział 2] oraz Gasiński-Papageorgiou [27, Rozdział 1.3]).

Definicja 1.2. *(Uogólniona pochodna kierunkowa)*
Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą lokalnie warunek Lipschitza. Przez uogólnioną pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $x \in X$ w kierunku wektora $h \in X$ rozumiemy

$$\begin{aligned} f^0(x;h) &= \limsup_{\substack{y \to x \\ \lambda \searrow 0}} \frac{f(y + \lambda h) - f(y)}{\lambda} \\ &= \inf_{\varepsilon, \delta > 0} \sup_{\substack{\|x-y\| < \varepsilon \\ \lambda \in (0,\delta)}} \frac{f(y + \lambda h) - f(y)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Uwaga 1.3. *Granica powyższego ilorazu różnicowego nie musi istnieć, dlatego też w definicji uogólnionej pochodnej kierunkowej rozważamy granicę górną, która zawsze istnieje. Ponadto, w odróżnieniu od definicji zwykłej pochodnej kierunkowej dla funkcji wypukłej, bierzemy pod uwagę zachowanie funkcji f blisko punktu x.*

Obecnie zaprezentujemy pewne własności uogólnionej pochodnej kierunkowej. Dowody opierają sie na Definicji 1.2 (zobacz np. Denkowski-Migórski-Papageorgiou [15, Rozdział 5.6]).

Twierdzenie 1.4. *Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą lokalnie warunek Lipschitza. Wówczas*

(a) *dla każdego $x \in X$, funkcja $X \ni h \to f^0(x,h) \in \mathbb{R}$ jest podliniowa i ciągła;*

(b) *funkcja $X \times X \ni (x,h) \to f^0(x;h) \in \mathbb{R}$ jest górnie półciągła.*

Kolejne twierdzenie zostało zaczerpnięte z monografii Clarke'a [10, Rozdział 2.1]. Dostarcza ono podstawowych informacji o uogólnionej pochodnej kierunkowej.

Twierdzenie 1.5. *Niech $f, g : X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami spełniającymi lokalnie warunek Lipschitza. Ponadto niech $x \in X$ oraz $h \in X$. Wówczas*

(a) $(f+g)^0(x;h) \leqslant f^0(x;h) + g^0(x;h)$;

(b) $(-f)^0(x;h) = f^0(x;-h)$;

(c) $f^0(x,kh) = kf^0(x;h)$ *dla każdego* $k > 0$.

1.2 Subróżniczka Clarke'a

Wprowadzimy teraz pojęcie uogólnionej subróżniczki dla funkcji spełniającej lokalnie warunek Lipschitza (zobacz Clarke [10, Rozdział 2] oraz Gasiński-Papageorgiou [27, Rozdział 1.3]).

Definicja 1.6. *(Uogólniona subróżniczka)*
Niech funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ spełnia lokalnie warunek Lipschitza. Uogólnioną subróżniczką funkcji f w punkcie $x \in X$ nazywamy zbiór $\partial f(x) \subseteq X^*$ zdefiniowany następująco

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, h\rangle \leqslant f^0(x,h) \text{ dla każdego } h \in X\}.$$

Uwaga 1.7. *Wyżej zdefiniowany zbiór jest również zwany subróżniczką Clarke'a funkcji f w punkcie $x \in X$.*

Wykorzystując m. in. podstawową wersję twierdzenia Hahna-Banacha można pokazać, że zbiór $\partial f(x)$ jest niepustym, ograniczonym, w^*-domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni X^*.

Twierdzenie 1.8. *Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą lokalnie warunek Lipschitza. Dla dowolnych $x \in X$ oraz $h \in X$ zachodzi*

$$f^0(x;h) = \max\{\langle \xi, h\rangle : \xi \in \partial f(x)\}.$$

Uwaga 1.9. *W przypadku, gdy $f \in \mathcal{C}^1(X)$, to $\partial f(x) = \{f'(x)\}$. Zatem w przypadku funkcji gładkich definicja subróżniczki Clarke'a "pokrywa się" z definicją klasycznej pochodnej.*

Elementy zbioru $\partial f(x)$ nazywamy subgradientami funkcji f w punkcie $x \in X$. Zbiór

$$D(\partial f) = \{x \in X :\ \partial f(x) \neq \emptyset\}$$

oznacza dziedzinę subróżniczki Clarke'a. Ponadto, jeżeli funkcje $f, g : X \to \mathbb{R}$ spełniają lokalnie warunek Lipschitza, to

$$\partial(f+g)(x) \subseteq \partial f(x) + \partial g(x)$$

oraz

$$\partial(tf)(x) = t\partial f(x)$$

dla prawie wszystkich $x \in D(\partial f)$ oraz $t \in \mathbb{R}$ (zobacz Clarke [10, Rozdział 2] oraz Gasiński-Papageorgiou [27, Rozdział 1.3]).

Podamy teraz twierdzenie Lebourga o wartości średniej, które jest ważnym narzędziem wykorzystywanym podczas badania tzw. "niegładkich" zagadnień brzegowych.

Twierdzenie 1.10. *(Twierdzenie Lebourga o wartości średniej)*
Niech $x, y \in X$ oraz niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą lokalnie warunek Lipschitza na zbiorze otwartym zawierającym odcinek

$$[x,y] \stackrel{def}{=} \{(1-t)x + ty : 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Wówczas istnieją elementy $z \in (x,y) \stackrel{def}{=} \{(1-t)x + ty : 0 < t < 1\}$ oraz $z^* \in \partial f(z)$ takie, że

$$f(y) - f(x) = \langle z^*, y - x\rangle.$$

Więcej informacji na temat uogólnionych subróżniczek można znaleźć między innymi w monografiach Clarke'a [10] oraz Gasińskiego-Papageorgiou [27, 28].

1.3 Teoria punktów krytycznych

Poniższe twierdzenie podaje warunki wystarczające do istnienia globalnego minimum (zobacz np. Gasiński-Papageorgiou [27, Rozdział 1.3]).

Twierdzenie 1.11. *Niech funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ będzie słabo koercytywna, tzn.*

$$f(x) \to \infty, \quad gdy \quad \|x\| \to \infty$$

oraz słabo dolnie półciągła. Wówczas istnieje $x_0 \in X$ taki, że

$$f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x).$$

Inaczej mówiąc, x_0 jest globalnym minimum funkcji f.

Jak się okazuje, w zastosowaniach wiele funkcjonałów nie jest ograniczonych ani z dołu ani też z góry. Musimy mieć zatem możliwość wskazania innego rodzaju punktów krytycznych. W tym celu wprowadzimy pewien warunek typu zwartości.

1.3.1 Niegładkie warunki Palais-Smale'a i Cerami

Teoria punktów krytycznych dla funkcji gładkich wykorzystuje warunek typu zwartości zwany warunkiem Palais-Smale'a (w skrócie warunek (PS)) lub jego delikatnie słabszą wersję tzw. warunek typu Cerami (w skrócie warunek (C)). W przypadku funkcji niegładkich, warunki te przyjmują następującą postać

Definicja 1.12. *(Niegładki warunek Palais-Smale'a)*
Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą lokalnie warunek Lipschitza. Mówimy, że funkcja f spełnia niegładki warunek Palais-Smale'a (w skrócie niegładki warunek (PS)), jeżeli dowolny ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq X$ taki, że

(a) ciąg wartości $\{f(x_n)\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony;

(b) $m(x_n) = \min\{\|x^*\|_* : x^* \in \partial f(x_n)\} \to 0$ dla $n \to \infty$;

posiada podciąg zbieżny.

Definicja 1.13. *(Niegładki warunek Cerami)*
Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą lokalnie warunek Lipschitza. Mówimy, że funkcja f spełnia niegładki warunek Cerami (w skrócie niegładki warunek (C)), jeżeli dowolny ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq X$ taki, że

(a) ciąg wartości $\{f(x_n)\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony;

(b) $(1 + \|x_n\|)m(x_n) \to 0$ dla $n \to \infty$, gdzie $m(x_n)$ jest jak w Definicji 1.12;

posiada podciąg zbieżny.

Uwaga 1.14. *Oczywiście każda funkcja spełniająca niegładki warunku (PS) spełnia także niegładki warunek (C).*

Definicja 1.15. *(Punkt krytyczny)*
Element $x \in X$ nazywamy punktem krytycznym dla funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ spełniającej lokalnie warunek Lipschitza, jeżeli $0 \in \partial f(x)$.

W szczególności, jeśli $x \in X$ jest lokalnym minimum lub maximum dla funkcji f, to x jest punktem krytycznym funkcji f (zobacz Gasiński-Papageorgiou [27, Rozdział 1.3]).

1.3.2 Niegładkie twierdzenie o przejściu przez przełęcz

Jednymi z głównych twierdzeń w niegładkiej teorii punktów krytycznych są tzw. twierdzenia minimaksowe, w tym twierdzenia o przejściu przez przełęcz. Poniżej podamy wersję twierdzenia według Changa [7], która uogólnia dobrze znane twierdzenie o przejściu przez przełęcz według Ambrosettiego-Rabinowitza [2].

Twierdzenie 1.16. *(Niegładkie twierdzenie o przejściu przez przełęcz)* *Niech X będzie refleksywną przestrzenią Banacha. Rozważmy funkcjonał $f : X \to \mathbb{R}$ spełniający lokalnie warunek Lipschitza oraz dla którego zachodzi niegładki warunek (C). Ponadto załóżmy, że dla pewnego $\rho > 0$ oraz $y \in X$ takich, że $\|y\| > \rho$ zachodzi następująca nierówność*

$$\max\{f(0), f(y)\} < \inf_{\|x\|=\rho} f(x) =: \eta. \tag{1.1}$$

Wówczas funkcjonał f ma nietrywialny punkt krytyczny $x \in X$ taki, że wartość krytyczna $c = f(x) \geqslant \eta$ jest scharakteryzowana przez następujące wyrażenie minimaksowe

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} \{f(\gamma(\tau))\},$$

gdzie $\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = y\}$.

Uwaga 1.17. *W założeniach Twierdzenia 1.16, punkt 0 można zastąpić przez dowolny punkt $y_1 \in X$ taki, że $\|y_1 - y\| > \rho$. Wybór punktu 0 został dokonany dla wygody sformułowań.*

1.4 Przestrzenie $L^{p(x)}(\Omega)$ i $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Niech Ω będzie podzbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a przestrzeni $\mathbb{R}^N (N \geqslant 2)$ takim, że $|\Omega| > 0$. Wprowadźmy następujące oznaczenie

$$E(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \ u \text{ jest funkcją mierzalną}\}.$$

Dwie funkcje z $E(\Omega)$ traktujemy jako identyczne w zbiorze $E(\Omega)$, jeżeli są one sobie równe prawie wszędzie.

Ponadto, niech $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą spełniającą następujące nierówności

$$1 < p^- \leqslant p(x) \leqslant p^+ < \widehat{p}^*, \tag{1.2}$$

gdzie

$$p^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \overline{\Omega}} p(x), \qquad p^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \overline{\Omega}} p(x)$$

oraz

$$\widehat{p}^* := \begin{cases} \frac{Np^-}{N-p^-} & p(x) < N \\ \infty & p(x) \geqslant N \end{cases}. \tag{1.3}$$

Definicja 1.18. *(Uogólniona przestrzeń Lebesgue'a)*
Przestrzeń

$$L^{p(x)}(\Omega) = \{u \in E(\Omega) : \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty\}$$

nazywamy uogólnioną przestrzenią Lebesgue'a. Normę w tej przestrzeni definiujemy następująco

$$\|u\|_{p(x)} = \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leqslant 1 \right\}.$$

Przestrzeń zdefiniowana powyżej jest szczególnym przypadkiem uogólnionych przestrzeni Orlicza (zobacz Orlicz [38] oraz Musielak [37]).
Ponadto można pokazać, że $(L^{p(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(x)})$ jest przestrzenią Banacha.

Wykorzystując powyższą definicję, wprowadźmy pojęcie przestrzeni $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Definicja 1.19. *(Uogólniona przestrzeń Sobolewa)*
Przez uogólnioną przestrzeń Sobolewa rozumiemy przestrzeń postaci

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : \ \nabla u \in L^{p(x)}(\Omega; \mathbb{R}^N)\}$$

z normą

$$\|u\| = \|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}.$$

Przestrzeń zdefiniowana powyżej jest specjalnym rodzajem uogólnionej przestrzeni Orlicza-Sobolewa. Można pokazać, że $(W^{1,p(x)}(\Omega), \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha.

Uwaga 1.20. *Dla przestrzeni $W^{1,p(x)}(\Omega)$ istnieje wiele definicji norm równoważnych. Norma, którą wprowadziliśmy powyżej jest jedną z najbardziej użytecznych ze względu na swoje dobre własności oraz zastosowania w badaniu zagadnień różniczkowych. Innym przykładem normy w $W^{1,p(x)}(\Omega)$ jest*

$$\|u\|_\triangle := \inf\{\lambda > 0 : \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p(x)} + |\nabla u(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}} dx \leqslant 1\}.$$

Można wówczas wykazać, że $\|\cdot\|_\triangle$ jest normą równoważną normie $\|\cdot\|$ w przestrzeni $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Definicja 1.21. *Przez $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ rozumiemy przestrzeń będącą domknięciem przestrzeni funkcji testowych $C_0^\infty(\Omega)$ w normie przestrzeni $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Inaczej mówiąc, jest to uogólniona przestrzeń Sobolewa $W^{1,p(x)}(\Omega)$ z "wartościami zerowymi na brzegu".*

Lematy, które obecnie podamy zostały zaczerpnięte z prac Fan-Zhao [21, 22, 23] i przedstawiają ważne własności powyżej wprowadzonych przestrzeni uogólnionych. Własności te są często analogiczne do tych z przestrzeni Lebesgue'a $L^p(\Omega)$ i Sobolewa $W^{1,p}(\Omega)$, lecz istnieją pewne znaczące odstępstwa. Jednym z nich jest na przykład gęstość funkcji gładkich $C^\infty(\Omega)$ w przestrzeni Sobolewa. W przestrzeniach uogólnionych potrzebujemy dodatkowych założeń na funkcję $p(x)$, takich jak warunek "log-Hölder continuity" czy odpowiednią regularność rozważanego obszaru, by móc wykazać wspomnianą własność. Również problemy pojawiają się w teorii zanurzeń np. dla wykazania zwartości zanurzenia $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*(x)}(\Omega)$, gdzie również niezbędne są dodatkowe założenia na funkcję $p(x)$ czy też na regularność obszaru (zobacz Fan-Zhao [22], Diening-Hästö-Harjulehto-Ružička [16]).

Lemat 1.22. *Niech Ω będzie otwartym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^N$. Wtedy*

(a) przestrzenie $L^{p(x)}(\Omega)$, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ oraz $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ są ośrodkowymi i refleksywnymi przestrzeniami Banacha;

(b) przestrzeń $(L^{p(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(x)})$ jest jednostajnie wypukła;

(c) jeżeli $q \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $1 < p(x) \leqslant q(x)$ oraz $q(x) < p^*(x)$ dla prawie wszystkich $x \in \overline{\Omega}$, gdzie

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)} & p(x) < N \\ \infty & p(x) \geqslant N, \end{cases}$$

to przestrzeń $W^{1,p(x)}(\Omega)$ jest zanurzona w sposób ciągły oraz zwarty w przestrzeń $L^{q(x)}(\Omega)$;

(d) zachodzi nierówność Poincarè'go w przestrzeni $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tzn. istnieje stała $\widehat{c} > 0$ taka, że

$$\|u\|_{p(x)} \leqslant \widehat{c}\|\nabla u\|_{p(x)} \qquad \text{dla każdego } u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega);$$

(e) $(L^{p(x)}(\Omega))^* = L^{p'(x)}(\Omega)$, gdzie $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ oraz dla dowolnych $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ i $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ zachodzi

$$\int_\Omega |uv| dx \leqslant \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-}\right)\|u\|_{p(x)}\|v\|_{p'(x)}.$$

Jest to uogólnienie nierówności Höldera na przypadek przestrzeni ze zmiennym wykładnikiem.

Lemat 1.23. *Niech $\varphi(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx$ dla $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ oraz niech $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^{p(x)}(\Omega)$ będzie ciągiem. Wtedy*

(a) dla $a \neq 0$, mamy

$$\|u\|_{p(x)} = a \Longleftrightarrow \varphi(\tfrac{u}{a}) = 1;$$

(b) zachodzą następujące warunki

$$\|u\|_{p(x)} < 1 \iff \varphi(u) < 1;$$

$$\|u\|_{p(x)} = 1 \iff \varphi(u) = 1;$$

$$\|u\|_{p(x)} > 1 \iff \varphi(u) > 1;$$

(c) jeżeli $\|u\|_{p(x)} > 1$, *to*

$$\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \varphi(u) \leqslant \|u\|_{p(x)}^{p^+};$$

(d) jeżeli $\|u\|_{p(x)} \leqslant 1$, *to*

$$\|u\|_{p(x)}^{p^+} \leqslant \varphi(u) \leqslant \|u\|_{p(x)}^{p^-};$$

(e) zachodzi następująca równoważność

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{p(x)} = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) = 0;$$

(f) zachodzi następująca równoważność

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{p(x)} = \infty \iff \lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) = \infty.$$

Kolejny lemat przedstawia wyniki analogiczne do tych z Lematu 1.23, ale dotyczące uogólnionych przestrzeni Sobolewa.

Lemat 1.24. *Niech* $\Phi(u) = \int_\Omega (|\nabla u(x)|^{p(x)} + |u(x)|^{p(x)})dx$ *dla* $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ *oraz niech* $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W^{1,p(x)}(\Omega)$ *będzie ciągiem. Wówczas*

(a) dla $a \neq 0$ *mamy*

$$\|u\| = a \iff \Phi(\tfrac{u}{a}) = 1;$$

(b) zachodzą następujące warunki

$$\|u\| < 1 \iff \Phi(u) < 1;$$

$$\|u\| = 1 \iff \Phi(u) = 1;$$

$$\|u\| > 1 \iff \Phi(u) > 1;$$

(c) jeżeli $\|u\| > 1$, *to*

$$\|u\|^{p^-} \leqslant \Phi(u) \leqslant \|u\|^{p^+};$$

(d) jeżeli $\|u\| \leqslant 1$, *to*

$$\|u\|^{p^+} \leqslant \Phi(u) \leqslant \|u\|^{p^-};$$

(e) mamy następującą równoważność

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = 0;$$

(f) mamy następującą równoważność

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \infty.$$

Lemat 1.25. *Niech* $\varphi(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx$ *dla* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ *oraz niech* $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^{p(x)}(\Omega)$ *będzie ciągiem. Wówczas następujące zależności są równoważne*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$*;*

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(u_n - u) = 0$*;*

(c) $u_n \to u$ *względem miary w* Ω *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(u_n) = \varphi(u)$*.*

Kolejno przedstawimy i udowodnimy prosty fakt, który będzie nam niezbędny w późniejszej części pracy.

Lemat 1.26. *Niech* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$*. Wówczas*

(a) $|u|^{p(x)-1} \in L^{p'(x)}(\Omega)$*;*

(b) $\left\| |u|^{p(x)-1} \right\|_{p'(x)} \leqslant 1 + \|u\|_{p(x)}^{p^+}$*.*

Dowód. Łatwo widać, że podpunkt (a) zachodzi. Rzeczywiście, z definicji uogólnionej przestrzeni Lebesgue'a oraz z faktu, że $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ mamy

$$\int_\Omega |u|^{(p(x)-1)p'(x)}dx = \int_\Omega |u|^{p(x)}dx < \infty.$$

Dla dowodu części (b) zauważmy, że jeśli $\| \, |u|^{p(x)-1}\|_{p'(x)} \leqslant 1$, to nierówność w (b) jest oczywista. Zatem możemy przyjąć, iż $\| \, |u|^{p(x)-1}\|_{p'(x)} > 1$.

Jeżeli $\|u\|_{p(x)} > 1$, to pamiętając o tym, że $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ oraz na mocy Lematu 1.23(c), mamy

$$\left\| |u|^{p(x)-1} \right\|_{p'(x)}^{p'^-} \leqslant \int_\Omega |u(x)|^{(p(x)-1)p'(x)}dx = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx \leqslant \|u\|_{p(x)}^{p^+}.$$

Wobec tego widzimy, że $\| \, |u|^{p(x)-1}\|_{p'(x)} \leqslant \|u\|_{p(x)}^{\frac{p^+}{p'^-}} \leqslant 1 + \|u\|_{p(x)}^{p^+}$.

Z drugiej strony, jeśli $\|u\|_{p(x)} \leqslant 1$, to w analogiczny sposób wykorzystując Lemat 1.23(d) otrzymujemy, że

$$\| \, |u|^{p(x)-1}\|_{p'(x)} \leqslant \|u\|_{p(x)}^{\frac{p^-}{p'^+}} \leqslant 1.$$

Co kończy dowód. $\square$

2 Inkluzje różniczkowe z $p(x)$-laplasjanem

2.1 Sformułowanie zagadnienia brzegowego

Niech Ω będzie otwartym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^N$ z brzegiem $\partial\Omega$ klasy $\mathcal{C}^2$.

Rozważmy następującą eliptyczną inkluzję różniczkową

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta_{p(x)}u(x) - \lambda|u(x)|^{p(x)-2}u(x) \in \partial j(x, u(x)) & \text{p.w. w } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Jest to tzw. nierówność hemiwariacyjna z $p(x)$-laplasjanem z warunkiem brzegowym typu Dirichleta.

W zagadnieniu (P) występuje funkcja ciągła $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, o której przyjmujemy założenie postaci (1.2), tzn.

$$1 < p^- \leqslant p(x) \leqslant p^+ < \widehat{p}^*,$$

dla prawie wszystkich $x \in \Omega$. Wprowadzenie oznaczeń p^- oraz p^+ pozwoli nam przenieść niektóre rozważania z przestrzeni uogólnionych na przestrzenie Lebesgue'a $L^{p^-}(\Omega)$ lub $L^{p^+}(\Omega)$.

O superpotencjale $j(x, t)$ będziemy zakładać, że jest funkcją mierzalną ze względu na pierwszą zmienną oraz spełnia lokalnie warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną. Przez $\partial j(x, t)$ rozumiemy uogólnioną subróżniczkę w sensie Clarke'a (zobacz Definicję 1.6) ze względu na drugą zmienną. Przez $\Delta_{p(x)}$ oznaczamy operator $p(x)$-laplasjanu, zdefiniowany przez

$$\Delta_{p(x)}u(x) := \operatorname{div}\Big(|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x)\Big), \tag{2.1}$$

który staje się operatorem p-laplasjanu, gdy $p(x) \equiv const$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$.

2.2 Założenia dotyczące parametru λ

O parametrze λ występującym w zagadnieniu (P) będziemy przyjmować jedno z założeń

$$\lambda < \frac{p^-}{p^+}\lambda_* \tag{2.2}$$

lub

$$\lambda < \frac{(p^- - 1)p^+}{(p^+ - 1)p^-}\lambda_*, \tag{2.3}$$

gdzie λ_* jest zdefiniowane przez następujący iloraz typu Rayleigha

$$\lambda_* = \inf_{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)} dx}{\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx}. \tag{2.4}$$

Może się zdarzyć, że $\lambda_* = 0$ (zobacz Fan-Zhang [20]).

Pomocniczo wprowadzamy oznaczenie

$$\widetilde{p} := \min\left\{ \frac{(p^- - 1)p^+}{(p^+ - 1)p^-}, \frac{p^-}{p^+} \right\}, \tag{2.5}$$

wówczas jednoczesne zachodzenie warunków (2.2) i (2.3) oznacza, że

$$\lambda < \widetilde{p}\lambda_*. \tag{2.6}$$

2.3 Definicja słabego rozwiązania

Obecnie podamy definicję słabego rozwiązania zagadnienia (P).

Definicja 2.1. *(Słabe rozwiązanie zagadnienia (P))*
Mówimy, że funkcja $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ jest słabym rozwiązaniem zagadnienia (P), jeśli spełniona jest następująca równość całkowa

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)-2} (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N} dx - \int_\Omega \lambda |u(x)|^{p(x)-2} u(x) v(x) dx - \int_\Omega v^*(x) v(x) dx = 0$$

dla każdej funkcji testowej $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ oraz pewnego $v^* \in \partial\psi(u)$, gdzie $\psi : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem zdefiniowanym następująco

$$\psi(u) = \int_\Omega j(x, u(x)) dx.$$

2.4 Funkcjonał energii

Metody, które będziemy wykorzystywać do szukania słabego rozwiązania zagadnienia (P) to tzw. metody wariacyjne. Na ich podstawie, skojarzymy z naszym zagadnieniem nieliniowy funkcjonał energii, którego punkty krytyczne będą słabymi rozwiązaniami zagadnienia (P). Punktów krytycznych funkcjonału energii będziemy szukali przy pomocy twierdzenia o przejściu przez przełęcz (zobacz Twierdzenie 1.16).

Wprowadźmy zatem funkcjonał energii dla inkluzji różniczkowej w postaci (P). Rozważmy dwa funkcjonały $J, K : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ zdefiniowane następująco

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u(x)|^{p(x)} dx \quad \text{dla każdego } u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$$

oraz

$$K(u) = \int_\Omega \frac{\lambda}{p(x)} |u(x)|^{p(x)} dx + \int_\Omega j(x, u(x)) dx \quad \text{dla każdego } u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Funkcjonały J, K spełniają lokalnie warunek Lipschitza. Przyjmijmy następnie, że

$$R(u) = J(u) - K(u). \tag{2.7}$$

Wówczas funkcjonał $R : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ również spełnia lokalnie warunek Lipschitza i stanowi funkcjonał energii dla zagadnienia (P).

Ponadto można pokazać, że $J \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega))$ oraz że operator $-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$ jest pochodną operatora J w słabym sensie (zobacz Chang [8]). Ściślej mówiąc, jeśli

$$A : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*,$$

jest operatorem zadanym przez

$$\langle Au, v \rangle = \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)-2} (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N} dx \tag{2.8}$$

dla każdych $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, to $J' = A$. Zatem punkty krytyczne funkcjonału R są słabymi rozwiązaniami zagadnienia (P) (zobacz Definicję 2.1).

2.5 Operatory monotoniczne

Rozważmy obecnie operator $S : X \supseteq D(S) \to X^*$, gdzie X jest dowolną przestrzenią Banacha.

Definicja 2.2. *(Operator ściśle monotoniczny)*
Mówimy, że operator S jest ściśle monotoniczny, jeśli

$$\langle Su - Sv, u - v \rangle > 0$$

dla każdego $u, v \in D(S)$, $u \neq v$.

Definicja 2.3. *(Operator maksymalnie monotoniczny)*
Mówimy, że operator S jest maksymalnie monotoniczny, jeśli zachodzą warunki

(a) S jest monotoniczny, tzn.

$$\langle Su - Sv, u - v \rangle \geqslant 0 \text{ dla każdego } u, v \in D(S);$$

(b) dla każdego $u \in X$ oraz $u^* \in X^*$ mamy

$$[\langle u^* - Sv, u - v \rangle \geqslant 0 \text{ dla każdego } v \in D(S)] \Longrightarrow u \in D(S) \text{ oraz } u^* = Su.$$

Definicja 2.4. *(Operator pseudomonotoniczny)*
Mówimy, że operator S jest pseudomonotoniczny, jeśli zachodzą warunki

(a) S jest ograniczony, tzn. obrazy zbiorów ograniczonych w X są ograniczone w X^*;

(b) dla ciągu $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq D(S)$ takiego, że

$$u_n \to u \quad \text{słabo w } X$$

dla pewnego $u \in X$ oraz

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Su_n, u_n - u\rangle \leqslant 0$$

mamy, że

$$\langle Su, u - v\rangle \leqslant \liminf_{n\to\infty} \langle Su_n, u_n - v\rangle \qquad \text{dla każdego } \ v \in X.$$

Definicja 2.5. *(Operator uogólniony pseudomonotoniczny)*
Mówimy, że S jest operatorem uogólnionym pseudomonotonicznym, jeśli dla dowolnego ciągu $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq D(S)$ takiego, że

$$u_n \to u \quad \text{słabo w } X$$

dla pewnego $u \in X$,

$$Su_n \to Su \quad \text{słabo w } X^*$$

dla $n \geqslant 1$ oraz

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Su_n, u_n - u\rangle \leqslant 0$$

mamy, że $\langle Su_n, u_n\rangle \to \langle Su, u\rangle$ gdy $n \to \infty$.

Lemat 2.6. *Jeśli operator $S : X \to X^*$ jest ciągły oraz monotoniczny, to jest maksymalnie monotoniczny.*

Lemat 2.7. *Jeśli operator $S : X \to X^*$ jest ograniczony, ciągły oraz monotoniczny, to jest pseudomonotoniczny. Ponadto, każdy operator pseudomonotoniczny jest uogólniony pseudomonotoniczny.*

Lemat 2.8. *Niech $A : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ będzie operatorem zdefiniowanym przez (2.8). Wówczas A jest operatorem ciągłym, ograniczonym, ściśle monotonicznym oraz maksymalnie monotonicznym.*

Dowód. Ograniczoność operatora A wynika z Lematu 1.23(c) i (d), zaś ciągłość wynika z jego definicji.

Dla wykazania ścisłej monotoniczności operatora A wykorzystajmy następujące nierówności

$$\begin{aligned} &(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi - \eta)_{\mathbb{R}^N} \cdot (|\xi|^p + |\eta|^p)^{\frac{2-p}{p}} \geqslant (p-1)|\xi - \eta|^p, \ 1 < p < 2, \\ &(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi - \eta)_{\mathbb{R}^N} \geqslant \left(\tfrac{1}{2}\right)^p |\xi - \eta|^p, \qquad p \geqslant 2, \end{aligned} \tag{2.9}$$

dla każdego $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$. Wystarczy przyjąć, że $\xi = \nabla u_n$ oraz $\eta = \nabla u$ dla uzyskania pożądanego efektu. Operator A jest ciągły i ściśle monotoniczny, zatem na mocy Lematu 2.6 jest maksymalnie monotoniczny. □

2.6 Operatory typu $(S)_+$

Definicja 2.9. *(Operator typu $(S)_+$)*
Niech X będzie refleksywną przestrzenią Banacha. Mówimy, że operator $S : X \to X^*$ jest typu $(S)_+$, jeśli dla dowolnego ciągu $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq X$ takiego, że

(a) $u_n \to u$ słabo w X dla pewnego $u \in X$;

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} \langle Su_n, u_n - u\rangle \leqslant 0$;

mamy, że $u_n \to u$ w X.

Lemat 2.10. *Niech $A : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ będzie operatorem zdefiniowanym przez (2.8). Wówczas A jest operatorem typu $(S)_+$.*

Dowód. Załóżmy, że

$$u_n \to u \text{ słabo w } W_0^{1,p(x)}(\Omega) \tag{2.10}$$

dla pewnego $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ oraz

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \leqslant 0. \tag{2.11}$$

Aby pokazać, że A jest operatorem typu $(S)_+$ wystarczy wykazać, że $u_n \to u$ w $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Na początek zauważmy, że biorąc pod uwagę założenia (2.10) oraz (2.11) otrzymujemy

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n - Au, u_n - u\rangle = \limsup_{n\to\infty} [\langle Au_n, u_n - u\rangle - \langle Au, u_n - u\rangle] \leqslant 0.$$

Operator A jest ściśle monotoniczny, zatem mamy, że

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n - Au, u_n - u\rangle = 0. \tag{2.12}$$

Niech

$$\zeta_n(x) = (|\nabla u_n(x)|^{p(x)-2}\nabla u_n(x) - |\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x),\ \nabla u_n(x) - \nabla u(x))_{\mathbb{R}^N}.$$

Zauważmy, że $\zeta_n(x) \geqslant 0$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i każdego $n \geqslant 1$ (zobacz nierówności (2.9)).

Biorąc pod uwagę (2.12), mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \zeta_n(x)\ dx = 0,$$

zatem

$$\zeta_n \to 0 \quad \text{w } L^1(\Omega). \tag{2.13}$$

Z nierówności (2.9) biorąc $\xi = \nabla u_n(x)$ oraz $\eta = \nabla u(x)$ oraz z (2.13) otrzymamy, że

$$\lim_{n\to\infty} |\nabla u_n(\cdot) - \nabla u(\cdot)|^{p(\cdot)} = 0 \quad \text{w } L^1(\Omega).$$

Zatem możemy wybrać podciąg taki, że

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \quad \text{dla prawie wszystkich } \; x \in \Omega. \tag{2.14}$$

Z Lematu 2.7 mamy, że A jest operatorem uogólnionym pseudomonotonicznym, zatem

$$\langle Au_n, u_n\rangle \to \langle Au, u\rangle \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)} \; dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \; dx. \tag{2.15}$$

Na mocy Lematu 1.25, biorąc pod uwagę (2.14) oraz (2.15) otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \|\nabla u_n - \nabla u\|_{p(x)} = 0.$$

Zauważmy, że $\|\nabla u\|_{p(x)}$ jest normą równoważną do $\|u\|$ w przestrzeni $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, zatem $u_n \to u$ w $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Operator A jest więc operatorem typu $(S)_+$.

$\square$

3 Istnienie rozwiązań dla inkluzji różniczkowych z $p(x)$-laplasjanem

Istnienie nietrywialnego rozwiązania dla zagadnienia (P) można badać przy różnych warunkach mówiących o zachowaniu się potencjału $j(x,t)$ w zerze, w punkcie pośrednim oraz w nieskończoności. W kolejnych podrozdziałach wykażemy twierdzenia o istnieniu nietrywialnego rozwiązania zagadnienia (P) przy różnego typu założeniach dotyczących potencjału $j(x,t)$.

3.1 Wzrost podliniowy superpotencjału $j(x,t)$

W pierwszej kolejności zajmiemy się sytuacją, w której superpotencjał j ma wzrost podliniowy.

3.1.1 Założenia

Odnośnie superpotencjału j będziemy przyjmowali następujące założenia.

$H(j)_1$ $j : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją taką, że $j(x,0) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ oraz

(i) funkcja $j(\cdot,t) \in \mathbb{R}$ jest mierzalna dla każdego $t \in \mathbb{R}$;

(ii) funkcja $j(x,\cdot) \in \mathbb{R}$ spełnia lokalnie warunek Lipschitza dla prawie wszystkich $x \in \Omega$;

(iii) dla prawie wszystkich $x \in \Omega$, każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz każdego $v \in \partial j(x,t)$ zachodzi

$$|v| \leqslant a(x),$$

gdzie $a \in L^\infty_+(\Omega) = \{f \in L^\infty(\Omega),\ \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} f(x) \geqslant 0\}$;

(iv) istnieje $\mu > \frac{p^+\lambda_+}{p^-}$, gdzie $\lambda_+ := \max\{\lambda, 0\}$ takie, że

$$\limsup_{t\to 0} \frac{p(x)j(x,t)}{|t|^{p(x)}} \leqslant -\mu,$$

jednostajnie dla prawie wszystkich $x \in \Omega$;

(v) istnieje element $\overline{u} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ taki, że

$$\overline{c}\|\overline{u}\|^{p^+} \leqslant \int_\Omega j(x,\overline{u}(x))dx, \qquad \text{jeśli } \|\overline{u}\| > 1,$$

lub

$$\overline{c}\|\overline{u}\|^{p^-} \leqslant \int_\Omega j(x,\overline{u}(x))dx, \qquad \text{jeśli } \|\overline{u}\| \leqslant 1,$$

gdzie $\overline{c} := \max\{\frac{1}{p^-}, \frac{\lambda_-}{p^-}\}$ oraz $\lambda_- := \max\{-\lambda, 0\}$.

Uwaga 3.1. *Założenia $H(j)_1$ zagwarantują nam istnienie nietrywialnego rozwiązania dla zagadnienia (P) (zobacz Twierdzenie 3.4). Założenie $H(j)_1(iii)$ opisuje ograniczenia na subróżniczkę superpotencjału j i implikuje wzrost podliniowy superpotencjału, zaś założenie $H(j)_1(iv)$ mówi o zachowaniu superpotencjału w pobliżu zera. Warunek $H(j)_1(v)$ opisuje zachowanie w pewnym punkcie pośrednim i jest dość sztucznym warunkiem, dlatego też w ostatniej części pracy będziemy dążyć do jego wyeliminowania. Założenie to zagwarantuje nam, iż w pewnym punkcie pośrednim $\overline{u}$ wartość funkcjonału energii będzie dostatecznie mała. Założenia $H(j)_1$ nie zawierają żadnej informacji na temat zachowania się superpotencjału j w nieskończoności (poza wzrostem opisanym w $H(j)_1(iii)$).*

3.1.2 Niegładki warunek (PS)

Do znalezienia nietrywialnego rozwiązania zagadnienia (P) wykorzystamy Twierdzenie 1.16. Na początek pokażemy, że przy powyższych założeniach funkcjonał energii skojarzony z zagadnieniem (P) spełnia niegładki warunek Palais-Smale'a.

Lemat 3.2. *Jeśli zachodzą założenia $H(j)_1$ oraz $\lambda \in (-\infty, \frac{p^-}{p^+}\lambda_*)$, to funkcjonał energii R (zobacz (2.7)) spełnia niegładki warunek (PS).*

Dowód. Niech ciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ będzie taki, że

$$\text{ciąg wartości } \{R(u_n)\}_{n\geqslant 1} \text{ jest ograniczony oraz } m(u_n) \to 0 \text{ dla } n \to \infty,$$

gdzie $m(u_n) = \min\{\|u^*\|_* : u^* \in \partial R(u_n)\}$. Chcemy pokazać, że istnieje podciąg (nadal oznaczony przez $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$) taki, że $u_n \to u$ w przestrzeni $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Najpierw pokażemy, że ciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ jest ograniczony. Dla dowodu nie wprost, przypuśćmy, że ciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ nie jest ograniczony. Wówczas przechodząc do podciągu możemy założyć, że

$$\|u_n\| \to \infty \text{ dla } n \to \infty.$$

Niech $y_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ dla każdego $n \geqslant 1$. Przechodząc do kolejnego podciągu, można przyjąć, że

$$\begin{array}{ll} y_n \to y & \text{słabo w } W_0^{1,p(x)}(\Omega), \\ y_n \to y & \text{w } L^{p(x)}(\Omega), \\ y_n(x) \to y(x) & \text{dla prawie wszystkich } x \in \Omega, \end{array} \tag{3.1}$$

gdy $n \to \infty$, dla pewnego $y \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ (zobacz Lemat 1.22(c) oraz Brezis [6, Rozdział 4]).

Na początek ustalimy asymptotyczne zachowanie całki postaci $\int_\Omega \frac{j(x,u_n(x))}{\|u_n\|^\kappa}dx$, gdzie $\kappa > 1$. Na mocy twierdzenia Lebourga o wartości średniej (zobacz Twierdzenie 1.10) wiemy, że dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i dla każdego $n \geqslant 1$ można znaleźć $v_n(x) \in \partial j(x, k_n u_n(x))$ gdzie $0 < k_n < 1$ takie, że

$$|j(x, u_n(x)) - j(x, 0)| = |v_n(x)||u_n(x)|.$$

Zatem na podstawie założenia $H(j)_1(iii)$, dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ mamy

$$|j(x, u_n(x))| \leqslant |j(x,0)| + a(x)|u_n(x)| \leqslant a_1|u_n(x)|, \tag{3.2}$$

dla pewnej stałej $a_1 > 0$. Dla dowolnego ustalonego $\kappa > 1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \frac{j(x,u_n(x))}{\|u_n\|^\kappa} dx \right| &\leqslant \int_\Omega \frac{|j(x,u_n(x))|}{\|u_n\|^\kappa} dx \\ &\leqslant \int_\Omega \frac{a_1|u_n(x)|}{\|u_n\|^\kappa} dx \leqslant \frac{a_2}{\|u_n\|^{\kappa-1}}, \end{aligned}$$

dla pewnej stałej $a_2 > 0$. Zatem

$$\int_\Omega \frac{j(x,u_n(x))}{\|u_n\|^\kappa} dx \to 0 \quad \text{dla } n \to \infty. \tag{3.3}$$

Skoro $\|u_n\| \to \infty$, to bez straty ogólności można przyjąć, że $\|u_n\| \geqslant 1$. Ponieważ z założenia wiemy, że $|R(u_n)| \leqslant M$ dla pewnego $M > 0$, zatem dla każdego $n \geqslant 1$ prawdziwa jest następująca nierówność

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega \frac{\lambda}{p(x)} |u_n(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega j(x, u_n(x)) dx \leqslant M. \tag{3.4}$$

Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1. Załóżmy, że $\lambda \geqslant 0$.

Wówczas $\lambda = \lambda_+ := \max\{\lambda, 0\}$ oraz z (3.4) mamy

$$\int_\Omega \frac{1}{p^+} |\nabla u_n(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega \frac{\lambda_+}{p^-} |u_n(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega j(x, u_n(x)) dx \leqslant M. \tag{3.5}$$

Z definicji λ_* (zobacz (2.4)) otrzymujemy zależność

$$\lambda_* \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)} dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)} dx \quad \text{dla każdego } n \geqslant 1. \tag{3.6}$$

Używając (3.6) w nierówności (3.5) (zauważmy, że w naszym przypadku $\lambda_* > 0$), otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda_+}{\lambda_* p^-} \right) \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega j(x, u_n(x)) dx \leqslant M. \tag{3.7}$$

Ponieważ z założenia wiadomo, że $\lambda_+ < \frac{p^-}{p^+}\lambda_*$ zatem $\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda_+}{\lambda_* p^-} > 0$.

Rozważmy kolejno dwa podprzypadki.

Podprzypadek 1.1. Załóżmy, że można wybrać podciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ taki, że

$$\|\nabla u_n\|_{p(x)} \leqslant 1 \quad \text{dla każdego } n \geqslant 1.$$

Wówczas wykorzystując Lemat 1.23(d) w nierówności (3.7), dostajemy

$$\left(\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda_+}{\lambda_* p^-}\right)\|\nabla u_n\|_{p(x)}^{p^+} - \int_\Omega j(x, u_n(x))dx \leqslant M.$$

Dzieląc ostatnią nierówność przez $\|u_n\|^{p^+}$, otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda_+}{\lambda_* p^-}\right)\|\nabla y_n\|_{p(x)}^{p^+} - \int_\Omega \frac{j(x, u_n(x))}{\|u_n\|^{p^+}}dx \leqslant \frac{M}{\|u_n\|^{p^+}}.$$

Wykorzystując ten fakt, informacje o asymptotycznym zachowaniu całki pokazaną w (3.3) oraz przechodząc do granicy gdy $n \to \infty$ w ostatniej nierówności, uzyskujemy

$$\nabla y_n \to 0 \quad \text{w } L^{p(x)}(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

Podprzypadek 1.2. Załóżmy, że nie zachodzi podprzypadek 1.1. Wtedy możemy wybrać podciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ taki, że

$$\|\nabla u_n\|_{p(x)} > 1 \quad \text{dla każdego } n \geqslant 1.$$

Wówczas wykorzystując Lemat 1.23(c) w nierówności (3.7), mamy

$$\left(\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda_+}{\lambda_* p^-}\right)\|\nabla u_n\|_{p(x)}^{p^-} - \int_\Omega j(x, u_n(x))dx \leqslant M.$$

Dzieląc ostatnią nierówność przez $\|u_n\|^{p^-}$, otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda_+}{\lambda_* p^-}\right)\|\nabla y_n\|_{p(x)}^{p^-} - \int_\Omega \frac{j(x, u_n(x))}{\|u_n\|^{p^-}}dx \leqslant \frac{M}{\|u_n\|^{p^-}}.$$

Zatem po raz kolejny, przechodząc do granicy gdy $n \to \infty$ w ostatniej nierówności oraz wykorzystując (3.3) otrzymujemy, że

$$\nabla y_n \to 0 \qquad \text{w } L^{p(x)}(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

Przypadek 2. Załóżmy, że $\lambda < 0$.
Z nierówności (3.4), dostajemy

$$\int_\Omega \frac{1}{p^+}|\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega j(x, u_n(x))dx \leqslant M. \tag{3.8}$$

Rozważamy po raz kolejny dwa podprzypadki.

Podprzypadek 2.1. Załóżmy, że możemy wybrać podciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tak, że

$$\|\nabla u_n\|_{p(x)} \leqslant 1 \quad \text{dla każdego } n \geqslant 1.$$

Wykorzystując Lemat 1.23(d) w nierówności (3.8) uzyskujemy

$$\frac{1}{p^+}\|\nabla u_n\|_{p(x)}^{p^+} - \int_\Omega j(x, u_n(x))dx \leqslant M.$$

Dzieląc ostatnią nierówność przez $\|u_n\|^{p^+}$, otrzymujemy

$$\frac{1}{p^+}\|\nabla y_n\|_{p(x)}^{p^+} - \int_\Omega \frac{j(x, u_n(x))}{\|u_n\|^{p^+}}dx \leqslant \frac{M}{\|u_n\|^{p^+}}.$$

Ponieważ $\frac{1}{p^+} > 0$, zatem korzystając z (3.3) oraz przechodząc do granicy gdy $n \to \infty$ w ostatniej nierówności, dostajemy

$$\nabla y_n \to 0 \quad \text{w } L^{p(x)}(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

Podprzypadek 2.2. Jeśli nie zachodzi podprzypadek 2.1, to można wybrać podciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ taki, że

$$\|\nabla u_n\|_{p(x)} > 1 \quad \text{dla każdego } n \geqslant 1.$$

Wykorzystując Lemat 1.23(c) w (3.8) mamy, że

$$\frac{1}{p^+}\|\nabla u_n\|_{p(x)}^{p^-} - \int_\Omega j(x, u_n(x))dx \leqslant M.$$

W analogiczny sposób jak w podprzypadku 2.1 dostajemy

$$\nabla y_n \to 0 \qquad \text{w } L^{p(x)}(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

Zatem w obu podprzypadkach dostajemy, że

$$\nabla y_n \to 0 \qquad \text{w } L^{p(x)}(\Omega; \mathbb{R}^N). \tag{3.9}$$

Używając po raz kolejny zależność (3.6) w nierówności (3.4), dostajemy

$$\left(\frac{\lambda_*}{p^+} - \frac{\lambda_+}{p^-}\right)\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega j(x, u_n(x))dx \leqslant M,$$

w przypadku, gdy $\lambda \geqslant 0$, oraz

$$\frac{\lambda_-}{p^+}\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega j(x, u_n(x))dx \leqslant M,$$

w przypadku, gdy $\lambda < 0$.

Analogicznie jak w poprzednich przypadkach, rozważając dwa podprzypadki (w zależności od wyboru podciągu $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ dla którego $\|u_n\|_{p(x)} > 1$ lub $\|u_n\|_{p(x)} \leqslant 1$ dla każdego $n \geqslant 1$) oraz wykorzystując Lemat 1.23(c), (d), możemy wywnioskować, że

$$y_n \to 0 \qquad \text{w } L^{p(x)}(\Omega). \tag{3.10}$$

Z (3.9) oraz (3.10) dostajemy, że

$$y_n \to 0 \qquad \text{w } W_0^{1,p(x)}(\Omega) \tag{3.11}$$

(zobacz Lematy 1.23(e) oraz 1.24(e)). Z drugiej strony, z definicji ciągu $\{y_n\}_{n\geqslant 1}$ wiemy, że $\|y_n\| = 1$ dla każdego $n \geqslant 1$, co daje sprzeczność. Na mocy dowodu nie wprost, ciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ jest ograniczony.

W takim razie, przechodząc ewentualnie do podciągu, możemy przyjąć, że

$$\begin{array}{ll} u_n \to u & \text{słabo w } W_0^{1,p(x)}(\Omega), \\ u_n \to u & \text{w } L^{p(x)}(\Omega), \end{array} \tag{3.12}$$

dla pewnego $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ (zobacz Lemat 1.22(c)).

Ponieważ zbiór $\partial R(u_n) \subseteq (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ jest słabo zwarty i niepusty oraz funkcjonał normy jest słabo dolnie półciągły w przestrzeni Banacha, to możemy znaleźć element $u_n^* \in \partial R(u_n)$ taki, że $\|u_n^*\|_* = m(u_n)$ dla każdego $n \geqslant 1$ (zobacz Gasiński-Papageorgiou [27, Rozdział 2.1.1]).

Niech teraz $A : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ oznacza operator zdefiniowany przez (2.8). Wówczas dla każdego $n \geqslant 1$ mamy, że

$$u_n^* = Au_n - \lambda |u_n|^{p(x)-2} u_n - v_n^*, \tag{3.13}$$

gdzie $v_n^* \in \partial\psi(u_n) \subseteq L^{p'(x)}(\Omega)$ dla $n \geqslant 1$ oraz $p' : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ oraz funkcjonał $\psi : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowany przez

$$\psi(u) = \int_\Omega j(x, u(x))dx,$$

dla $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Ponadto, skoro $v_n^* \in \partial\psi(u_n)$, to $v_n^*(x) \in \partial j(x, u_n(x))$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ (zobacz Clarke [10]).

Z wyboru ciągu $\{u_n^*\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, przechodząc ewentualnie do podciągu, mamy

$$|\langle u_n^*, w\rangle| \leqslant \varepsilon_n \|w\| \quad \text{dla każdego } w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \tag{3.14}$$

gdzie $\varepsilon_n \searrow 0$.

Kładąc $w = u_n - u$ w (3.14) oraz wykorzystując (3.13), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle Au_n, u_n - u\rangle - \lambda \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)-2} u_n(x)(u_n - u)(x)dx \\ - \int_\Omega v_n^*(x)(u_n - u)(x)dx \leqslant \varepsilon_n \|u_n - u\|. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Na mocy Lematu 1.22(e) (uogólniona nierówność Höldera) dostajemy, że

$$\begin{aligned} &\lambda \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)-2} u_n(x)(u_n - u)(x)dx \\ \leqslant\ &\lambda\Big(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-}\Big)\| \, |u_n|^{p(x)-1}\|_{p'(x)} \|u_n - u\|_{p(x)}. \end{aligned}$$

Wiemy, że ciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ jest ograniczony, zatem biorąc pod uwagę zbieżności z (3.12) oraz Lemat 1.26, możemy wywnioskować, że

$$\lambda \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)-2} u_n(x)(u_n - u)(x)dx \to 0 \quad \text{dla } n \to \infty.$$

Korzystając z założenia $H(j)_1(iii)$ mamy także

$$\int_\Omega v_n^*(x)(u_n - u)(x)dx \to 0 \quad \text{dla } n \to \infty.$$

Zatem z nierówności (3.15), przechodząc do granicy gdy $n \to \infty$ otrzymujemy, że

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \leqslant 0.$$

Stosując Lemat 2.10 dostajemy zbieżność $u_n \to u$ w przestrzeni $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, gdy $n \to \infty$. Podsumowując, pokazaliśmy że funkcjonał energii R spełnia niegładki warunek (PS). $\square$

Aby pokazać zależność (1.1) z Twierdzenia 1.16 potrzebujemy udowodnić następujący lemat.

Lemat 3.3. *Jeśli zachodzą założenia $H(j)_1$, $\lambda \in (-\infty, \frac{p^-}{p^+}\lambda_*)$ oraz $\theta \in (p^+, \widehat{p}^*)$, to istnieją stałe $\beta_1, \beta_2 > 0$ takie, że dla każdego $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ spełniającego $\|u\| < 1$, zachodzi*

$$R(u) \geqslant \beta_1 \|u\|^{p^+} - \beta_2 \|u\|^\theta.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ spełnia zależność $\frac{p^+\lambda_+}{p^-} + \varepsilon < \mu$ (gdzie μ jest jak w założeniu $H(j)_1(iv)$).

Na mocy założenia $H(j)_1(iv)$, możemy dobrać $\delta > 0$ tak, że dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i każdego t spełniającego $|t| \leqslant \delta$, zachodzi

$$j(x,t) \leqslant \frac{1}{p(x)}(-\mu + \varepsilon)|t|^{p(x)}.$$

Z drugiej strony, z dowodu Lematu 3.2 (zobacz zależność (3.2)) wiemy, że dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i każdego t takiego, że $|t| > \delta$ mamy

$$|j(x,t)| \leqslant a_1 |t|,$$

dla pewnej stałej $a_1 > 0$. Zatem dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i każdego $t \in \mathbb{R}$ otrzymujemy

$$j(x,t) \leqslant \frac{1}{p(x)}(-\mu+\varepsilon)|t|^{p(x)} + \gamma_\theta |t|^\theta,$$

dla pewnej stałej $\gamma_\theta > 0$. Wobec tego, uzyskujemy

$$\begin{aligned} R(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{\lambda}{p(x)}|u(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega j(x,u(x))dx \\ &\geqslant \int_\Omega \frac{1}{p^+}|\nabla u(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{\lambda_+}{p^-}|u(x)|^{p(x)}dx \\ &\qquad + \frac{1}{p^+}\int_\Omega (\mu-\varepsilon)|u(x)|^{p(x)}dx - \gamma_\theta \int_\Omega |u(x)|^\theta dx \\ &= \frac{1}{p^+}\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)}dx + \left(\frac{\mu-\varepsilon}{p^+} - \frac{\lambda_+}{p^-}\right)\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx - \gamma_\theta \|u\|_\theta^\theta. \end{aligned}$$

Z wyboru $\varepsilon > 0$ wiemy, że

$$\frac{\mu-\varepsilon}{p^+} - \frac{\lambda_+}{p^-} > 0,$$

zatem

$$R(u) \geqslant \beta_1 \Big[\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx\Big] - \gamma_\theta \|u\|_\theta^\theta, \tag{3.16}$$

gdzie $\beta_1 := \min\{\frac{1}{p^+}, \frac{\mu-\varepsilon}{p^+} - \frac{\lambda_+}{p^-}\}$.

Ponieważ $\theta < \widehat{p}^* \leqslant p^*(x)$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$, to przestrzeń $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ jest zanurzona w sposób ciągły w przestrzeń $L^\theta(\Omega)$ (zobacz Lemat 1.22(c)). Zatem istnieje stała $c_\theta > 0$ taka, że

$$\|u\|_\theta \leqslant c_\theta \|u\| \qquad \text{dla każdego } u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega). \tag{3.17}$$

Wykorzystując (3.17) oraz Lemat 1.24(d) w (3.16), dla każdego elementu $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ spełniającego $\|u\| < 1$, dostajemy

$$R(u) \geqslant \beta_1 \|u\|^{p^+} - \beta_2 \|u\|^\theta,$$

gdzie $\beta_2 = \gamma_\theta c_\theta^\theta$. □

3.1.3 Twierdzenie o istnieniu rozwiązania

Wykorzystując Lematy 3.2 oraz 3.3 udowodnimy następujące twierdzenie mówiące o istnieniu rozwiązania dla zagadnienia (P).

Twierdzenie 3.4. *Jeśli zachodzą założenia $H(j)_1$ oraz $\lambda \in (-\infty, \frac{p^-}{p^+}\lambda_*)$, to zagadnienie (P) posiada nietrywialne rozwiązanie.*

Dowód. Na podstawie Lematu 3.3 wiemy, że istnieją stałe $\beta_1, \beta_2 > 0$ takie, że dla każdego $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ spełniającego $\|u\| < 1$, mamy

$$R(u) \geqslant \beta_1 \|u\|^{p^+} - \beta_2 \|u\|^{\theta} = \beta_1 \|u\|^{p^+} \Big(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \|u\|^{\theta - p^+} \Big),$$

gdzie $\theta \in (p^+, \widehat{p}^*)$. Zatem dla dostatecznie małego $\rho > 0$ istnieje $L > 0$ takie, że $R(u) \geqslant L$ dla każdego $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ spełniającego $\|u\| = \rho$.

Niech $\overline{u} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ oraz $\overline{c} > 0$ będą takie, jak w założeniu $H(j)_1(v)$. Dostajemy

$$\begin{aligned} R(\overline{u}) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla \overline{u}(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega \frac{\lambda}{p(x)} |\overline{u}(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega j(x, \overline{u}(x)) dx \\ &\leqslant \frac{1}{p^-} \int_\Omega |\nabla \overline{u}(x)|^{p(x)} dx + \frac{\lambda_-}{p^-} \int_\Omega |\overline{u}(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega j(x, \overline{u}(x)) dx \\ &\leqslant \overline{c} \int_\Omega (|\nabla \overline{u}(x)|^{p(x)} + |\overline{u}(x)|^{p(x)}) dx - \int_\Omega j(x, \overline{u}(x)) dx, \end{aligned}$$

gdzie $\overline{c} = \max\{\frac{1}{p^-}, \frac{\lambda_-}{p^-}\}$.

Wykorzystując Lemat 1.24(c),(d) oraz założenie $H(j)_1(v)$ otrzymujemy, że $R(\overline{u}) \leqslant 0$. Zatem na mocy Twierdzenia 1.16, istnieje punkt krytyczny $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ funkcjonału R taki, że $R(u) > 0 = R(0)$, w szczególności $0 \in \partial R(u)$.
Z ostatniej inkluzji mamy

$$0 = Au - \lambda |u|^{p(x)-2} u - v^*,$$

dla pewnego $v^* \in \partial \psi(u)$. Zatem

$$Au = \lambda |u|^{p(x)-2} u + v^*,$$

co oznacza, że dla każdej funkcji testowej $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dostajemy

$$\langle Au, v \rangle = \lambda \langle |u|^{p(x)-2} u, v \rangle + \langle v^*, v \rangle.$$

Inaczej mówiąc, otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)-2} (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N} dx \\ = &\int_\Omega \lambda |u(x)|^{p(x)-2} u(x) v(x) dx + \int_\Omega v^*(x) v(x) dx, \end{aligned}$$

dla każdej funkcji $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Ostatecznie, korzystając z definicji pochodnej dystrybucyjnej, mamy

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\Big(|\nabla u(x)|^{p(x)-2} \nabla u(x)\Big) = \lambda |u(x)|^{p(x)-2} u(x) + v^*(x) & \text{p.w. w } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

co jest równoważne

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u(x) - \lambda |u(x)|^{p(x)-2} u(x) \in \partial j(x, u(x)) & \text{p.w. w } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zatem $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (P). Ponieważ $R(u) > 0$, więc rozwiązanie to jest nietrywialne. □

3.1.4 Przykład superpotencjału spełniającego założenia $H(j)_1$

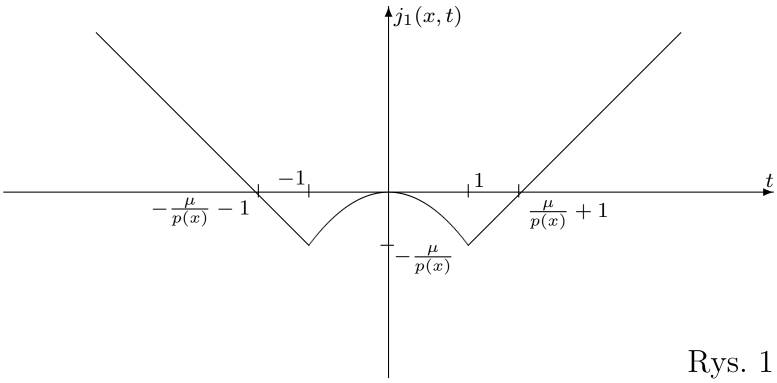
Uwaga 3.5. *Przykładem niegładkiego superpotencjału spełniającego założenia $H(j)_1(i)$–(iv) jest*

$$j_1(x,t) = \begin{cases} -\frac{\mu}{p(x)}|t|^{p(x)} & \text{jeśli} \quad |t| \leqslant 1, \\ |t| - \frac{\mu}{p(x)} - 1 & \text{jeśli} \quad |t| > 1, \end{cases}$$

gdzie $\mu > \frac{p^+\lambda_+}{p^-}$ oraz $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że

$$1 < p^- \leqslant p(x) \leqslant p^+ < \widehat{p}^*.$$

Rysunek 1 przedstawia wykres funkcji $j_1(x,\cdot)$ dla ustalonego $x \in \Omega$.



Rys. 1

3.2 Wzrost $p^*(x)$-podliniowy superpotencjału $j(x,t)$

W niniejszym rozdziale udowodnimy twierdzenie o istnieniu rozwiązania dla zagadnienia (P) przy ogólniejszym warunku wzrostu dla subróżniczki superpotencjału oraz słabszym warunku mówiącym o zachowaniu superpotencjału $j(x,t)$ w zerze.

3.2.1 Założenia

Odnośnie superpotencjału j będziemy przyjmowali następujące założenia.

$H(j)_2$ $j : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją taką, że $j(x,0) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ oraz

(i) funkcja $j(\cdot,t) \in \mathbb{R}$ jest mierzalna dla każdego $t \in \mathbb{R}$;

(ii) funkcja $j(x,\cdot) \in \mathbb{R}$ spełnia lokalnie warunek Lipschitza dla prawie wszystkich $x \in \Omega$;

(iii) dla prawie wszystkich $x \in \Omega$, każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz każdego $v \in \partial j(x,t)$ zachodzi

$$|v| \leqslant a(x) + c_1|t|^{r(x)-1},$$

gdzie $a \in L^\infty_+(\Omega)$, $c_1 > 0$ oraz $r \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ jest funkcją taką, że

$$p^+ < r^- := \min_{x\in\overline{\Omega}} r(x) \leqslant r(x) \leqslant r^+ := \max_{x\in\overline{\Omega}} r(x) < \widehat{p}^*;$$

(iv) istnieje $\mu > 0$ takie, że

$$\limsup_{t\to 0} \frac{j(x,t)}{|t|^{p(x)}} \leqslant -\mu,$$

jednostajnie dla prawie wszystkich $x \in \Omega$;

(v) zachodzi

$$\limsup_{|t|\to\infty} \frac{j(x,t)}{|t|^{p(x)}} < 0,$$

jednostajnie dla prawie wszystkich $x \in \Omega$;

(vi) istnieje element $\overline{u} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ taki, że

$$\frac{1}{p^-}\int_\Omega |\nabla \overline{u}(x)|^{p(x)}dx + \frac{\lambda_-}{p^-}\int_\Omega |\overline{u}(x)|^{p(x)}dx \leqslant \int_\Omega j(x,\overline{u}(x))dx,$$

gdzie $\lambda_- := \max\{0,-\lambda\}$.

Uwaga 3.6. *W porównaniu do założeń $H(j)_1$ dokonaliśmy następujących zmian. Po pierwsze podliniowy warunek wzrostu $H(j)_1(iii)$ został zastąpiony przez wzrost $p^*(x)$-podliniowy $H(j)_2(iii)$. Warunki mówiące o zachowaniu się subróżniczki potencjału w zerze $H(j)_2(iv)$ oraz w punkcie pośrednim $H(j)_2(vi)$ są obecnie bardziej ogólne (porównaj $H(j)_1(iv)$ i $H(j)_1(v)$), oraz dokładamy warunek $H(j)_2(v)$ mówiący o zachowaniu samego superpotencjału j w $+\infty$ oraz $-\infty$. Jest to warunek typu Landesmana-Lazera (zobacz Landesman-Lazer [35]). W dalszej części pracy będziemy dążyć do jego uogólnienia na bardziej ogólny warunek typu Tanga (zobacz Tang [43, 44]). W obecnej sytuacji zmieni się sposób dowodzenia niegładkiego warunku (PS) i nieznacznie uogólnimy Lemat 3.3.*

3.2.2 Niegładki warunek (PS)

Podobnie jak w poprzednim rozdziale, zaczniemy od wykazania niegładkiego warunku Palais-Smale'a.

Lemat 3.7. *Jeśli zachodzą założenia $H(j)_2$ oraz $\lambda \in (-\infty, \frac{p^-}{p^+}\lambda_*)$, to funkcjonał energii R spełnia niegładki warunek (PS).*

Dowód. Niech ciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ będzie taki, że

$$\text{ciąg wartości } \{R(u_n)\}_{n\geqslant 1} \text{ jest ograniczony oraz } m(u_n) \to 0 \text{ dla } n \to \infty,$$

gdzie $m(u_n) = \min\{\|u^*\|_* : u^* \in \partial R(u_n)\}$. Chcemy pokazać, że istnieje podciąg (nadal oznaczony przez $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$) taki, że $u_n \to u$ w przestrzeni $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Na początek pokażemy, że ciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ jest ograniczony. Z wyboru ciągu $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ wiemy, że $|R(u_n)| \leqslant M$ dla pewnej stałej $M > 0$, zatem dla każdego $n \geqslant 1$, mamy

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{\lambda}{p(x)}|u_n(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega j(x, u_n(x))dx \leqslant M. \tag{3.18}$$

Z definicji λ_* (zobacz (2.4)), mamy także

$$\lambda_* \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx, \tag{3.19}$$

dla każdego $n \geqslant 1$.

Na mocy założenia $H(j)_2(v)$ wiemy, że istnieją stałe $L_1 > 0$ i $c_2 > 0$ takie, że dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ oraz wszystkich t spełniających $|t| \geqslant L_1$, zachodzi

$$\frac{j(x,t)}{|t|^{p(x)}} \leqslant -c_2 < 0.$$

Zatem

$$j(x,t) \leqslant -c_2|t|^{p(x)},$$

dla każdego t takiego, że $|t| \geqslant L_1$.

Z drugiej strony, z twierdzenia Lebourga o wartości średniej (zobacz Twierdzenie 1.10), dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i każdego $t \in \mathbb{R}$ możemy znaleźć $v \in \partial j(x, kt)$, gdzie $0 < k < 1$ takie, że

$$|j(x,t) - j(x,0)| \leqslant |v||t|.$$

Zatem z założenia $H(j)_2(iii)$, dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ mamy

$$|j(x,t)| \leqslant a(x)|t| + c_1|t|^{r(x)} \leqslant a(x)|t| + c_1|t|^{r^+} + c_3, \tag{3.20}$$

dla pewnej stałej $c_3 > 0$. Wówczas z (3.20) wynika, że dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i każdego t spełniającego warunek $|t| < L_1$ zachodzi

$$|j(x,t)| \leqslant c_4, \tag{3.21}$$

dla pewnej stałej $c_4 > 0$. Zatem dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i każdego $t \in \mathbb{R}$, mamy

$$j(x,t) \leqslant -c_2|t|^{p(x)} + c_5, \tag{3.22}$$

gdzie $c_5 > 0$.

Wykorzystajmy zależność (3.22) w nierówności (3.18). Otrzymujemy

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{\lambda}{p(x)}|u_n(x)|^{p(x)}dx \leqslant M - \int_\Omega (c_2|u_n(x)|^{p(x)} - c_5)dx,$$

dla wszystkich $n \geqslant 1$, co prowadzi do

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{\lambda}{p(x)}|u_n(x)|^{p(x)}dx \leqslant c_6 \quad \forall n \geqslant 1, \tag{3.23}$$

dla $c_6 := M + c_5|\Omega| > 0$.

Rozważmy obecnie dwa przypadki.

Przypadek 1. Załóżmy, że $\lambda < 0$.

Ponieważ $\lambda_- = -\lambda > 0$, zatem z (3.23), dostajemy

$$\frac{\lambda_-}{p^+}\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}dx \leqslant c_6 \quad \forall n \geqslant 1,$$

zatem

$$\text{ciąg } \{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^{p(x)}(\Omega) \text{ jest ograniczony.} \tag{3.24}$$

Podobnie z (3.23), mamy

$$\frac{1}{p^+}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx \leqslant c_6,$$

zatem

$$\text{ciąg } \{\nabla u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^{p(x)}(\Omega;\mathbb{R}^N) \text{ jest ograniczony} \tag{3.25}$$

(zobacz Lemat 1.23 (c) oraz (d)).

Przypadek 2. Załóżmy teraz, że $\lambda \geqslant 0$.

Z (3.23), dostajemy

$$\int_\Omega \frac{1}{p^+}|\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{\lambda}{p^-}|u_n(x)|^{p(x)}dx \leqslant c_6, \tag{3.26}$$

a wykorzystując (3.19), dostajemy

$$\left(\frac{\lambda_*}{p^+} - \frac{\lambda}{p^-}\right)\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}dx \leqslant c_6.$$

Ponieważ $\lambda < \frac{p^-}{p^+}\lambda_*$, zatem $\frac{\lambda_*}{p^+} - \frac{\lambda}{p^-} > 0$. Wówczas dostajemy, że

$$\text{ciąg } \{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^{p(x)}(\Omega) \text{ jest ograniczony} \tag{3.27}$$

(zobacz Lemat 1.23 (c) oraz (d)).

Podobnie, wykorzystując (3.19) w nierówności (3.26), otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda_* p^-}\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx \leqslant c_6.$$

Ponieważ $\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda_* p^-} > 0$, zatem

$$\text{ciąg } \{\nabla u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^{p(x)}(\Omega;\mathbb{R}^N) \text{ jest ograniczony.} \tag{3.28}$$

Z (3.24), (3.25), (3.27) oraz (3.28) mamy, że

$$\text{ciąg } \{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega) \text{ jest ograniczony} \tag{3.29}$$

(zobacz Lemat 1.24 (c) oraz (d)).

Zatem, przechodząc ewentualnie do podciągu, możemy przyjąć, że

$$\begin{aligned} u_n &\to u \quad \text{słabo w } W_0^{1,p(x)}(\Omega),\\ u_n &\to u \quad \text{w } L^{p(x)}(\Omega), \end{aligned}$$

dla pewnego $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Dalej postępujemy analogicznie jak w dowodzie Lematu 3.2 i dostajemy, że

$$\limsup_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle \leqslant 0.$$

Wobec tego, na mocy Lematu 2.10 wnioskujemy, że $u_n \to u$ w $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, gdy $n \to \infty$. Zatem funkcjonał energii R spełnia niegładki warunek (PS). $\square$

Lemat 3.8. *Jeśli zachodzą założenia* $H(j)_2$, $\lambda \in (-\infty, \frac{p^-}{p^+}\lambda_*)$ *oraz* $\theta \in (r^+, \widehat{p}^*)$, *to istnieją stałe* $\beta_1, \beta_2 > 0$ *takie, że dla każdego* $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *spełniającego* $\|u\| < 1$, *zachodzi*

$$R(u) \geqslant \beta_1 \|u\|^{p^+} - \beta_2 \|u\|^{\theta}.$$

Dowód. Z założenia $H(j)_2(iv)$ możemy dobrać $\delta > 0$ tak, że dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ oraz każdego t spełniającego $|t| \leqslant \delta$, mamy

$$j(x,t) \leqslant \frac{-\mu}{2}|t|^{p(x)}.$$

Z drugiej strony, z założenia $H(j)_2(iii)$ dostajemy, że dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ oraz każdego t takiego, że $|t| > \delta$ mamy

$$|j(x,t)| \leqslant a_1|t| + c_1|t|^{r(x)},$$

dla pewnych stałych $a_1, c_1 > 0$ (zobacz (3.20) w dowodzie Lematu 3.7). Wobec tego dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$j(x,t) \leqslant \frac{-\mu}{2}|t|^{p(x)} + \gamma_\theta |t|^{\theta}, \tag{3.30}$$

dla pewnej stałej $\gamma_\theta > 0$.

Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1. Załóżmy, że $\lambda \leqslant 0$.

Wykorzystując zależność (3.30), otrzymujemy

$$\begin{aligned} R(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{\lambda}{p(x)}|u(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega j(x,u(x))dx \\ &\geqslant \int_\Omega \frac{1}{p^+}|\nabla u(x)|^{p(x)}dx + \int_\Omega \frac{\mu}{2}|u(x)|^{p(x)}dx - \gamma_\theta \int_\Omega |u(x)|^{\theta}dx. \end{aligned}$$

Zatem

$$R(u) \geqslant \beta_1 \Big[\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx \Big] - \gamma_\theta \|u\|_\theta^\theta,$$

gdzie $\beta_1 := \min\{\frac{1}{p^+}, \frac{\mu}{2}\}$.

Przypadek 2. Załóżmy teraz, że $\lambda > 0$.

Wykorzystując ponownie zależność (3.30) oraz definicję λ_* (zobacz (2.4)), uzyskujemy

$$\begin{aligned} R(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{\lambda}{p(x)}|u(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega j(x,u(x))dx \\ &\geqslant \int_\Omega \frac{1}{p^+}|\nabla u(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{\lambda}{p^-}|u(x)|^{p(x)}dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \quad + \int_\Omega \frac{\mu}{2}|u(x)|^{p(x)}dx - \gamma_\theta \int_\Omega |u(x)|^\theta dx \\
\geqslant\ & \frac{1}{p^+}\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)}dx - \frac{\lambda}{\lambda_* p^-}\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)}dx \\
& \quad + \frac{\mu}{2}\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx - \gamma_\theta \|u\|_\theta^\theta \\
=\ & \left(\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda_* p^-}\right)\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)}dx + \frac{\mu}{2}\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx - \gamma_\theta \|u\|_\theta^\theta.
\end{aligned}
$$

Ponieważ z założenia $\lambda < \frac{p^-}{p^+}\lambda_*$, zatem $\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda_* p^-} > 0$. Otrzymujemy

$$
R(u) \geqslant \beta_1 \Big[\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx \Big] - \gamma_\theta \|u\|_\theta^\theta, \tag{3.31}
$$

gdzie $\beta_1 := \min\{\frac{1}{p^+} - \frac{\lambda}{\lambda_* p^-}, \frac{\mu}{2}\}$.

Ponieważ $\theta < \widehat{p}^* \leqslant p^*(x)$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$, to istnieje stała $c_\theta > 0$ taka, że

$$
\|u\|_\theta \leqslant c_\theta \|u\| \qquad \text{dla każdego } u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \tag{3.32}
$$

(zobacz Lemat 1.22(c)).

Wykorzystując (3.32) oraz Lemat 1.24(d) w (3.31), dla każdego $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ spełniającego $\|u\| < 1$, dostajemy nierówność

$$
R(u) \geqslant \beta_1 \|u\|^{p^+} - \beta_2 \|u\|^\theta,
$$

gdzie $\beta_2 = \gamma_\theta c_\theta^\theta$. $\square$

3.2.3 Twierdzenie o istnieniu rozwiązania

Wykorzystując Lematy 3.7 oraz 3.8 udowodnimy następujące twierdzenie

Twierdzenie 3.9. *Jeśli zachodzą założenia $H(j)_2$ oraz $\lambda \in (-\infty, \frac{p^-}{p^+}\lambda_*)$, to zagadnienie (P) posiada nietrywialne rozwiązanie.*

Dowód. Wykorzystując Lemat 3.8, możemy dobrać $\rho > 0$ oraz $L > 0$ takie, aby $R(u) \geqslant L$ dla każdego $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ spełniającego $\|u\| = \rho$.

Niech $\overline{u} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ będzie takie jak w założeniu $H(j)_2(vi)$. Wówczas mamy

$$
\begin{aligned}
R(\overline{u}) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla \overline{u}(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{\lambda}{p(x)}|\overline{u}(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega j(x,\overline{u}(x))dx \\
&\leqslant \frac{1}{p^-}\int_\Omega |\nabla \overline{u}(x)|^{p(x)}dx + \frac{\lambda_-}{p^-}\int_\Omega |\overline{u}(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega j(x,\overline{u}(x))dx,
\end{aligned}
$$

gdzie $\lambda_- := \max\{0, -\lambda\}$.

Wykorzystując założenie $H(j)_2(vi)$ dostajemy, że $R(\overline{u}) \leqslant 0$. Zatem na mocy Twierdzenia 1.16, istnieje $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ takie, że $R(u) > 0 = R(0)$ oraz $0 \in \partial R(u)$.

Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 3.4 pokazujemy, że u jest nietrywialnym rozwiązaniem zagadnienia (P). □

3.2.4 Przykład superpotencjału spełniającego założenia $H(j)_2$

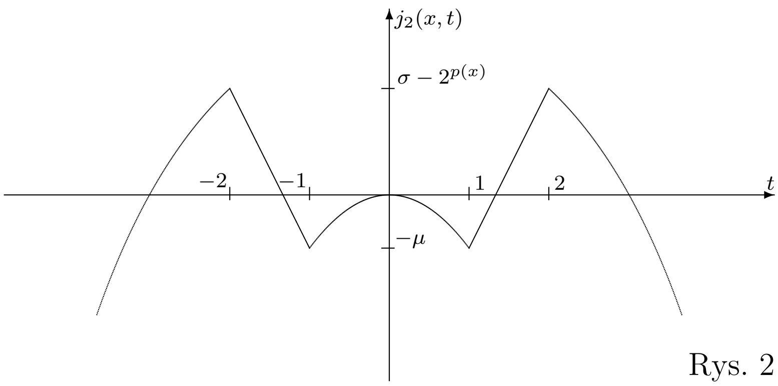
Uwaga 3.10. *Przykładem niegładkiego superpotencjału spełniającego założenia $H(j)_2(i)-(v)$ jest*

$$j_2(x,t) = \begin{cases} -\mu|t|^{p(x)} & \textit{jeśli} \quad |t| \leqslant 1, \\ (\mu + \sigma - |2|^{p(x)})|t| - 2\mu - \sigma + |2|^{p(x)} & \textit{jeśli} \quad 1 < |t| \leqslant 2, \\ \sigma - |t|^{p(x)} & \textit{jeśli} \quad |t| > 2, \end{cases}$$

gdzie $\mu > 0$, $\sigma > 0$ jest odpowiednio dobraną dużą stałą, zaś $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą spełniającą nierówności

$$1 < p^- \leqslant p(x) \leqslant p^+ < \widehat{p}^*.$$

Funkcja j_2 nie spełnia założeń $H(j)_1$. Rysunek 2 przedstawia wykres funkcji $j_2(x,\cdot)$ dla ustalonego $x \in \Omega$.



Rys. 2

3.3 Superpotencjał $j(x,t)$ spełniający uogólniony warunek Tanga

Obecnie zajmiemy się sytuacją, w której warunek typu Landesmana-Lazera (zobacz założenie $H(j)_2(v)$) jest zastąpiony bardziej ogólnym warunkiem typu Tanga (zobacz założenie $H(j)_3(v)$).

3.3.1 Założenia

Odnośnie superpotencjału j będziemy przyjmowali następujące założenia.

$H(j)_3$ $j : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją taką, że $j(x,0) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ oraz założenia $H(j)_3(i), (ii), (iii), (iv)$ oraz (vi) są takie jak odpowiadające im założenia $H(j)_2(i), (ii), (iii), (iv)$ oraz (vi). Ponadto

(v) zachodzi

$$\limsup_{|t|\to\infty} \frac{v^*t - j(x,t)}{|t|^{p(x)}} \leqslant 0,$$

jednostajnie dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ oraz dla każdego $v^* \in \partial j(x,t)$.

Uwaga 3.11. *Założenie $H(j)_3(v)$ uogólnia warunek Landesmana-Lazera (zobacz założenie $H(j)_2(v)$) i zostało zaproponowane przez Tanga (zobacz [43, 44]) przy badaniu zagadnień z p-laplasjanem. Obecna sytuacja spowoduje zmianę zakresu parametru λ, dla którego wykażemy twierdzenie o istnieniu rozwiązań dla zagadnienia (P). Będziemy również, zamiast niegładkiego warunku (PS) dowodzić, że funkcjonał energii R spełnia niegładki warunek (C).*

3.3.2 Niegładki warunek (C)

Lemat 3.12. *Jeśli zachodzą założenia $H(j)_3$ oraz $\lambda \in (-\infty, \frac{(p^- -1)p^+}{(p^+ -1)p^-}\lambda_*)$, to funkcjonał energii R spełnia niegładki warunek (C).*

Dowód. Niech ciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ będzie taki, że

ciąg wartości $\{R(u_n)\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony oraz $(1 + \|u_n\|)m(u_n) \to 0$ dla $n \to \infty$,

gdzie $m(u_n) = \min\{\|u^*\|_* : u^* \in \partial R(u_n)\}$. Chcemy pokazać, że istnieje podciąg (nadal oznaczony przez $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$) taki, że $u_n \to u$ w przestrzeni $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Najpierw pokażemy, że ciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ jest ograniczony.

Z wyboru ciągu $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ wiemy, że istnieje $M > 0$ takie, że $|R(u_n)| \leqslant M$ dla każdego $n \geqslant 1$, zatem mamy

$$-M \leqslant \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega \frac{\lambda}{p(x)} |u_n(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega j(x, u_n(x)) dx. \quad (3.33)$$

Ponieważ zbiór $\partial R(u_n) \subseteq (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ jest słabo zwarty i niepusty oraz funkcjonał normy jest słabo dolnie półciągły w przestrzeni Banacha, zatem możemy znaleźć $u_n^* \in \partial R(u_n)$ taki, że $\|u_n^*\|_* = m(u_n)$ dla $n \geqslant 1$.

Niech operator $A : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ będzie zdefiniowany przez (2.8). Wówczas, dla każdego $n \geqslant 1$ otrzymujemy, że

$$u_n^* = Au_n - \lambda|u_n|^{p(x)-2}u_n - v_n^*, \tag{3.34}$$

gdzie $v_n^* \in \partial\psi(u_n) \subseteq L^{p'(x)}(\Omega)$ dla $n \geqslant 1$, $p' : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ oraz $\psi : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem zdefiniowanym przez $\psi(u) = \int_\Omega j(x, u(x))dx$ dla $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ (zatem u_n^* i v_n^* zostały dobrane w taki sam sposób jak w dowodzie Lematu 3.2).

Z wyboru ciągu $\{u_n^*\}_{n\geqslant 1}$, przechodząc ewentualnie do podciągu mamy

$$|\langle u_n^*, w\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon_n\|w\|}{1+\|u_n\|} \quad \text{dla każdego } w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \tag{3.35}$$

przy $\varepsilon_n \searrow 0$.

Kładąc $w = u_n$ w nierówności (3.35) oraz wykorzystując (3.34), otrzymujemy

$$-\varepsilon_n \leqslant -\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx + \lambda\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}dx + \int_\Omega v_n^*(x)u_n(x)dx. \tag{3.36}$$

Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1. Załóżmy, że $\lambda < 0$.

Dodając stronami nierówności (3.33) oraz (3.36), dostajemy

$$\begin{aligned}-M-\varepsilon_n \leqslant\ & \Big(\frac{1}{p^-}-1\Big)\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx + \lambda_-\Big(\frac{1}{p^-}-1\Big)\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}dx \\ & + \int_\Omega v_n^*(x)u_n(x)dx - \int_\Omega j(x,u_n(x))dx, \end{aligned} \tag{3.37}$$

gdzie $\lambda_- := -\lambda$, zatem

$$\begin{aligned} & \lambda_-\Big(1-\frac{1}{p^-}\Big)\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}dx \\ \leqslant\ & M + \varepsilon_n + \int_\Omega v_n^*(x)u_n(x)dx - \int_\Omega j(x,u_n(x))dx. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Z założenia $H(j)_3(v)$ wiemy, że dla dowolnie małej stałej $c > 0$ istnieje stała $L_2 > 0$ taka, że dla prawie wszystkich $x \in \Omega$, każdego $|t| \geqslant L_2$ oraz każdego $v^* \in \partial j(x,t)$, mamy

$$\frac{v^*t - j(x,t)}{|t|^{p(x)}} \leqslant c.$$

W konsekwencji dostajemy, że dla $|t| \geqslant L_2$ zachodzi

$$v^*t - j(x,t) \leqslant c|t|^{p(x)}. \tag{3.39}$$

Z drugiej strony, na mocy twierdzenia Lebourga o wartości średniej (zobacz Twierdzenie 1.10), dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i każdego $t \in \mathbb{R}$ możemy dobrać $v \in \partial j(x,kt)$ gdzie $0 < k < 1$ takie, że

$$|j(x,t) - j(x,0)| \leqslant |v||t|.$$

Z założenia $H(j)_3(iii)$, dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ oraz każdego t spełniającego $|t| < L_2$ otrzymujemy, że

$$|j(x,t)| \leqslant c_7, \tag{3.40}$$

dla pewnej stałej $c_7 > 0$ (porównaj (3.21) w Lemacie 3.7). Zatem, z oszacowań (3.39) oraz (3.40) dostajemy, że dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i każdego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$v^*t - j(x,t) \leqslant c|t|^{p(x)} + c_8, \tag{3.41}$$

gdzie $c_8 > 0$ jest pewną stałą.

Wykorzystując wyżej otrzymane oszacowanie (3.41) w nierówności (3.38), dostajemy

$$\lambda_-\Big(1 - \frac{1}{p^-}\Big) \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)} dx \leqslant M + \varepsilon_n + c\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)} dx + \int_\Omega c_8 \; dx,$$

dla każdego $n \geqslant 1$, zatem

$$\Big[\lambda_-\Big(1 - \frac{1}{p^-}\Big) - c\Big] \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)} dx \leqslant c_9,$$

gdzie $c_9 := M + \varepsilon_1 + c_8|\Omega| > 0$.

Ponieważ $\lambda_-\Big(1 - \frac{1}{p^-}\Big) > 0$ oraz $c > 0$ może być dowolnie małą stałą, zatem dobieramy c tak, aby $\lambda_-\Big(1 - \frac{1}{p^-}\Big) - c > 0$. Dostajemy, że

$$\text{ciąg } \{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^{p(x)}(\Omega) \text{ jest ograniczony} \tag{3.42}$$

(zobacz Lemat 1.23 (c) oraz (d)).

Z nierówności (3.37) dostajemy także

$$\Big(1 - \frac{1}{p^-}\Big) \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)} dx \leqslant M + \varepsilon_n + \int_\Omega v_n^*(x) u_n(x) dx - \int_\Omega j(x, u_n(x)) dx.$$

Postępując analogicznie jak powyżej, wykorzystując zależność (3.41) dostajemy

$$\Big(1 - \frac{1}{p^-}\Big) \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)} dx \leqslant M + \varepsilon_n + c\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)} dx + \int_\Omega c_8 \; dx,$$

dla każdego $n \geqslant 1$. Ponieważ wiemy, że ciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^{p(x)}(\Omega)$ jest ograniczony (zobacz (3.42), zatem

$$\left(1-\frac{1}{p^-}\right)\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx \leqslant c_{10},$$

gdzie $c_{10} > 0$ jest pewną stałą. Skoro $\left(1-\frac{1}{p^-}\right) > 0$, więc

$$\text{ciąg } \{\nabla u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^{p(x)}(\Omega;\mathbb{R}^N) \text{ jest ograniczony} \tag{3.43}$$

(zobacz Lemat 1.23 (c) oraz (d)).

Korzystając z (3.42) oraz (3.43) dostajemy, że

$$\text{ciąg } \{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega) \text{ jest ograniczony} \tag{3.44}$$

(zobacz Lemat 1.24(c) i (d)).

Przypadek 2. Załóżmy teraz, że $\lambda \geqslant 0$.

Dodając stronami nierówności (3.33) oraz (3.36), otrzymujemy

$$\begin{aligned} -M-\varepsilon_n \quad \leqslant \quad & \left(\frac{1}{p^-}-1\right)\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx + \lambda\left(1-\frac{1}{p^+}\right)\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}dx \\ & + \int_\Omega v_n^*(x)u_n(x)dx - \int_\Omega j(x,u_n(x))dx. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Z definicji λ_* (zobacz (2.4)) dostajemy

$$\lambda_*\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx,$$

dla każdego $n \geqslant 1$.

Wykorzystując tą zależność w nierówności (3.45), otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left[\lambda_*\left(1-\frac{1}{p^-}\right)-\lambda\left(1-\frac{1}{p^+}\right)\right]\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}dx \\ \leqslant \quad & M+\varepsilon_n+\int_\Omega v_n^*(x)u_n(x)dx - \int_\Omega j(x,u_n(x))dx. \end{aligned} \tag{3.46}$$

W analogiczny sposób jak w Przypadku 1, używając (3.41) w nierówności (3.46) uzyskujemy

$$\left[\lambda_*\left(1-\frac{1}{p^-}\right)-\lambda\left(1-\frac{1}{p^+}\right)-c\right]\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}dx \leqslant c_{11},$$

gdzie $c > 0$ jest dowolnie małą stałą oraz $c_{11} := M+\varepsilon_1+c_8|\Omega| > 0$ jest pewną stałą (zależną od c).

Ponieważ $\lambda < \frac{(p^- - 1)p^+}{(p^+ - 1)p^-}\lambda_*$, zatem możemy dobrać stałą $c > 0$ tak małą, aby

$$\lambda_*\Big(1 - \frac{1}{p^-}\Big) - \lambda\Big(1 - \frac{1}{p^+}\Big) - c > 0,$$

w szczególności

$$\text{ciąg } \{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^{p(x)}(\Omega) \text{ jest ograniczony} \tag{3.47}$$

(zobacz Lemat 1.23 (c) oraz (d)).

Biorąc jeszcze raz pod uwagę nierówność (3.45) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Big(1 - \frac{1}{p^-}\Big)\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx \ &\leqslant\ M + \varepsilon_n + \lambda\Big(1 - \frac{1}{p^+}\Big)\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}dx \\ &\quad + \int_\Omega v_n^*(x)u_n(x)dx - \int_\Omega j(x, u_n(x))dx. \qquad (3.48)\end{aligned}$$

Wykorzystując zależność (3.41) oraz fakt (3.47) w nierówności (3.48) dostajemy

$$\Big(1 - \frac{1}{p^-}\Big)\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx \leqslant c_{12},$$

dla pewnej stałej $c_{12} > 0$.

Ponieważ $1 - \frac{1}{p^-} > 0$, zatem

$$\text{ciąg } \{\nabla u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^{p(x)}(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ jest ograniczony} \tag{3.49}$$

(zobacz Lemat 1.23 (c) oraz (d)).

Z (3.47) i (3.49) dostajemy, że

$$\text{ciąg } \{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega) \text{ jest ograniczony}$$

(zobacz Lemat 1.24(c) i (d)).

Łącząc Przypadki 1 oraz 2 uzyskujemy, że

$$\text{ciąg } \{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega) \text{ jest ograniczony.}$$

Pozostała część dowodu przebiega analogicznie jak w dowodzie Lematu 3.2. W efekcie dostajemy

$$\limsup_{n\to\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle \leqslant 0.$$

Korzystając z Lematu 2.10 dostajemy, że $u_n \to u$ w $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, gdy $n \to \infty$. Zatem pokazaliśmy, że funkcjonał energii R spełnia niegładki warunek (C). $\square$

Lemat 3.13. *Jeśli zachodzą założenia $H(j)_3$, $\lambda \in (-\infty, \frac{p^-}{p^+}\lambda_*)$ oraz $\theta \in (r^+, \widehat{p}^*)$, to istnieją stałe $\beta_1, \beta_2 > 0$ takie, że dla każdego $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ spełniającego $\|u\| < 1$, zachodzi*

$$R(u) \geqslant \beta_1\|u\|^{p^+} - \beta_2\|u\|^\theta.$$

Dowód. Dowód lematu jest identyczny jak dowód Lematu 3.8. $\square$

3.3.3 Twierdzenie o istnieniu rozwiązania

Wykorzystując Lematy 3.12 oraz 3.13 można dowieść następującego twierdzenia

Twierdzenie 3.14. *Jeśli zachodzą założenia $H(j)_3$ oraz $\lambda \in (-\infty, \widetilde{p}\lambda_*)$ (zobacz (2.5)), to zagadnienie (P) posiada nietrywialne rozwiązanie.*

Dowód. Dowód twierdzenia jest identyczny jak dowód Twierdzenia 3.9. □

3.3.4 Przykład superpotencjału spełniającego założenia $H(j)_3$

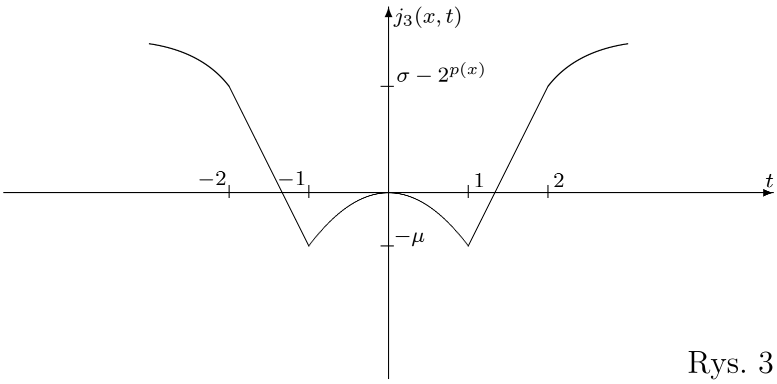
Uwaga 3.15. *Przykładem niegładkiego superpotencjału spełniającego założenia $H(j)_3(i)-(v)$ jest następujący funkcja*

$$j_3(x,t) = \begin{cases} -\mu|t|^{p(x)} & \textit{jeśli} \quad |t| \leqslant 1, \\ (\mu+\sigma-|2|^{p(x)})|t| - 2\mu - \sigma + |2|^{p(x)} & \textit{jeśli} \quad 1 < |t| \leqslant 2, \\ \ln|t| + \sigma - |2|^{p(x)} - \ln|2| & \textit{jeśli} \quad |t| > 2, \end{cases}$$

gdzie $\mu > 0$, $\sigma > 0$ jest odpowiednio dobraną dużą stałą, zaś $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą spełniającą nierówności

$$1 < p^- \leqslant p(x) \leqslant p^+ < \widehat{p}^*.$$

Rysunek 3 przedstawia wykres funkcji $j_3(x,\cdot)$ dla ustalonego $x \in \Omega$.



Rys. 3

Funkcja $j_3(x,t)$ nie spełnia założeń $H(j)_2$. Mówiąc dokładniej, nie spełnia warunku $H(j)_2(v)$ dotyczącego zachowania się superpotencjału w nieskończoności. Rzeczywiście, spełnia ona założenie $H(j)_3(v)$, gdyż

$$\limsup_{|t|\to\infty} \frac{j_3'(x,t)t - j_3(x,t)}{|t|^{p(x)}} = \limsup_{|t|\to\infty} \frac{1 - \ln|t| - \sigma + |2|^{p(x)} + \ln|2|}{|t|^{p(x)}} = 0 \leqslant 0,$$

a nie spełnia założenia $H(j)_2(v)$, ponieważ

$$\limsup_{|t|\to\infty} \frac{j_3(x,t)}{|t|^{p(x)}} = \limsup_{|t|\to\infty} \frac{\ln|t| + \sigma - |2|^{p(x)} - \ln|2|}{|t|^{p(x)}} = 0.$$

3.4 Superpotencjał $j(x,t)$ spełniający odwrócony warunek Tanga

Rozważmy jeszcze jedno podejście do naszego zagadnienia (P). W sytuacji tej udało się nam wyeliminować sztuczne założenie mówiące o zachowaniu w punkcie pośrednim (zobacz $H(j)_1(v)$ lub $H(j)_2(vi)$ lub $H(j)_3(vi)$). W nieskończoności również przyjmujemy jedno z najbardziej ogólnych założeń tzn. warunek Tanga, tyle że jest on przeciwny do tego, który był wykorzystywany w założeniach $H(j)_3$. Nazywamy go odwróconym warunkiem Tanga.

3.4.1 Założenia

Odnośnie superpotencjału j będziemy przyjmowali następujące założenia.

$H(j)_4$ $j : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją taką, że $j(x,0) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ oraz założenia $H(j)_4(i), (ii), (iii)$ oraz (iv) są takie jak odpowiadające im założenia $H(j)_2(i), (ii), (iii)$ oraz (iv). Ponadto

(v) istnieją stałe $\nu > p^+$ oraz $T > 0$ takie, że

$$\nu j(x,t) \leqslant -j^0(x,t;-t) \quad \text{oraz} \quad \operatorname{ess\,inf}\, j(\cdot,t) > 0,$$

dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i każdego $t \in \mathbb{R}$ takiego, że $|t| \geqslant T$.

Aby porównać założenia $H(j)_3$ i $H(j)_4$ (patrz Uwaga 3.17), pokażemy najpierw poniższy lemat, który wykorzystamy także w dowodzie Lematu 3.18.

Lemat 3.16. *Jeśli zachodzą założenia $H(j)_4$, to wówczas*

a) funkcja

$$f : k \to \frac{1}{k^\nu} j(x,kt)$$

spełnia lokalnie warunek Lipschitza na przedziale $(0,+\infty)$, dla każdego $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz prawie wszystkich $x \in \Omega$;

b) istnieje stała $l > 0$ taka, że

$$j(x,t) \geqslant l|t|^\nu,$$

dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i każdego t spełniającego $|t| \geqslant T$.

Dowód. a) Ustalmy $x \in \Omega$ taki, że $j(x,\cdot)$ spełnia lokalnie warunek Lipschitza oraz ustalamy $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Załóżmy, że U jest zbiorem zwartym zawartym w przedziale $(0,+\infty)$. Na mocy założenia $H(j)_4(ii)$ wiemy, że istnieje stała $\overline{K} > 0$ taka, że

$$|j(x,u_1) - j(x,u_2)| \leqslant \overline{K}|u_1 - u_2| \quad \text{dla każdego} \quad u_1, u_2 \in tU. \tag{3.50}$$

Wówczas, dla dowolnych $k_1, k_2 \in U$ mamy

$$\begin{aligned}|f(k_1) - f(k_2)| &= \Big|\frac{1}{k_1^\nu} j(x, k_1 t) - \frac{1}{k_2^\nu} j(x, k_2 t)\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{k_1^\nu}|j(x, k_1 t) - j(x, k_2 t)| + \frac{|k_2^\nu j(x, k_2 t) - k_1^\nu j(x, k_2 t)|}{k_1^\nu k_2^\nu} \\ &= \frac{1}{k_1^\nu}|j(x, k_1 t) - j(x, k_2 t)| + \frac{|j(x, k_2 t)|}{k_1^\nu k_2^\nu}|k_2^\nu - k_1^\nu|.\end{aligned}$$

Wykorzystując (3.50), otrzymujemy

$$\begin{aligned}&|f(k_1) - f(k_2)| \\ \leqslant\ & \frac{\overline{K}}{k_1^\nu}|k_1 - k_2||t| + \frac{|j(x, k_2 t)|}{k_1^\nu k_2^\nu}|k_1 - k_2|\Big|k_1^{\nu-1} k_2 + k_1^{\nu-2} k_2^2 + \ldots + k_1 k_2^{\nu-1}\Big|.\end{aligned}$$

Ponieważ U jest zbiorem zwartym, to

$$|f(k_1) - f(k_2)| \leqslant s|k_1 - k_2|,$$

dla pewnego $s = s(x, t, U) > 0$. Zatem funkcja f spełnia lokalnie warunek Lipschitza na przedziale $(0, +\infty)$.

b) Rozważymy teraz subróżniczkę Clarke'a dla funkcji f. Dostajemy

$$\partial f(k) = \partial\Big(\frac{1}{k^\nu} j(x, kt)\Big) \subseteq \frac{-\nu}{k^{\nu+1}} j(x, kt) + \frac{1}{k^\nu}\partial j(x, kt)t,$$

dla każdego $k \in (0, +\infty)$. Na mocy twierdzenia Lebourga o wartości średniej dla funkcji spełniającej lokalnie warunek Lipschitza (zobacz Twierdzenie 1.10), dla $k > 1$ możemy dobrać $\xi \in (1, k)$ takie, że

$$\begin{aligned}f(k) - f(1) &\in \Big[\frac{-\nu}{\xi^{\nu+1}} j(x, \xi t) + \frac{1}{\xi^\nu}\partial j(x, \xi t)t\Big](k-1) \\ &= \frac{k-1}{\xi^{\nu+1}}(-\nu j(x, \xi t) + \partial j(x, \xi t)\xi t), \qquad (3.51)\end{aligned}$$

dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ oraz każdego $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Z definicji subróżniczki Clarke'a mamy

$$\langle \eta, -\xi t\rangle \leqslant j^0(x, \xi t; -\xi t), \quad \text{dla każdego } \eta \in \partial j(x, \xi t).$$

Wykorzystując ten fakt w (3.51) oraz biorąc pod uwagę warunek $H(j)_4(v)$, dostajemy

$$\frac{k-1}{\xi^{\nu+1}}(-\nu j(x, \xi t) + \partial j(x, \xi t)\xi t) \geqslant \frac{k-1}{\xi^{\nu+1}}(-\nu j(x, \xi t) - j^0(x, \xi t; -\xi t)) \geqslant 0,$$

dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i każdego t takiego, że $|t| \geqslant T$. Zatem z zależności (3.51) uzyskujemy

$$\frac{1}{k^\nu} j(x, kt) - j(x, t) = f(k) - f(1) \geqslant 0$$

oraz
$$k^\nu j(x,t) \leqslant j(x,kt),$$
dla prawie wszystkich $x \in \Omega$, wszystkich $k > 1$ i t takich, że $|t| \geqslant T$.

Wobec tego mamy
$$j(x,t) = j(x, \frac{t}{T}T) \geqslant \frac{t^\nu}{T^\nu} j(x,T), \quad \text{dla } t \geqslant T,$$
oraz
$$j(x,t) = j(x, \frac{|t|}{T}(-T)) \geqslant \frac{|t|^\nu}{T^\nu} j(x,-T), \quad \text{dla } t \leqslant -T.$$
Zatem
$$j(x,t) \geqslant l|t|^\nu,$$
dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ oraz każdego t takiego, że $|t| \geqslant T$, gdzie
$$l = \frac{1}{T^\nu} \min\{\operatorname{ess\,inf} j(\cdot, T), \operatorname{ess\,inf} j(\cdot, -T)\} > 0.$$
□

Uwaga 3.17. *(i) Porównajmy poprzednie założenia $H(j)_3$ z obecnymi $H(j)_4$.*

Jeśli zachodzi warunek $H(j)_3(v)$ (warunek Tanga), to dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje stała $T > 0$ taka, że dla prawie wszystkich $x \in \Omega$, każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz każdego $v^* \in \partial j(x,t)$ mamy, że
$$v^* t - j(x,t) \leqslant \varepsilon \text{ dla } \ |t| \geqslant T.$$
Z drugiej strony, z definicji subróżniczki Clarke'a dostajemy zależność postaci
$$-v^* t \leqslant j^0(x,t;-t).$$
Zatem
$$j(x,t) + \varepsilon \geqslant -j^0(x,t;-t), \tag{3.52}$$
dla każdego t spełniającego $|t| \geqslant T$ (porównaj założenie $H(j)_4(v)$).

Z drugiej strony, jeśli zachodzi założenie $H(j)_4(v)$, to dla prawie wszystkich $x \in \Omega$, każdego t, spełniającego $|t| \geqslant T$ oraz dla każdego $v^* \in \partial j(x,t)$, mamy
$$j(x,t) \leqslant \nu j(x,t) \leqslant -j^0(x,t;-t) \leqslant v^* t,$$
gdzie $\nu > p^+$. Zatem korzystając z Lematu 3.16(b), mamy
$$\limsup_{|t|\to\infty} \frac{v^* t - j(x,t)}{|t|^{p(x)}} \geqslant \limsup_{|t|\to\infty} \frac{(\nu-1)j(x,t)}{|t|^{p(x)}} \geqslant \limsup_{|t|\to\infty} \frac{(\nu-1)l|t|^\nu}{|t|^{p(x)}} = +\infty, \tag{3.53}$$
jednostajnie dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i każdego $v^* \in \partial j(x,t)$.

Zatem założenia $H(j)_3(v)$ oraz $H(j)_4(v)$ wykluczają się wzajemnie. Warunek $H(j)_4(v)$ będziemy nazywali odwróconym warunkiem Tanga.

(ii) W obecnej sytuacji nie potrzebujemy warunku mówiącego o zachowaniu superpotencjału w punkcie pośrednim. W dowodzie będziemy wykorzystywali własności uogólnionej pochodnej kierunkowej. Niegładki warunek (C) zostanie wykazany dla dowolnego parametru $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.4.2 Niegładki warunek (C)

Lemat 3.18. *Jeśli zachodzą założenia $H(j)_4$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$, to funkcjonał R spełnia niegładki warunek (C).*

Dowód. Niech ciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ będzie taki, że

ciąg wartości $\{R(u_n)\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony oraz $(1+\|u_n\|)m(u_n) \to 0$ dla $n \to \infty$,

gdzie $m(u_n) = \min\{\|u^*\|_* : u^* \in \partial R(u_n)\}$. Chcemy pokazać, że istnieje podciąg (nadal oznaczony przez $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$) taki, że $u_n \to u$ w przestrzeni $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Najpierw pokażemy, że ciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ jest ograniczony. Ponieważ z wyboru ciągu $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ istnieje $M > 0$ takie, że $|R(u_n)| \leqslant M$ dla każdego $n \geqslant 1$, zatem

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega \frac{\lambda}{p(x)}|u_n(x)|^{p(x)}dx - \int_\Omega j(x,u_n(x))dx \leqslant M, \tag{3.54}$$

co daje

$$\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx - \frac{\lambda_+ p^+}{p^-}\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}dx - p^+\int_\Omega j(x,u_n(x))dx \leqslant p^+M, \tag{3.55}$$

gdzie $\lambda_+ := \max\{\lambda, 0\}$.

Z wyboru ciągu $\{u_n^*\}_{n\geqslant 1}$, przechodząc ewentualnie do podciągu mamy, że

$$|\langle u_n^*, w\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon_n\|w\|}{1+\|u_n\|} \quad \text{dla każdego } w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \tag{3.56}$$

gdzie $\varepsilon_n \searrow 0$ oraz

$$u_n^* = Au_n - \lambda|u_n|^{p(x)-2}u_n - v_n^* \tag{3.57}$$

jest takie, że $u_n^* \in \partial R(u_n)$, $\|u_n^*\|_* = m(u_n)$, z $v_n^* \in \partial\psi(u_n)$, $\psi(u) = \int\limits_\Omega j(x,u(x))dx$ dla $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ oraz A jest zadane przez (2.8) (porównaj (3.13) w dowodzie Lematu 3.2).

Kładąc $w = u_n$ w (3.56) oraz wykorzystując zależność (3.57), otrzymujemy

$$-\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)}dx + \lambda\int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}dx + \int_\Omega v_n^*(x)u_n(x)dx \leqslant \varepsilon_n. \tag{3.58}$$

Z definicji uogólnionej subróżniczki Clarke'a dostajemy

$$\langle v_n^*, -u_n \rangle \leqslant j^0(x, u_n; -u_n).$$

Zatem

$$\langle v_n^*, u_n \rangle \geqslant -j^0(x, u_n; -u_n),$$

dla każdego $n \geqslant 1$.

Wykorzystując otrzymaną zależność w nierówności (3.58), uzyskujemy

$$-\int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)} dx - \lambda_- \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega j^0(x, u_n(x); -u_n(x)) dx \leqslant \varepsilon_n, \quad (3.59)$$

gdzie $\lambda_- := \max\{-\lambda, 0\}$.

Dodając stronami nierówności (3.55) oraz (3.59), otrzymujemy

$$-\Big(\lambda_- + \frac{\lambda_+ p^+}{p^-}\Big) \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega \Big(p^+ j(x, u_n(x)) + j^0(x, u_n(x); -u_n(x))\Big) dx \leqslant \varepsilon_n + Mp^+.$$

Zatem

$$-\int_\Omega \Big(\nu j(x, u_n(x)) + j^0(x, u_n(x); -u_n(x))\Big) dx + (\nu - p^+) \int_\Omega j(x, u_n(x)) dx \leqslant \varepsilon_n + Mp^+ + \Big(\lambda_- + \frac{\lambda_+ p^+}{p^-}\Big) \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)} dx, \quad (3.60)$$

dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i każdego $n \geqslant 1$, gdzie $\nu > p^+$ jest jak w założeniu $H(j)_4(v)$.

Z założenia $H(j)_4(v)$ wiemy, że istnieją stałe $T, c_{13} > 0$ takie, że

$$-\int_{\{|u_n| \geqslant T\}} \Big(\nu j(x, u_n(x)) + j^0(x, u_n(x); -u_n(x))\Big) dx \geqslant -c_{13}. \quad (3.61)$$

Na mocy założenia $H(j)_4(iii)$, wykorzystując twierdzenie Lebourga o wartości średniej (zobacz Twierdzenie 1.10) oraz definicję subróżniczki Clarke'a, w podobny sposób jak w dowodzie Lematu 3.12 (zobacz (3.21)) możemy wykazać, że dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ oraz każdego t takiego, że $|t| < T$ istnieją stałe $c_{14}, c_{15} > 0$ takie, że

$$|j(x, t)| \leqslant c_{14} \quad \text{oraz} \quad |j^0(x, t; -t)| \leqslant c_{15}, \quad (3.62)$$

zatem

$$\nu j(x, u_n(x)) + j^0(x, u_n(x); -u_n(x)) \leqslant c_{16},$$

gdzie $c_{16} := \nu c_{14} + c_{15} > 0$. Zatem

$$-\int_{\{|u_n| < T\}} \Big(\nu j(x, u_n(x)) + j^0(x, u_n(x); -u_n(x))\Big) dx \geqslant -c_{17}, \quad (3.63)$$

gdzie $c_{17} = c_{16}|\Omega| > 0$. Z zależności (3.61) i (3.63), otrzymujemy

$$-\int_\Omega \Big(\nu j(x, u_n(x)) + j^0(x, u_n(x); -u_n(x))\Big) dx \geqslant -c_{13} - c_{17}. \quad (3.64)$$

Z drugiej strony wykorzystując (3.62) oraz Lemat 3.16(b), dla każdego $n \geqslant 1$, dostajemy

$$\begin{aligned}
& (\nu - p^+) \int_\Omega j(x, u_n(x)) dx \\
= \;& (\nu - p^+)\Big(\int_{\{|u_n| \geqslant T\}} j(x, u_n(x)) dx + \int_{\{|u_n| < T\}} j(x, u_n(x)) dx \Big) \\
\geqslant \;& (\nu - p^+) l \int_{\{|u_n| \geqslant T\}} |u_n(x)|^\nu dx - c_{14}|\Omega| \\
= \;& (\nu - p^+) l \int_\Omega |u_n(x)|^\nu dx - (\nu - p^+) l \int_{\{|u_n| < T\}} |u_n(x)|^\nu dx - c_{14}|\Omega| \\
\geqslant \;& c_{18} \|u_n\|_\nu^\nu - c_{19},
\end{aligned} \tag{3.65}$$

gdzie $c_{18} = (\nu - p^+) l > 0$ oraz $c_{19} = ((\nu - p^+) l T^\nu + c_{14})|\Omega| > 0$.

Wykorzystując zależności (3.64) oraz (3.65) w nierówności (3.60), otrzymujemy

$$c_{18}\|u_n\|_\nu^\nu \leqslant \varepsilon_n + Mp^+ + c_{13} + c_{17} + c_{19} + \Big(\lambda_- + \frac{\lambda_+ p^+}{p^-}\Big) \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)} dx.$$

Ponieważ $\nu > p^+ \geqslant p(x)$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$, zatem dostajemy, że

$$\text{ciąg } \{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^\nu(\Omega) \text{ jest ograniczony.} \tag{3.66}$$

Jeśli $\|u_n\|_{p(x)} > 1$, to

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{p(x)}^{p^-} \;&\leqslant\; \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)} dx \;\leqslant\; \int_\Omega (1 + |u_n(x)|^{p^+}) dx \;=\; |\Omega| + \|u_n\|_{p^+}^{p^+} \\
&\leqslant\; |\Omega| + c_{20}\|u_n\|_\nu^\nu \;\leqslant\; c_{21},
\end{aligned}$$

dla pewnych stałych $c_{20}, c_{21} > 0$ (zobacz Lemat 1.23(c)). Zatem

$$\text{ciąg } \{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^{p(x)}(\Omega) \text{ jest ograniczony.} \tag{3.67}$$

Rozważmy po raz kolejny nierówność (3.54) i pomnóżmy ją obustronnie przez $\nu > p^+$. Wówczas dostajemy

$$\int_\Omega \frac{\nu}{p^+} |\nabla u_n(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega \frac{\lambda_+ \nu}{p^-} |u_n(x)|^{p(x)} dx - \nu \int_\Omega j(x, u_n(x)) dx \leqslant \nu M, \tag{3.68}$$

dla każdego $n \geqslant 1$.

Dodając stronami nierówności (3.59) oraz (3.68), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \Big(\frac{\nu}{p^+} - 1\Big) |\nabla u_n(x)|^{p(x)} dx - \Big(\lambda_- + \frac{\lambda_+ \nu}{p^-}\Big) \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)} dx \\
& \qquad - \int_\Omega \Big(\nu j(x, u_n(x) + j^0(x, u_n(x); -u_n(x))\Big) dx \;\leqslant\; \varepsilon_n + \nu M.
\end{aligned}$$

Z (3.67) wiemy, że ciąg $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^{p(x)}(\Omega)$ jest ograniczony, zatem wykorzystując nierówność (3.64), mamy

$$\Big(\frac{\nu}{p^+} - 1\Big) \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p(x)} dx \leqslant c_{22},$$

dla pewnej stałej $c_{22} > 0$ i każdego $n \geqslant 1$.

Ponieważ $\frac{\nu}{p^+} - 1 > 0$, więc

$$\text{ciąg } \{\nabla u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq L^{p(x)}(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ jest ograniczony.} \tag{3.69}$$

Z (3.67) i (3.69) uzyskujemy, że

$$\text{ciąg } \{u_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega) \text{ jest ograniczony}$$

(zobacz Lemat 1.24(c) oraz (d)).

Pozostała część dowodu przebiega w analogiczny sposób jak w dowodzie Lematu 3.2. W efekcie dostajemy, że dla pewnego podciągu $u_n \to u$ w przestrzeni $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, a zatem funkcjonał energii R spełnia niegładki warunek (C). □

Lemat 3.19. *Jeśli zachodzą założenia $H(j)_4$, $\lambda \in (-\infty, \frac{p^-}{p^+}\lambda_*)$ oraz $\theta \in (r^+, \widehat{p}^*)$, to istnieją stałe $\beta_1, \beta_2 > 0$ takie, że dla każdego $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ spełniającego $\|u\| < 1$, zachodzi*

$$R(u) \geqslant \beta_1 \|u\|^{p^+} - \beta_2 \|u\|^{\theta}.$$

Dowód. Dowód lematu przebiega identycznie jak dowód Lematu 3.8. □

3.4.3 Twierdzenie o istnieniu rozwiązania

Twierdzenie 3.20. *Jeśli zachodzą założenia $H(j)_4$ oraz $\lambda \in (-\infty, \frac{p^-}{p^+}\lambda_*)$, to zagadnienie (P) posiada nietrywialne rozwiązanie.*

Dowód. Na mocy Lematu 3.19 wiemy, że istnieją stałe $\beta_1, \beta_2 > 0$ takie, że dla każdego $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ spełniającego $\|u\| < 1$, mamy

$$R(u) \geqslant \beta_1 \|u\|^{p^+} \Big(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \|u\|^{\theta - p^+}\Big).$$

Ponieważ $p^+ < \theta$, zatem dla dostatecznie małego $\rho \in (0,1)$ istnieje $L > 0$ takie, że $R(u) \geqslant L$ dla każdego $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ spełniającego $\|u\| = \rho$.

Następnie wykorzystując Lemat 3.16(b), dla dowolnego $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$ oraz $h > 1$ dostajemy

$$\begin{aligned} R(hu) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla hu(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega \frac{\lambda}{p(x)} |hu(x)|^{p(x)} dx - \int_\Omega j(x, hu(x)) dx \\ &\leqslant h^{p^+} \Big(\frac{1}{p^-} \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p(x)} dx + \frac{\lambda_-}{p^-} \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx \Big) - \int_\Omega j(x, hu(x)) dx \\ &\leqslant \overline{c} \cdot h^{p^+} \Big(\int_\Omega (|\nabla u(x)|^{p(x)} + |u(x)|^{p(x)}) dx \Big) - l \cdot h^{\nu} \int_\Omega |u(x)|^{\nu} dx + c_{23}, \end{aligned}$$

dla pewnej stałej $c_{23} > 0$, gdzie $\lambda_- := \max\{0, -\lambda\}$ oraz $\overline{c} = \max\{\frac{1}{p^-}, \frac{\lambda_-}{p^-}\}$.

Skoro $\nu > p^+$, zatem $R(hu) \to -\infty$ dla $h \to \infty$. Zatem możemy zastosować Twierdzenie 1.16, które daje nam istnienie punktu krytycznego $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ takiego, że $R(u) > 0 = R(0)$, w szczególności $0 \in \partial R(u)$.

Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 3.4 pokazujemy, że u jest nietrywialnym rozwiązaniem zagadnienia (P). □

3.4.4 Przykład superpotencjału spełniającego założenia $H(j)_4$

Uwaga 3.21. *Przykładem niegładkiego superpotencjału spełniającego założenia* $H(j)_4$ *jest*

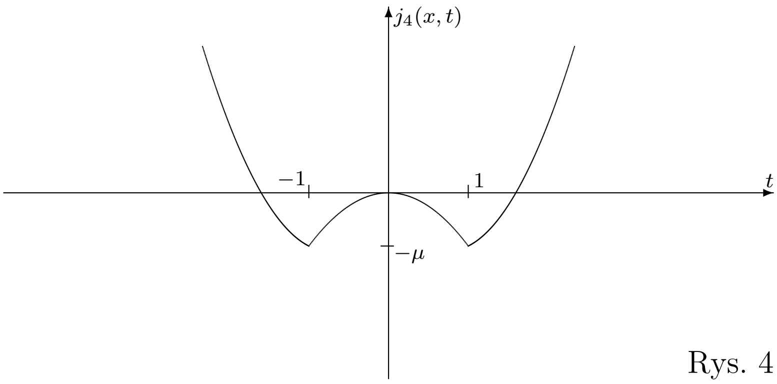
$$j_4(x,t) = \begin{cases} -\mu|t|^{p(x)} & \textit{jeśli} \quad |t| \leqslant 1, \\ |t|^{q(x)} - \mu - 1 & \textit{jeśli} \quad |t| > 1, \end{cases}$$

gdzie $\mu > 0$, *zaś funkcje* $p, q : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *są ciągłe i spełniają następujące nierówności*

$$1 < p^- \leqslant p(x) \leqslant p^+ < q^- \leqslant q(x) \leqslant q^+ < \widehat{p}^*.$$

Funkcja j_4 *w sposób oczywisty nie spełnia założeń* $H(j)_2(v)$ *oraz* $H(j)_3(v)$.

Rysunek 4 przedstawia wykres funkcji $j_4(x,\cdot)$ *dla ustalonego* $x \in \Omega$.



Rys. 4

Zakończenie

Główne wyniki pracy są następujące

- W pracy wskazano warunki na superpotencjał $j(x,t)$, przy których zagadnienie brzegowe z operatorem $p(x)$-laplasjanu oraz warunkiem brzegowym typu Dirichleta posiada nietrywialne rozwiązanie dla parametru λ z pewnego przedziału. Ponieważ we wszystkich czterech twierdzeniach egzystencjalnych wykorzystano Twierdzenie 1.16, zatem głównym wynikiem pracy jest podanie różnego typu warunków wystarczających na to, aby funkcjonał energii skojarzony z zagadnieniem (P) posiadał geometrię twierdzenia o przejściu przez przełęcz.

- W Twierdzeniu 3.14 wykazano istnienie rozwiązania dla zagadnienia (P) przy uogólnieniu warunku na zachowanie superpotencjału $j(x,t)$ w nieskończoności, a mianowicie wykorzystano warunek typu Tanga (założenia $H(j)_3$).

- W Twierdzeniu 3.20 wykazano istnienie rozwiązania dla zagadnienia (P) przy założeniu tzw. odwróconego warunku typu Tanga, tzn. w sytuacji odmiennego zachowania się superpotencjału j w nieskończoności od tej rozważanej w Twierdzeniu 3.14 (porównaj warunki $H(j)_3$ oraz $H(j)_4$ oraz Uwagę 3.17). W Twierdzeniu 3.20 wyeliminowano z założeń warunek mówiący o zachowaniu się potencjału w punkcie pośrednim (zobacz $H(j)_1(v)$, $H(j)_2(vi)$ i $H(j)_3(vi)$).

Warto podkreślić znaczenie wyniku uzyskanego w Twierdzeniu 3.20. Można się obecnie spodziewać, iż dalsze badania przyczynią się do wykazania istnienia rozwiązania dla inkluzji różniczkowej z $p(x)$-laplasjanem przy dowolnym parametrze λ tzn. dla $\lambda \in \mathbb{R}$ (zobacz Lemat 3.18). Spotykane w literaturze warunki typu Landesmana-Lazera, Ambrosettiego-Rabinowitza oraz typu Tanga zazwyczaj nie są warunkami koniecznymi dla istnienia rozwiązania, w związku z tym nadal jest wiele do zrobienia w zakresie szukania jak najszerszej klasy nieliniowości, dla których zagadnienie (P) posiada rozwiązanie przy założeniu dowolności λ. Wiąże się to z poszerzeniem i głębszym zrozumieniem dotychczasowej wiedzy dotyczącej inkluzji różniczkowych z $p(x)$-laplasjanem, jak i również stanowi próbę pewnego usystematyzowania wiedzy w tym zakresie, jak i poszerzenia klasy rozważanych funkcji.

W dalszej kolejności, można również zadać pytanie o istnienie dwóch, czy też większej liczby rozwiązań przy wprowadzonych założeniach na λ oraz o charakteryzację tych rozwiązań. Odpowiedzi na tego rodzaju pytania są szeroko opisane w przypadku zagadnień z p-laplasjanem, zarówno dla nierówności hemiwariacyjnych jak i dla zagadnień wariacyjnych. Tamte podejścia są swego rodzaju inspiracją do badania zagadnień postaci (P). Nasuwa się tutaj również pytanie dotyczące różnic jak i podobieństw pomiędzy zagadnieniami z $p(x)$-laplasjanem i p-laplasjanem. Wiemy już, że ze względu na rozbieżność w własnościach standardowych przestrzeni Lebesgue'a i Sobolewa oraz ich uogólnień, możemy się spodziewać pewnych trudności.

Literatura

[1] E. Acerbi, G. Mingione, *Regularity results for stationary electrorheological fluids*, Arch. Ration. Mech. Anal., 164 (2002), 213-259.

[2] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[3] S. Barnaś, *Existence result for hemivariational inequality involving $p(x)$-Laplacian*, Opuscula Mathematica, 32 (2012), 439-454.

[4] S. Barnaś, *Existence result for differential inclusion with $p(x)$-Laplacian*, Schedae Informaticae, 21 (2012), 41-55.

[5] S. Barnaś, *Existence of a nontrival solution for Dirichlet problem with $p(x)$-Laplacian*, przyjęta do druku w Discussiones Mathematicae Differential Inclusions, Control and Optimization (2014).

[6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.

[7] K. C. Chang, *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 80 (1981), 102-129.

[8] K. C. Chang, *Critical Point Theory and Applications*, Shanghai Scientific and Technology Press, Shanghai, 1996.

[9] Y. Chen, S. Levine, M. Rao, *Variable exponent linear growth functionals in image restoration*, SIAM J. Appl. Math., 66 (4) (2006), 1383-1406.

[10] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York, 1993.

[11] G. Dai, *Infinitely many solutions for a Neumann-type differential inclusion problem involving the $p(x)$-Laplacian*, Nonlinear Anal., 70 (2009), 2297-2305.

[12] G. Dai, *Three solutions for a Neumann-type differential inclusion problem involving the $p(x)$-Laplacian*, Nonlinear Anal., 70 (2009), 3755-3760.

[13] G. Dai, *Infinitely many solutions for a hemivariational inequality involving the $p(x)$-Laplacian*, Nonlinear Anal., 71 (2009), 186-195.

[14] G. Dai, *Infinitely many solutions for a differential inclusion problem in $\mathbb{R}^N$ involving the $p(x)$-Laplacian*, Nonlinear Anal., 71 (2009), 1116-1123.

[15] Z. Denkowski, S. Migórski, N. S. Papageorgiou, *An Introduction to Nonlinear Analysis. Volume II: Theory*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003.

[16] L. Diening, P. Hästö, P. Harjulehto, M. Ružička, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[17] X. Fan, *Solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems with singular coefficients*, J. Math. Anal. Appl., 312 (2005), 464-477.

[18] X. Fan, *Eigenvalues of the $p(x)$-Laplacian Neumann problems*, Nonlinear Anal., 67 (2007), 2982-2992.

[19] X. L. Fan, Q. H. Zhang, *Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem*, Nonlinear Anal., 52 (2003), 1843-1853.

[20] X. Fan, Q. Zhang, D. Zhao, *Eigenvalues of $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem*, J. Math. Anal. Appl., 302 (2005), 306-317.

[21] X. L. Fan, D. Zhao, *On the generalized Orlicz-Sobolev space $W^{k,p(x)}(\Omega)$*, J. Gansu Educ. College, 12 (1) (1998), 1-6.

[22] X. Fan, D. Zhao, *On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$*, J. Math. Anal. Appl., 263 (2001), 424-446.

[23] X. Fan, D. Zhao, Y. Zhao, *Compact imbedding theorems with symmetry of Strauss-Lions type for the space $W^{1,p(x)}(\Omega)$*, J. Math. Anal. Appl., 255 (2001), 333-348.

[24] L. Gasiński, N. S. Papageorgiou, *Nonlinear hemivariational inequalities at resonance*, Bull. Austr. Math. Soc., 60:3 (1999), 353-364.

[25] L. Gasiński, N. S. Papageorgiou, *Solutions and multiple solutions for quasilinear hemivariational inequalities at resonance*, Proc. Roy. Soc. Edinb., 131A:5 (2001), 1091-1111.

[26] L. Gasiński, N. S. Papageorgiou, *An existance theorem for nonlinear hemivariational inequalities at resonance*, Bull. Austr. Math. Soc., 63:1 (2001), 1-14.

[27] L. Gasiński, N. S. Papageorgiou, *Nonsmooth Critical Point Theory and Nonlinear Boundary Value Problems, Volume 8*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2005.

[28] L. Gasiński, N. S. Papageorgiou, *Nonlinear Analysis*, Chapman and Hall/ CRC Press, Boca Raton, FL, 2006.

[29] B. Ge, X. Xue, *Multiple solutions for inequality Dirichlet problems by the $p(x)$-Laplacian*, Nonlinear Anal. Real World Appl., 11 (2010), 3198-3210.

[30] B. Ge, X. Xue, Q. Zhou, *The existence of radial solutions for differential inclusion problems in $\mathbb{R}^N$ involving the $p(x)$-Laplacian*, Nonlinear Anal., 73 (2010), 622-633.

[31] B. Ge, Q. M. Zhou, *Eigenvalue problems for a hemivariational inequality driven by the p-Laplacian*, Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 55 (2012), 207–218.

[32] N. Halidias, *On Neumann hemivariational inequalities*, Abst. Appl. Anal., 7:2 (2002), 103-112.

[33] N. Halidias, *A nontrivial solution of mountain-pass type for a hemivariational inequality*, Bull. Sci. math., 127 (2003), 549-556.

[34] A. Iannizzotto, N. S. Papageorgiou, *Existence of three nontrivial solutions for nonlinear Neumann hemivariationl inequalities*, Nonlinear Anal., 70 (2009), 3285-3297.

[35] E.M. Landesman, A.C. Lazer, *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance*, J. Math. Mech., 19 (1970), 609-623.

[36] M. Mihăilescu, V. Rădulescu, *A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem araising in the thory of electrorheological fluids* Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, 462 (2006), 2625-2641.

[37] J. Musielak, *Orlicz spaces and modular spaces*, Lecture Notes in Math. Volume 1034, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[38] W. Orlicz, *Linear Functional Analysis*, Series in Real Analysis Volume 4, World Scientific Pub Co Inc, 1992.

[39] N.S. Papageorgiou, E.M. Rocha, V. Staicu, *A multiplicity theorem for hemivariational inequalities with a p-Laplacian-like differential operator*, Nonlinear Anal., 69 (2008), 1150–1163.

[40] Ch. Qian, Z. Shen, *Existence and multiplicity of solutions for $p(x)$-Laplacian equation with nonsmooth potential*, Nonlinear Anal. Real World Appl., 11 (2010), 106-116.

[41] Ch. Qian, Z. Shen, M. Yang, *Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian nonhomogeneous Neumann problems with indefinite weight*, Nonlinear Anal. Real World Appl., 11 (2010), 446-458.

[42] M. Ružička, *Electrorheological Fluids: Modelling and Mathematical Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[43] C.-L. Tang, *Solvability for Two-Point Boundary Value Problems*, J. Math. Anal. Appl., 216 (1997), 368–374.

[44] C.-L. Tang, *Solvability of the Forced Duffing Equation at Resonance*, J. Math. Anal. Appl., 219 (1998), 110–124.

[45] V. Zikov, *Averaging of functionals in the calculus of variations and elasticity*, Math. USSR Izv., 29 (1987), 33-66.