Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego

Anna Gierzkiewicz–Pieniążek

Homologiczne własności bloków i segmentów izolujących

Rozprawa doktorska pod kierunkiem
dr. hab. Klaudiusza Wójcika

Kraków, 2010

Spis treści

Spis oznaczeń 2

Wstęp 3

Rozdział 1. Podstawowe definicje i oznaczenia 7
1. Potoki lokalne 7
2. Bloki izolujące 9

Rozdział 2. Znane własności bloków izolujących 14

Rozdział 3. Istnienie bloków o typie kohomologii zbioru niezmienniczego 20
1. Lematy kohomologiczne 20
2. Kostabilność 22

Rozdział 4. Bloki izolujące dla potoków na rozmaitościach trójwymiarowych 25

Rozdział 5. Dynamika symboliczna, punkty okresowe, ciągi Lefschetza i ich ciągi dualne 30
1. Notacja 30
2. Własności ciągu liczb Lefschetza i jego ciągu dualnego 30
3. Metody topologiczne wykrywania dynamiki symbolicznej 32
4. Dynamika symboliczna, punkty okresowe 33

Rozdział 6. Zastosowania w dynamice 39
1. Dynamika odwzorowań Poincarégo równań różniczkowych okresowych w czasie 39
2. Dwupunktowe problemy brzegowe 47
3. Dyskretny indeks Conleya i dynamika chaotyczna 52
4. Metoda przekrojów pośrednich 53

Bibliografia 58

Spis oznaczeń

$a^{\pm}$	zbiór asymptotycznego wejścia/wyjścia	12
$\mathrm{cat}\,_A B$	kategoria Lusternika–Schnirelmanna zbioru B w zbiorze A	
c_k^n	n–okresowy ciąg o k jedynkach w okresie	30
$CH(S)$	indeks Conleya S	20
$\mathbb{D}^n$	kula domknięta wymiaru n	16
ENR	euklidesowy retrakt otoczeniowy	14
$F(c_k^n)$	zbiór punktów n–okresowych w przeciwobrazie c_k^n	33
g	semisprzężenie P z σ	32
H^* lub H	funktor kohomologii Alexandera–Spaniera	
$\mathrm{ind}\,(f, F)$	indeks punktu stałego zbioru F względem odwzorowania f	
$\mathrm{int}\,B$, $\mathrm{int}\,_A B$	wnętrze zbioru B, wnętrze B w zbiorze A	
$\mathrm{inv}\,(W)$	część niezmiennicza W	8
$\mathrm{inv}\,^{\pm}(W)$	część niezmiennicza dodatnia/ujemna W	8
$L(h)$	liczba Lefschetza odwzorowania h	31
$\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*$	ciąg liczb Lefschetza $\{L_k\}_{k\geqslant 0}$ i jego dualny	31
m, m_W	odwzorowanie monodromii segmentu W	40
μ, μ_W	izomorfizm indukowany w $H(W_0, W_0^{--})$ przez odwzorowanie monodromii	40
$\nu(\mathcal{L})$	zbiór indeksów niezerowych wyrazów $\mathcal{L}^*$	34
P	odwzorowanie Poincarégo	39
$\mathbb{P}$, $\mathbb{P}^n$	zbiór punktów okresowych, n–okresowych	30
$\mathbb{P}_n$	zbiór punktów o okresie minimalnym n	30
$\sigma^{\pm}(W)$	czas pierwszego wyjścia/wejścia do W	9
Σ_2	$\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ z topologią produktową	30
σ	odwzorowanie przesunięcia w lewo (lewy shift)	30
$\Sigma_2(n,k)$	zbiór wszystkich $c_k^n \in \Sigma_2$	30
W^+, W^-	zbiór wejścia/wyjścia W	9
W^{++}, W^{--}	zbiór istotnego wejścia/wyjścia z segmentu W	40
$\chi(E)$	charakterystyka Eulera–Poincarégo E	
χ_N	odwzorowanie indeksowe na N	52

Wstęp

Badanie struktury zwartego zbioru niezmienniczego dla ciągłego potoku na rozmaitości jest jednym z głównych problemów teorii układów dynamicznych, obejmującym wykrywanie orbit stacjonarnych, okresowych bądź atraktorów. Jak wiadomo, geometrycznie takie zbiory mogą być bardzo skomplikowane, trudne do modelowania komputerowego, a zachowanie potoku w pobliżu może charakteryzować się chaotycznością. Teoria indeksu Conleya zajmuje się badaniem izolowanych zbiorów niezmienniczych.

Istotną rolę w tej teorii gra pojęcie bloku izolującego zbiór niezmienniczy. Idea bloku izolującego jest bardzo naturalna — potencjalnie skomplikowany zbiór niezmienniczy S jest zawarty we wnętrzu zbioru zwartego B, przy czym wymagamy specjalnego zachowania się potoku na brzegu B. Wyróżniamy w ∂B dwa podzbiory: zbiór wejścia B^+, przez który potok „wchodzi" do wnętrza B, oraz analogiczny zbiór wyjścia B^-, a następnie badamy ich wzajemne położenie, najczęściej używając teorii homotopii lub homologii i kohomologii. Homologiczne własności bloku izolującego pozwalają często uzyskać rezultaty dotyczące struktury zbioru niezmienniczego izolowanego przez blok B. W szczególności, z twierdzenia retraktowego Ważewskiego [**C1, Ch**] wynika, że S jest niepusty, gdy homologie $H(B, B^-)$ są nietrywialne.

Istnienie takiego bloku B dla S jest zagwarantowane fundamentalnym twierdzeniem teorii indeksu Conleya [**CE, WY, Ch**], natomiast pytaniem przewodnim pierwszej części tej rozprawy jest zagadnienie istnienia bloku B o tym samym typie kohomologii co S. Inspiracją dla tej części pracy są artykuły Conleya, Churchilla i Eastona [**C1, Ch, E**], w których zadaje się podobne pytania o kształt bloku oraz zbiorów wejścia i wyjścia na jego brzegu. Okazuje się bowiem, że te informacje mogą implikować lub wykluczać pewne własności samego zbioru niezmienniczego. Prostym przykładem jest torus $\mathbb{T}^2$ izolujący pewien zbiór niezmienniczy S homeomorficzny z okręgiem dla potoku gładkiego na rozmaitości trójwymiarowej. Jeśli S jest orbitą okresową, to zbiory wejścia B^+ i wyjścia B^- muszą układać się w charakterystyczne pasy wzdłuż torusa. W szczególności, jeśli B^+ lub B^- są ściągalne, to S nie może być orbitą okresową.

W rozdziałach 3 i 4 poniższej rozprawy, po wprowadzeniu podstawowych definicji i szerszym omówieniu znanych własności bloków

izolujących, przedstawione są częściowe odpowiedzi na pytanie o istnienie bloku kohomologicznego ze zbiorem niezmienniczym. Wyniki tej części pracy zostały opublikowane w [**WG**]. Pierwszy z nich rozstrzyga pozytywnie istnienie takiego bloku przy dodatkowym, lecz niezbyt restrykcyjnym założeniu kostabilności asymptotycznego zbioru wyjścia a^-. Co więcej, wewnątrz dowolnego bloku, którego istnienie jest zagwarantowane przez twierdzenie Conleya–Eastona, można znaleźć mniejszy o pożądanych własnościach homologicznych. Z punktu widzenia zastosowań pewnym mankamentem jest fakt, że warunek kostabilności a^- jest trudny do sprawdzenia, bo struktura zbioru a^- w praktyce jest nieznana.

Drugi wynik jest motywowany pracą R. Eastona [**E**], w której autor wykazał istnienie bloku B o typie kohomologii S bez dodatkowych założeń, ale przy ograniczonym wymiarze. W głównym twierdzeniu tego artykułu, rozstrzygającym problem pozytywnie dla potoków na rozmaitościach trójwymiarowych, były istotne luki, które zostały uzupełnione w rozprawie przy założeniu, że kohomologie S są skończenie generowane. Dodatkowo okazuje się, że blok B można wybrać tak, aby był trójwymiarową rozmaitością z brzegiem, wykorzystując twierdzenia R. Srzednickiego [**S**] oraz L. Ruchały [**Ru**]. Rezultaty te dają pewną odpowiedź na następujące pytanie: Czy jeżeli $S = \{0\}$ jest zbiorem niezmienniczym izolowanym dla potoku na $\mathbb{R}^n$, to istnieje blok izolujący B dla S homeomorficzny z kulą zwartą $\mathbb{D}^n$? Okazuje się, że jest tak w wymiarach $n = 1, 2$, w wymiarach $n \geqslant 4$ jest to nieprawda, a w wymiarze 3 da się wybrać blok B będący rozmaitością z brzegiem o typie homologii punktu. Zauważmy, że analogiczne pytanie można postawić na gruncie teorii dyskretnego indeksu Conleya (przy odpowiedniej modyfikacji definicji bloku izolującego) w kontekście homeomorfizmu na $\mathbb{R}^n$ z $\{0\}$ jako zbiorem niezmienniczym izolowanym. W pracy [**RS**] udowodniono, że na płaszczyźnie da się wtedy wybrać blok izolujący homeomorficzny z $\mathbb{D}^2$.

Następnie rozważane są konsekwencje istnienia bloku izolującego takiego, że $B^\pm$ są ściągalne w brzegu B. Wydaje się, że położenie zbiorów wyjścia i wejścia w brzegu bloku B powinno nieść informacje o samym zbiorze niezmienniczym S. W szczególności, wydaje się, że powinien być związek pomiędzy strukturą zbioru S, a kategorią Lusternika–Schnirelmanna zbiorów $B^\pm$ w brzegu bloku B. Jak dotąd badania w tym kierunku nie przyniosły oczekiwanych rezultatów.

Rozdział 5 rozpoczyna drugą część pracy, w której omówione są szczególne bloki izolujące, tak zwane segmenty izolujące. Pojęcie to zostało wprowadzone i rozwinięte przez Srzednickiego [**S2, S3**], i stanowi potężne narzędzie do badań równań różniczkowych zwyczajnych, zwłaszcza okresowych względem czasu. Szczególnie często używanymi w tym opracowaniu obiektami tej teorii są ciąg liczb Lefschetza $\{L_k\}$ odwzorowania monodromii oraz jego ciąg dualny.

Początkowe rozważania są poświęcone wyłącznie ciągowi liczb Lefschetza, w oderwaniu od układów dynamicznych. Jest on zdefiniowany dla dowolnego endomorfizmu ciągu przestrzeni wektorowych z gradacją, omówione są jego własności z naciskiem na spełnianie relacji Dolda i konsekwencje arytmetyczne tego faktu dla ciągów okresowych. Następnie zakłada się, że zachodzi pewien związek ciągu dualnego $\{L_k^*\}$ z dynamiką homeomorfizmu $P : I \to I$ zbioru zwartego. Związek ten jest zapowiedzią twierdzenia przedstawionego w następnym rozdziale, pochodzącego z [**W**], w którym homeomorfizm P jest odwzorowaniem Poincarégo dla potoku generowanego przez równanie różniczkowe zwyczajne okresowe w czasie, a $\{L_k^*\}$ — odpowiednim dualnym ciągiem Lefschetza odwzorowania monodromii segmentu izolującego stowarzyszonego z tym równaniem. Mając ten związek, można elementarnie udowodnić na przykład ciekawe oszacowania na liczbę punktów okresowych P, korzystając z klasycznych twierdzeń dotyczących liczb pierwszych, jak twierdzenia Dirichleta i Czebyszewa.

Obserwacje te mają pewne konsekwencje w dynamice równań różniczkowych okresowych w czasie. Ostatnia część rozprawy (rozdział 6) zawiera zastosowanie twierdzeń o okresowych ciągach Lefschetza do czterech metod badania układów dynamicznych z czasem ciągłym i dyskretnym.

Pierwszym z nich jest kryterium chaotyczności oraz istnienia punktów okresowych dla odwzorowania Poincarégo P równania różniczkowego zwyczajnego okresowego w czasie. Chaos rozumiemy tu w sensie istnienia semisprzężenia g odwzorowania Poincarégo P zacieśnionego do zbioru niezmienniczego z odwzorowaniem przesunięcia na ciągach dwóch symboli $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ oraz istnienia nieskończenie wielu punktów okresowych dla P. Omówiono tu własności ciągu liczb Lefschetza segmentu izolującego i ich związek z dynamiką odwzorowania Poincarégo. Przedstawione są też przykłady szacowania dolnego liczby punktów okresowych P, jak również dowód jej nieskończoności w pewnych przypadkach, co może mieć znaczenie w badaniach chaosu dystrybucyjnego.

Kolejnym przykładem rozwinięcia teorii (część 2) jest jej zastosowanie w dwupunktowych problemach brzegowych. Przedstawiony w tej części wniosek pozwala na szacowanie od dołu liczby geometrycznie różnych rozwiązań problemów brzegowych.

Osobnym zagadnieniem jest możliwość wykorzystania wyników dotyczących ciągu liczb Lefschetza do wykrywania dynamiki chaotycznej w dyskretnych układach dynamicznych, przy wykorzystaniu odpowiednio zmodyfikowanej definicji bloku izolującego (część 3). I wreszcie na końcu rozprawy, w części 4, zawarte jest rozszerzenie poprzedniego zastosowania na metodę częściowych przekrojów Poincarégo, wprowadzoną przez M. Mrozka [**M**] na potrzeby badania zachowania chaotycznego pewnej klasy równań o szybkiej ekspansji. Udowodnione jest tam

twierdzenie o związku indeksów punktów stałych odpowiednich punktów okresowych odwzorowania Poincarégo P z dualnymi liczbami Lefschetza dla odwzorowania indeksowego.

Niewątpliwie przedstawione w rozprawie wyniki nie wyczerpują ani tematu bloków izolujących kohomologicznych z częścią niezmienniczą, ani zastosowania ciągów Lefschetza dla segmentów izolujących w dynamice. Mam jednak nadzieję, że praca istotnie zgłębia ten bogaty temat i może zainteresować nim czytelnika jako przykład obrazujący szeroki udział metod topologicznych w badaniu układów dynamicznych.

Na koniec chciałabym gorąco podziękować mojemu promotorowi, profesorowi Klaudiuszowi Wójcikowi, który poświęcił mi mnóstwo czasu, zapewnił znakomitą opiekę naukową i okazał wiele życzliwości.

ROZDZIAŁ 1

Podstawowe definicje i oznaczenia

Pierwszy rozdział poświęcę przypomnieniu i wprowadzeniu najważniejszych pojęć z zakresu teorii ciągłych układów dynamicznych, które są niezbędne do zdefiniowania bloku izolującego oraz bloku izolującego Churchilla.

1. Potoki lokalne

Definicja 1.1. Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią metryczną, a $D \subset \mathbb{R} \times X$ — zbiorem otwartym takim, że dla każdego $x \in X$ zbiór $I_x := \{t : (t, x) \in D\}$ jest przedziałem otwartym (α_x, ω_x), gdzie

$$-\infty \leqslant \alpha_x < 0 < \omega_x \leqslant \infty.$$

Potokiem lokalnym na X nazywamy funkcję ciągłą $\varphi : D \to X$, dla której

$$t \in (\alpha_x, \omega_x) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{\varphi(t,x)} = \alpha_x - t$$

i zachodzą równości:

$$\varphi(0, x) = x,$$
$$\varphi(s + t, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)).$$

Jeżeli $D = \mathbb{R} \times X$, to potok lokalny $\varphi : \mathbb{R} \times X \to X$ nazywamy *potokiem (globalnym)*.

Przykład 1.1 (Potok generowany przez pole wektorowe). Niech M będzie gładką rozmaitością, a $v : M \to TM$ gładkim polem wektorowym na niej. Dla $x_0 \in M$ istnieje dokładnie jedno $u_{x_0} : I_{x_0} \to M$ wysycone rozwiązanie problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} x' = v(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}.$$

Definiujemy $D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M : t \in I_x\}$ i funkcję $\varphi : D \ni (t, x) \to u_x(t) \in M$. Wtedy φ jest lokalnym układem dynamicznym na M. Mówimy, że jest ono *generowane przez pole* v. Dowodzi się, że jeżeli rozmaitość M jest zwarta, to φ jest potokiem globalnym.

W dalszych rozważaniach posługujemy się następującą notacją:

- dla $x \in X$ i $t \in I_x$ oznaczamy $\varphi_t(x) := \varphi(t, x)$;
- dla $W \subset X$ i $J \subset \mathbb{R}$ takiego, że $J \times W \subset D$ oznaczamy $\varphi(J, W) := \varphi(J \times W)$.

Definicja 1.2. Dla punktu $x \in X$ wyróżniamy zbiory

$$\varphi(x) := \varphi(I_x, x), \qquad \varphi^+(x) := \varphi([0, \omega_x), x), \qquad \varphi^-(x) := \varphi((\alpha_x, 0], x)$$

i nazywamy je, odpowiednio, *orbitą*, *dodatnią półorbitą* i *ujemną półorbitą* punktu x.

Dodatkowo definiujemy dla $x \in W \subset X$ zbiór $\varphi(x, W)$ jako tę składową spójną zbioru $\varphi(x) \cap W$, która zawiera x. Analogicznie dla zbioru $D \subset W$:

$$\varphi(D, W) := \bigcup_{x \in D} \varphi(x, W).$$

Niech $x \in X$. Odwzorowanie $\sigma : I_x \to X$ nazywamy *rozwiązaniem przechodzącym przez* x, jeżeli

$$\sigma(0) = x, \quad \varphi_t(\sigma(\tau)) = \sigma(t + \tau).$$

Mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest *niezmienniczy* dla potoku lokalnego φ, jeżeli dla każdego $x \in A$ istnieje rozwiązanie σ przechodzące przez x takie, że $\sigma(I_x) \subset A$.

Punkt x nazywamy *punktem stacjonarnym*, jeżeli $\varphi(x) = \{x\}$. Oczywiście wtedy $A = \{x\}$ jest zbiorem niezmienniczym. Podobna własność zachodzi dla *punktów okresowych*, czyli takich x, dla których $\varphi_T(x) = x$ dla pewnego $T > 0$. Orbita $A = \varphi(x)$ takiego punktu również jest zbiorem niezmienniczym.

Definicja 1.3. Zbiory

$$\alpha(x) := \bigcap_{t \in (\alpha_x, 0]} \overline{\varphi((\alpha_x, t], x)} \qquad \text{oraz} \qquad \omega(x) := \bigcap_{t \in [0, \omega_x)} \overline{\varphi([t, \omega_x), x)}$$

nazywamy odpowiednio *zbiorem α–granicznym* i *ω–granicznym* punktu x.

Łatwo sprawdzić, że jeżeli $\omega(x) \neq \varnothing$ (odpowiednio: $\alpha(x) \neq \varnothing$), to $\omega_x = \infty$ (odpowiednio: $\alpha_x = -\infty$) oraz $\omega(x)$ (odpowiednio: $\alpha(x)$) jest niezmienniczy.

Definicja 1.4. Dla zbioru $W \subset X$ definiujemy jego

- *część niezmienniczą dodatnią*
$$\operatorname{inv}^+(W) = \{x \in W \ : \ \varphi^+(x) \subset W\},$$
- *część niezmienniczą ujemną*
$$\operatorname{inv}^-(W) = \{x \in W \ : \ \varphi^-(x) \subset W\}$$
- oraz *część niezmienniczą*
$$\operatorname{inv}(W) = \operatorname{inv}^-(W) \cap \operatorname{inv}^+(W).$$

Zauważmy, że jeżeli φ jest potokiem globalnym, to zbiór W jest niezmienniczy, jeśli $\operatorname{inv}(W) = W$.

2. Bloki izolujące

W tej części wprowadzimy pojęcia prowadzące do zdefiniowania bloku izolującego. Niech (X, φ) będzie przestrzenią o własnościach jak wyżej, na której zadany jest potok lokalny.

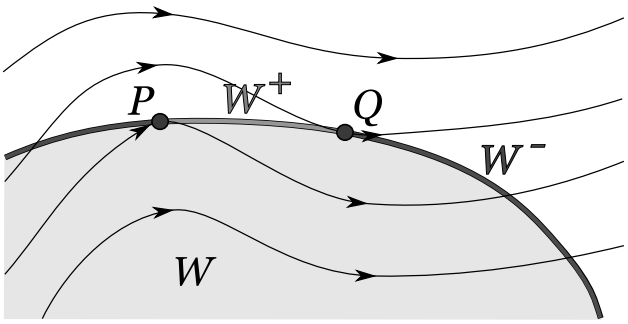
Definicja 1.5. Niech $W \subset X$. Definiujemy jego dwa podzbiory:

- *zbiór wejścia*
  $W^+ := \{x \in W \ : \ \forall\, t < 0 \ \ \exists\, s \in [-t, 0] \ : \ \varphi(x, s) \notin W\}$
- i *zbiór wyjścia*
  $W^- := \{x \in W \ : \ \forall\, t > 0 \ \ \exists\, s \in [0, t] \ : \ \varphi(x, s) \notin W\}$.

Łatwo sprawdzić, że $W^\pm$ są podzbiorami brzegu W. Przecięcie zbiorów $(W^+ \cap W^-)$ zawiera się w przecięciu ich brzegów:

$$(W^+ \cap W^-) \subset (\partial W^+ \cap \partial W^-),$$

leżą tam np. punkty zewnętrznego odbicia potoku od brzegu W. Punkty, w których potok odbija się wewnętrznie, nie należą ani do W^+, ani do W^- (rys. 1).



Rysunek 1. Wewnętrzne (P) i zewnętrzne (Q) odbicie potoku od brzegu zbioru W. Punkt Q leży w części wspólnej W^+ i W^-, natomiast punkt P nie należy ani do W^+, ani do W^-.

Ponadto w ∂W mogą istnieć inne punkty nie należące ani do W^+, ani do W^- — są to np. punkty wewnętrzne fragmentów orbit, leżących w brzegu W (p. rys. 2).

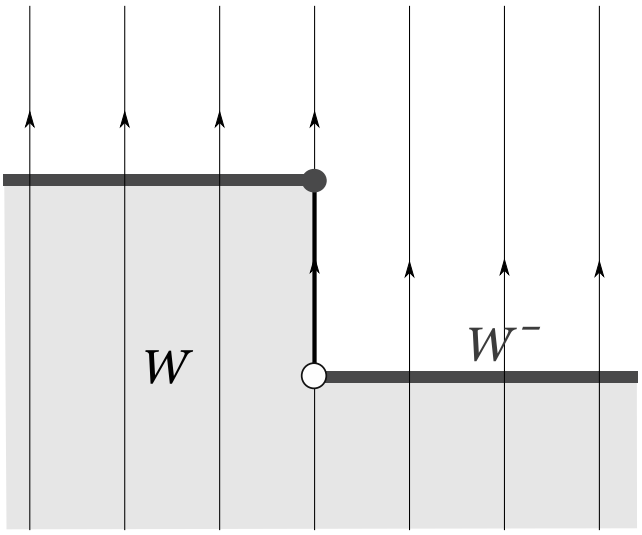
Definicja 1.6. Dla każdego punktu $x \in W \subset X$ definiujemy funkcje

$$\sigma^\pm : W \to [0, \infty]$$

przez

$$\sigma^+(x) := \sup\{t \geqslant 0 : \varphi([0, t], x) \subset W\},$$
$$\sigma^-(x) := \sup\{t \geqslant 0 : \varphi([-t, 0], x) \subset W\}.$$

Odwzorowanie σ^+ nazywamy *czasem (pierwszego) wyjścia* z W, natomiast σ^- — *czasem wejścia* do W.



RYSUNEK 2. Brzeg zbioru W, zawierający fragment orbity. Zbiór W^- nie jest domknięty, a zatem W nie jest blokiem izolującym.

Z dowodu twierdzenia Ważewskiego o retrakcie wynika, że jeśli W i W^- są zwarte, to funkcje $\sigma^\pm$ są ciągłe ([**C**], [**Mont**], [**S2**]).

DEFINICJA 1.7. Zbiór $B \subset X$ nazywamy *blokiem izolującym*, jeżeli:

- $B = \overline{\operatorname{int} B}$,
- zbiory B, $B^\pm$ są zwarte,
- dla każdego $x \in \partial B \setminus (B^- \cup B^+)$

$$\sigma^-(x) < \infty, \qquad \sigma^+(x) < \infty,$$
$$\text{oraz} \quad \varphi([-\sigma^-(x), \sigma^+(x)], x) \subset \partial B.$$

Jest to klasyczna definicja bloku izolującego. W tej pracy będziemy się posługiwać również pojęciem węższym, blokiem izolującym Churchilla.

DEFINICJA 1.8. Niech S będzie zbiorem zwartym.

S nazywamy zbiorem *niezmienniczym izolowanym*, jeśli istnieje otoczenie N dla S takie, że

$$S = \operatorname{inv}(N).$$

Takie N nazywamy *otoczeniem izolującym* S. Mówimy też, że N izoluje S.

W dalszym ciągu będziemy używać specjalnych bloków izolujących nazywanych *blokami izolującymi Churchilla*, które teraz zdefiniujemy.

Niech $\Sigma \subset X$ oraz $\delta > 0$. Definiujemy odwzorowanie

$$\varphi_\delta : (-\delta, \delta) \times \Sigma \ni (t, x) \to \varphi(t, x) \in X.$$

Jeżeli dla pewnych Σ, δ zdefiniowane powyżej odwzorowanie φ_δ jest homeomorfizmem na obraz, to zbiór $\varphi((-\delta, \delta), \Sigma)$ nazywamy *kołnierzem* Σ. Wówczas Σ jest retraktem deformacyjnym mocnym swojego kołnierza $\varphi((-\delta, \delta), \Sigma)$. Jeśli dodatkowo obraz φ_δ jest otwarty, to Σ nazywamy *lokalną sekcją* dla φ.

Niech $B \subset X$ będzie zbiorem zwartym, a $\Sigma^\pm$ będą lokalnymi sekcjami φ o rozłącznych domknięciach:

$$\Sigma^+ \cap \Sigma^- = \varnothing.$$

Niech $\delta > 0$ będzie takie, by kołnierze

$$\varphi((-\delta, \delta), \Sigma^+) \ , \quad \varphi((-\delta, \delta), \Sigma^-)$$

były rozłączne.

Definicja 1.9. Zwarty zbiór B nazywamy *blokiem izolującym Churchilla*, jeśli istnieją sekcje $\Sigma^\pm$ jak powyżej, spełniające dodatkowo warunki

(b1) $(\overline{\Sigma^\pm} \setminus \Sigma^\pm) \cap B = \varnothing$;
(b2) $\varphi((-\delta, \delta), \Sigma^+) \cap B = \varphi([0, \delta), \Sigma^+ \cap B)$;
(b3) $\varphi((-\delta, \delta), \Sigma^-) \cap B = \varphi((-\delta, 0], \Sigma^- \cap B)$;
(b4) dla każdego $x \in \partial B \setminus (\Sigma^+ \cup \Sigma^-)$ istnieją liczby rzeczywiste $\varepsilon_1 < 0 < \varepsilon_2$, takie że

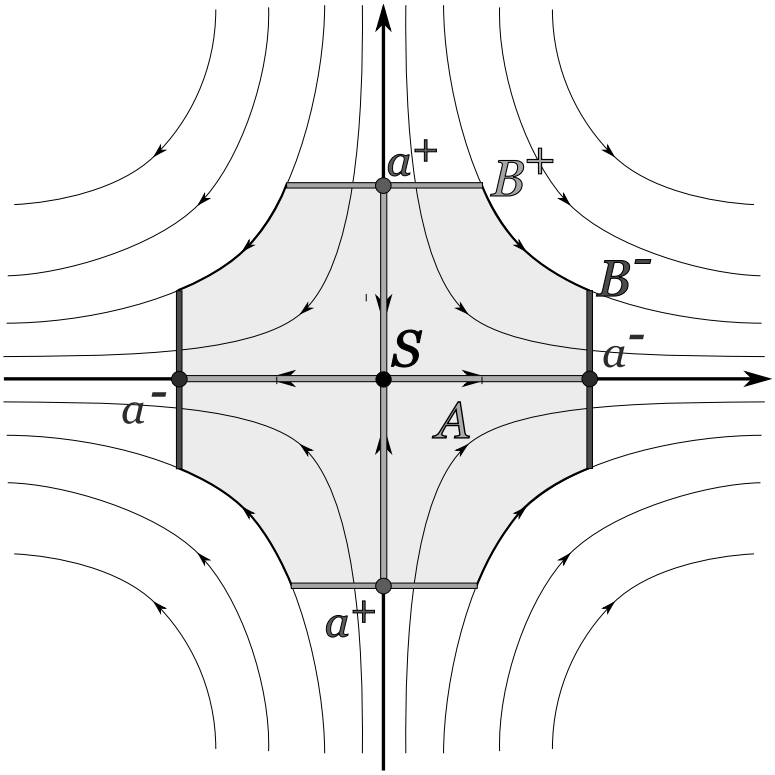
$$\varphi(\varepsilon_1, x) \in \Sigma^+, \qquad \varphi(\varepsilon_2, x) \in \Sigma^-, \qquad \varphi([\varepsilon_1, \varepsilon_2], x) \subset \partial B.$$

Obserwacja 1.1. Dla bloku izolującego Churchilla B następujące fakty są prawdziwe:

- B jest zwartym otoczeniem izolującym swojej części niezmienniczej $\operatorname{inv}(B) = S$;
- $B^- = \Sigma^- \cap B, \quad B^+ = \Sigma^+ \cap B$;
- Zbiory wyjścia i wejścia $B^\pm$ są zbiorami domkniętymi (a więc B jest zbiorem Ważewskiego);
- $B^+ \cap B^- = \varnothing$.

W szczególności, B jest blokiem izolującym.

Brzeg bloku B składa się wyłącznie z $B^+ \cup B^-$ oraz łączących je fragmentów orbit. W szczególności, na brzegu B nie występuje zjawisko wewnętrznego odbicia orbity (p. rys. 1). Wykluczona jest również sytuacja z rys. 2, ponieważ tam zbiór wyjścia nie jest domknięty. Standardowy przykład bloku Churchilla izolującego punkt stacjonarny siodłowy pokazany jest na rys. 3. Dla porównania — na rys. 4 pokazano blok izolujący ten sam zbiór S, który nie jest blokiem Churchilla, ponieważ $B^+ \cap B^- \neq \varnothing$.



Rysunek 3. Blok B izolujący punkt siodłowy. Zaznaczono część asymptotyczną A oraz zbiory asymptotycznego wyjścia i wejścia $a^{\pm}$.

Definicja 1.10. Dla zbioru $W \subset X$ definiujemy *zbiory asymptotycznego wejścia/wyjścia*:

$$a^{\pm} := \operatorname{inv}^{\pm}(W) \cap W^{\pm}.$$

Łatwo sprawdzić, że $a^{\pm} \subset \operatorname{int}_{\partial W}(W^{\pm})$ (zob. **[Ch]**, **[C]**).

Zbiór

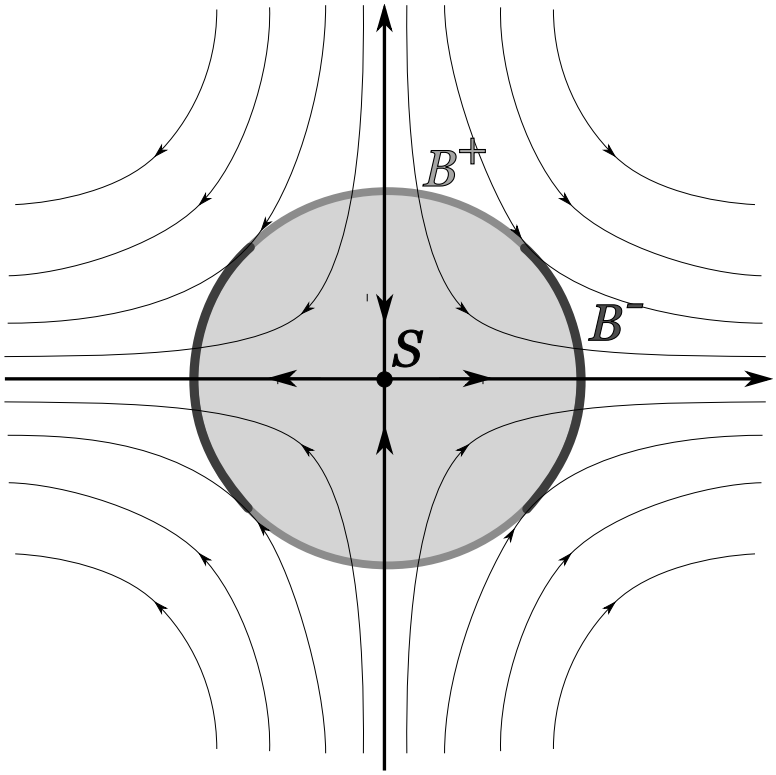
$$A := A(W) := \operatorname{inv}^{-}(W) \cup \operatorname{inv}^{+}(W),$$

nazywamy *częścią asymptotyczną* zbioru W. Zbiory A, $a^{\pm}$ zilustrowane są na rysunku 3.

Następujące lematy pochodzą z pracy Churchilla (propozycja 4.6 i lemat 4.3 z **[Ch]** lub propozycje 7.2, 7.3 z **[S2]**).

Lemat 1.2. *Inkluzja $S \hookrightarrow A$ indukuje izomorfizm w kohomologiach Čecha $H^*(A) \to H^*(S)$.*

Lemat 1.3. *Inkluzja $(A, a^-) \hookrightarrow (B, B^-)$ indukuje izomorfizm $H^*(B, B^-) \to H^*(A, a^-)$.*



Rysunek 4. Blok izolujący, który nie jest blokiem Churchilla.

Dowody powyższych lematów opierają się na ciągłości kohomologii Čecha.

ROZDZIAŁ 2

Znane własności bloków izolujących

Przypomnimy teraz znane fakty dotyczące topologii i kohomologii zbioru niezmienniczego izolowanego S. Niech H^* będzie funktorem kohomologii Alexandera–Spaniera.

Teoria indeksu Conleya opiera się na następującym twierdzeniu:

TWIERDZENIE 2.1. *Zbiór niezmienniczy S jest izolowany wtedy i tylko wtedy gdy istnieje blok izolujący B taki, że $S = \operatorname{inv} B$. Ponadto, zbiór niezmienniczy izolowany S posiada bazę otoczeń złożoną z bloków izolujących dla S.*

Twierdzenie to zostało dowiedzione najpierw w przypadku potoku gładkiego (klasy $\mathcal{C}^\infty$) na gładkiej rozmaitości (zob. [**CE**], [**WY**]). W przypadku gładkim można znaleźć blok izolujący B, będący rozmaitością z narożami, dla którego dodatkowo zbiory B^+ i B^- są gładkimi rozmaitościami z brzegiem. Dowód w przypadku czysto topologicznym (ciągły potok na lokalnie zwartej przestrzeni metrycznej) podany został w [**Ch**].

W topologii algebraicznej przy badaniu własności homologicznych podzbiorów $\mathbb{R}^n$ naturalnie pojawia się pojęcie euklidesowego retraktu otoczeniowego.

DEFINICJA 2.1. Przestrzeń topologiczną X nazywamy *euklidesowym retraktem otoczeniowym (ENR-em)*, jeśli istnieje zbiór $Y \subset \mathbb{R}^n$, homeomorficzny z X, będący retraktem pewnego swojego otwartego otoczenia w $\mathbb{R}^n$.

Pojęcie to obejmuje szeroką klasę przestrzeni, m. in. rozmaitości. Nie każdy podzbiór $\mathbb{R}^n$ jest ENR-em; można pokazać, że musi on być lokalnie domknięty (tj. postaci $C \cap O$, gdzie C jest zbiorem domkniętym, a O — otwartym) oraz lokalnie ściągalny. Te dwie własności są również wystarczające dla podzbioru $\mathbb{R}^n$, aby był ENR-em (zob. [**D**]). Klasycznym przykładem przestrzeni nie spełniającej tych warunków jest okrąg warszawski.

Ważną własnością topologiczną ENR-ów jest fakt, że ich homologie są skończenie generowane. Pomimo to zbiory te mogą mieć wiele nieintuicyjnych cech. Warto tu wspomnieć, że istnieje przykład pochodzący od Borsuka zwartego ENR-u $X \subset \mathbb{R}^3$, którego żaden podzbiór dwuwymiarowy nie jest ENR-em [**Bo**].

Dla potoków na lokalnie zwartych euklidesowych retraktach otoczeniowych naturalne jest pytanie:

Czy dla zbioru niezmienniczego istnieje blok izolujący B będący dodatkowo ENR-em wraz ze swoim zbiorem wyjścia B^-?

W ogólnym przypadku odpowiedź jest negatywna. Wystarczy rozważyć wspomniany wcześniej przykład Borsuka [**Bo**] i odpowiednio dobrać potok na nim. Inny przykład przedstawiony został w [**Ru**]. Dla potoków w $\mathbb{R}^n$ pytanie jest, jak dotąd, nierozstrzygnięte w wymiarze $n \geqslant 4$.

W niższych wymiarach odpowiedzią jest następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 2.2. *Niech φ będzie ciągłym potokiem na przestrzeni topologicznej wymiaru n. Jeśli $n = 2$ lub $n = 3$, to w każdym otoczeniu izolującym zbioru niezmienniczego izolowanego S istnieje blok izolujący B taki, że B jest ENR-em oraz B^- jest $(n-1)$-wymiarową rozmaitością z brzegiem.*

Przypadek $n = 2$ został udowodniony przez Srzednickiego [**S**]. Później rezultat ten został rozszerzony na trójwymiarowe rozmaitości przez Ruchałę [**Ru**]. Ponieważ będziemy istotnie korzystać w dalszym ciągu z tego rezultatu, przedstawiamy poniżej ideę dowodu pochodzącą z pracy [**Ru**].

IDEA DOWODU 1.2 Z [**Ru**]. Niech N będzie otoczeniem izolującym zbioru niezmienniczego izolowanego S dla potoku φ na dwuwymiarowej (odpowiednio: trójwymiarowej) rozmaitości. Z twierdzenia 2.1 istnieje blok $B \subset N$ izolujący S.

Pokażemy najpierw, że $\dim \Sigma^- = 1$ (odpowiednio: 2). Możemy założyć, że Σ^- jest ośrodkową przestrzenią metryczną. Wykorzystamy następujący fakt (zob. [**En**]):

OBSERWACJA 2.3. Jeśli A, B są zwartymi przestrzeniami metrycznymi oraz $\dim A = 1$, to

$$\dim(A \times B) = \dim A + \dim B = 1 + \dim B.$$

Niech $x \in \Sigma^-$. Wybierzmy otoczenie zwarte P punktu X w Σ^- oraz J — otoczenie zwarte 0 w $\mathbb{R}$ takie, aby $J \times P$ było homeomorficzne z $\varphi(J \times P)$. Ponieważ $\varphi(J \times P)$ zawiera otoczenie X homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) i $\dim J = 1$, to

$$\dim P = 1 \qquad (\dim P = 2).$$

Z twierdzenia 3 lub tw. 13 z [**Bo1**] wynika, że Σ^- jest topologicznym dzielnikiem $\mathbb{R}^n$ o wymiarze mniejszym lub równym 2, a zatem musi być 1–wymiarową (2–wymiarową) rozmaitością.

Skoro $B^- \subset \Sigma^-$ jest zwarty, to istnieje skończona liczba spójnych składowych zbioru $\varphi((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^-)$, które pokrywają B^-.

Niech $n = 2$. Z [**F**] znamy fakt, że ośrodkowa, spójna przestrzeń lokalnie homeomorficzna z $\mathbb{R}$ jest globalnie homeomorficzna z $\mathbb{R}$ lub z $\mathbb{S}^1$, a zatem możemy wybrać W — otoczenie B^- w Σ^-, złożone z domkniętych odcinków lub okręgów, dostatecznie małych, aby zachodził warunek:

$(*)$ dla każdego $x \in W \setminus B^-$ istnieje czas $t_x > 0$ o własności

$$\varphi(t_x, x) \in \Sigma^+, \quad \varphi((0, t_x), x) \cap \Sigma^+ = \varnothing.$$

Dla zakończenia dowodu wystarczy wziąć nowy blok

$$C = B \cup \bigcup_{x \in W \setminus B^-} \varphi([0, t_x], x).$$

Wówczas $C^- = W$.

Rozważmy teraz $n = 3$. Zbiór Σ^- można striangularyzować w sposób przedstawiony w [**Ra**]. Biorąc ewentualnie podział barycentryczny triangulacji Σ^-, możemy wybrać pokrycie skończone B^- składające się ze skończonej liczby domkniętych trójkątów. Oznaczmy ich sumę przez W. Wówczas $B^- \subset W$ oraz możemy założyć, że zachodzi warunek $(*)$.

Jeśli punkt $w \in W$ nie leży we wnętrzu żadnego trójkąta, to musi leżeć na pewnej krawędzi. Jeśli tylko w nie jest wierzchołkiem, to ma otoczenie homeomorficzne z płaszczyzną lub półpłaszczyzną. Przypuśćmy więc, że w jest wierzchołkiem pewnego trójkąta. Jeżeli w rozdziela otoczenie w W, to można na każdej krawędzi, której w jest wierzchołkiem, wybrać punkt (inny niż wierzchołek), a następnie usunąć trójkąty o wierzchołkach w tych punktach i w w i w ten sposób otrzymać otoczenie B^- z liczbą takich wierzchołków w mniejszą o 1. Po skończonej liczbie takich kroków możemy usunąć wszystkie wierzchołki, które rozdzielają otoczenie w W. Jeżeli w nie rozdziela otoczenia, to łatwo sprawdzić, że w ma otoczenie homeomorficzne z płaszczyzną lub półpłaszczyzną. Wtedy można wziąć blok C jak w przypadku $n = 2$.

□

W szczególnym przypadku potoku na n–wymiarowej rozmaitości topologicznej M oraz zbioru niezmienniczego S, który jest punktem stacjonarnym, pojawia się inne pytanie:

Czy dla $S = \{p\}$ istnieje blok izolujący homeomorficzny z n–wymiarową kulą domkniętą $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leqslant 1\}$?

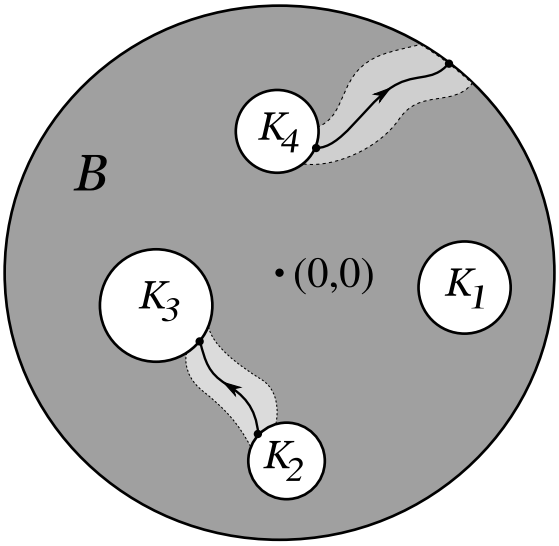
W wymiarze $n = 2$ rozumujemy następująco: sprowadzamy ten przypadek do ciągłego potoku na $\mathbb{R}^2$, dla którego zbiór $S = \{(0, 0)\}$ jest izolowanym zbiorem niezmienniczym. Twierdzimy, że wówczas istnieje dla S blok izolujący homeomorficzny z dyskiem $\mathbb{D}^2$.

Dowód. Z twierdzenia 2.2 istnieje blok B izolujący S, będący rozmaitością topologiczną z brzegiem, dla którego dodatkowo B^- jest podrozmaitością z brzegiem. Bez straty ogólności możemy założyć, że B jest domkniętym kołem $\mathbb{D}^2 = \mathbb{D}(0,1)$ z wyciętą skończoną liczbą n otwartych dysków K_i tak, aby

$$\overline{K_i} \cap \overline{K_j} = \varnothing \quad \text{oraz} \quad S \cap \sum_{i=1}^{n} \overline{K_i} = \varnothing.$$

Ponadto możemy założyć, że liczba n jest najmniejszą możliwą, czyli żaden inny blok izolujący dla S nie ma mniejszej liczby dziur.

Niech $x \in \partial K_i$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, n\}$. Załóżmy, że $\sigma^+(x) < \infty$ oraz $\varphi(\sigma^+(x), x) \in \mathbb{S}^1$. Ale wówczas możemy usunąć z B odcinek orbity $\varphi([0, \sigma^+(x)], x)$ wraz z jego dostatecznie małym otwartym otoczeniem, dostając blok izolujący z mniejszą liczbą dziur (rys. 5).



Rysunek 5. Blok B izolujący zbiór niezmienniczy $S = \{(0,0)\}$, będący dyskiem $\mathbb{D}^2$ z wyciętą skończoną liczbą dziur K_i.

Zatem, jeżeli $\sigma^+(x) < \infty$, to $\varphi(\sigma^+(x), x) \notin \mathbb{S}^1$. Posługując się tym samym argumentem dla potoku z odwróconym czasem, dostaniemy $\varphi(-\sigma^-(x), x) \notin \mathbb{S}^1$. Zatem $\mathbb{D}^2$ jest blokiem izolującym dla swojej części niezmienniczej

$$W := \operatorname{inv} \mathbb{D}^2 = S \cup \sum_{i=1}^{n} \overline{K_i}.$$

Ponieważ $\partial W \subset B$, jest on niezmienniczy jako brzeg zbioru niezmienniczego oraz różny od S, a zatem dostajemy sprzeczność z definicją bloku izolującego. Stąd $n = 0$ i B jest homeomorficzny z $\mathbb{D}^2$. $\square$

W wymiarze 3 podobny problem był rozważany przez Roberta Eastona [**E**]. Główny wynik pracy Eastona (tw. 1 w [**E**]) to twierdzenie gwarantujące istnienie bloku izolującego porządnej postaci: jeśli φ jest gładkim potokiem na $\mathbb{R}^3$, a zbiór niezmienniczy izolowany S jest torusem, krzywą domkniętą lub punktem, to blok taki można wybrać homeomorficzny z $S\times\mathbb{D}^1$, $S\times\mathbb{D}^2$ i $S\times\mathbb{D}^4$, odpowiednio. Niestety, w tym dowodzie pojawiła się poważna luka. Wykorzystując jednak idee przedstawione w [**E**], można podać rozwiązanie problemu istnienia bloku izolującego dla rozmaitości trójwymiarowych. Opiszemy to w dalszym ciągu pracy.

Z drugiej strony, łatwo podać kontrprzykład obrazujący nieprawdziwość tego twierdzenia dla $n = 4$. Zachodzi następujące twierdzenie

TWIERDZENIE 2.4. *Istnieje rozmaitość czterowymiarowa M (homeomorficzna z $\mathbb{R}^4$) i ϕ — potok na M mający dokładnie jeden punkt stacjonarny x_0, będący zbiorem niezmienniczym izolowanym, który nie posiada bloku izolującego B homeomorficznego z kulą $\mathbb{D}^4$.*

DOWÓD. Niech G będzie przykładem Binga (zob. [**B**], tak zwana „dog bone space") przestrzeni, będącej półciągłym z góry rozkładem $\mathbb{R}^3$. Zbiór G nie jest (nawet lokalnie) homeomorficzny z $\mathbb{R}^3$, ale $G \times \mathbb{R}$ jest homeomorficzna z $\mathbb{R}^4$.

Wybierzmy punkt $h_0 = (g_0, 0) \in \mathbb{R}^4 \cong G \times \mathbb{R}$ tak, aby $g_0 \in G$ odpowiadał niezdegenerowanemu elementowi rozkładu G. Niech h_0 będzie punktem stacjonarnym konstruowanego potoku ϕ na $G \times \mathbb{R}$. Orbity punktów niech będą postaci $\{g\} \times \mathbb{R}$, $g \in G$, za wyjątkiem zbioru $\{g_0\} \times \mathbb{R}$, który będzie składał się ze wspomnianego punktu stacjonarnego h_0 i dwóch orbit α i β takich, że

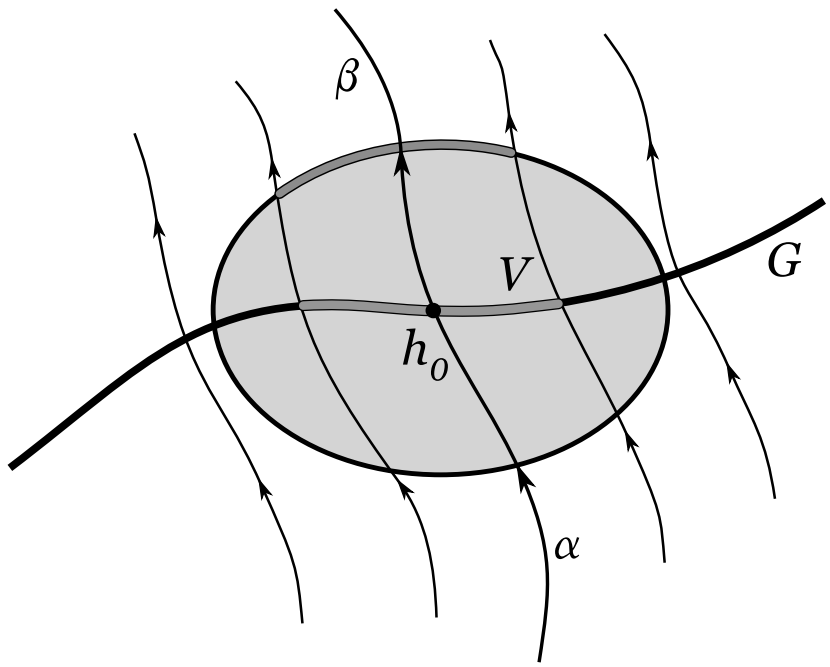
$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = h_0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{t\to-\infty} \beta(t) = h_0.$$

Wówczas $\{h_0\}$ jest zbiorem niezmienniczym izolowanym przez swoje dowolne otwarte otoczenie. Pokażemy, że nie istnieje blok izolujący dla h_0, homeomorficzny z kulą $\mathbb{D}^4$, wiedząc, że żadne otoczenie otwarte g_0 w przestrzeni G nie jest rozmaitością.

Przypuśćmy, że istnieje taki blok B. Wówczas $h_0 \in \operatorname{int} B$, a zatem istnieje otwarte otoczenie U dla h_0 takie, że $U \subset B$. Niech $V = U \cap (G \times \{0\})$. Wiemy, że V jest homeomorficzne z otwartym otoczeniem g_0, a zatem nie jest rozmaitością (rys. 6).

Rozważmy teraz zbiór $\phi(\sigma^+(U), U)$, gdzie $\sigma^+(x)$ jest czasem wyjścia x z B. Zbiór ten jest homeomorficzny z V, wiec również nie jest rozmaitością. Ale jest on również homeomorficzny z pewną składową spójną przecięcia $\phi(U) \cap \partial B$, a więc z otwartym podzbiorem ∂B. Powinien być zatem rozmaitością, otrzymujemy sprzeczność.

$\square$



Rysunek 6. Ilustracja dowodu twierdzenia 2.4.

ROZDZIAŁ 3

Istnienie bloków o typie kohomologii zbioru niezmienniczego

Rozważmy ciągły potok φ na lokalnie zwartej przestrzeni metrycznej X. Załóżmy, że pewien podzbiór S przestrzeni X jest niezmienniczy względem φ oraz że $H^*(S)$ jest typu skończonego. Zajmiemy się odpowiedzią na pytanie o istnienie takiego bloku B izolującego S, aby odwzorowanie indukowane przez inkluzję w kohomologiach

$$H^*(B) \to H^*(S)$$

było izomorfizmem. Częściową odpowiedź na to pytanie daje twierdzenie 3.4. Zanim przejdziemy do jego dowodu zajmiemy się najprostszą sytuacją dotyczącą zbiorów niezmienniczych izolowanych S będących zbiorami dodatnio asymptotycznie stabilnymi, czyli dla których istnieje blok izolujący B dla S taki, że $B^- = \varnothing$. Oczywiście, wtedy $a^- = \varnothing$, więc z lematów 1.2 i 1.3 wynika, że inkluzja $S \hookrightarrow B$ indukuje izomorfizm w kohomologiach.

Kohomologiczny indeks Conleya $CH(S)$ zbioru niezmienniczego S definiujemy jako

$$CH(S) := H^*(B, B^-),$$

gdzie B jest blokiem izolującym dla S. Można pokazać, że indeks $CH(S)$ nie zależy (z dokładnością do izomorfizmu) od wyboru bloku izolującego B ([**Ch**]).

Przykład 3.1. Kohomologiczny indeks Conleya zbioru niezmienniczego S będącego punktem siodłowym z rys. 3:

$$H^0(B, B^-) = \mathbb{Q},$$

$$H^1(B, B^-) = H^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Q},$$

$$H^n(B, B^-) = 0 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2.$$

A zatem $CH(S) = (\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, 0, 0, \dots)$.

1. Lematy kohomologiczne

W dalszych rozważaniach będziemy się posługiwać następującą wersją lematu o pięciu izomorfizmach:

LEMAT 3.1 (Lemat o pięciu izomorfizmach). *Rozważmy następujący diagram przemienny homomorfizmów przestrzeni wektorowych nad $\mathbb{Q}$, o dokładnych wierszach:*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "g_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "g_3"'] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "g_4"'] & A_5 \arrow[d, "g_5"'] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

Wtedy:

- *jeśli g_2 i g_4 są monomorfizmami i g_1 jest epimorfizmem, to g_3 jest monomorfizmem;*
- *jeśli g_2 i g_4 są epimorfizmami i g_5 jest monomorfizmem, to g_3 jest epimorfizmem.*

LEMAT 3.2. *Niech B będzie blokiem izolującym S. Wówczas*

a) $H^*(B) \to H^*(S)$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $H^*(B^-) \to H^*(a^-)$ jest izomorfizmem;

b) jeśli $CH^q(S) = 0$ oraz $H^q(B) \to H^q(a^-)$ jest monomorfizmem, to $H^q(B^-) \to H^q(S)$ jest monomorfizmem.

DOWÓD. Inkluzja $S \hookrightarrow B$ faktoryzuje się na $S \hookrightarrow A \hookrightarrow B$, a zatem z lematu 1.2 wiemy, że $H^*(B) \to H^*(S)$ jest monomorfizmem (odpowiednio: izomorfizmem) wtedy i tylko wtedy, gdy $H^*(B) \to H^*(A)$ jest monomorfizmem (izomorfizmem).

Rozważmy następujący diagram. Jest on przemienny, jego poziome wiersze stanowią długie ciągi dokładne par (B, B^-) oraz (A, a^-), a pionowe homomorfizmy są indukowane przez inkluzje:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^q(B, B^-) \arrow[r] \arrow[d] & H^q(B) \arrow[r] \arrow[d] & H^q(B^-) \arrow[r] \arrow[d] & H^{q+1}(B, B^-) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^q(A, a^-) \arrow[r] & H^q(A) \arrow[r] & H^q(a^-) \arrow[r] & H^{q+1}(A, a^-) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Z uwagi na lemat 1.3, teza a) lematu wynika wprost z lematu o pięciu izomorfizmach.

Dla dowodu części b), rozważmy fragment powyższego diagramu:

$$\begin{tikzcd}
0 = H^q(B, B^-) \arrow[r] & H^q(B) \arrow[r] \arrow[d] & H^q(B^-) \arrow[d] \\
& H^q(A) \arrow[r] & H^q(a^-)
\end{tikzcd}$$

Założyliśmy, że złożenie $H^q(B) \to H^q(A) \to H^q(a^-)$ jest monomorfizmem, a więc $H^q(B) \to H^q(A)$ także — w konsekwencji $H^q(B) \to H^q(S)$ jest monomorfizmem na mocy lematu 1.2. $\square$

WNIOSEK 3.3. *Niech B będzie blokiem izolującym S takim, że $H^*(B) \to H^*(S)$ jest monomorfizmem. Wówczas $H^*(B^-) \to H^*(a^-)$ jest również monomorfizmem.*

Dowód. Teza wynika z lematu o pięciu izomorfizmach zastosowanego do diagramu z dowodu lematu 3.2. □

2. Kostabilność

Definicja 3.1. Niech B będzie blokiem izolującym dla potoku na lokalnie zwartej przestrzeni metrycznej X. Powiemy, że a^- jest *kostabilny* w B^-, jeśli istnieje $Y \subset \operatorname{int}_{\partial B} B^-$ — zwarte otoczenie a^- takie, że odwzorowanie indukowane przez inkluzję w kohomologiach

$$H^*(Y) \to H^*(a^-)$$

jest izomorfizmem.

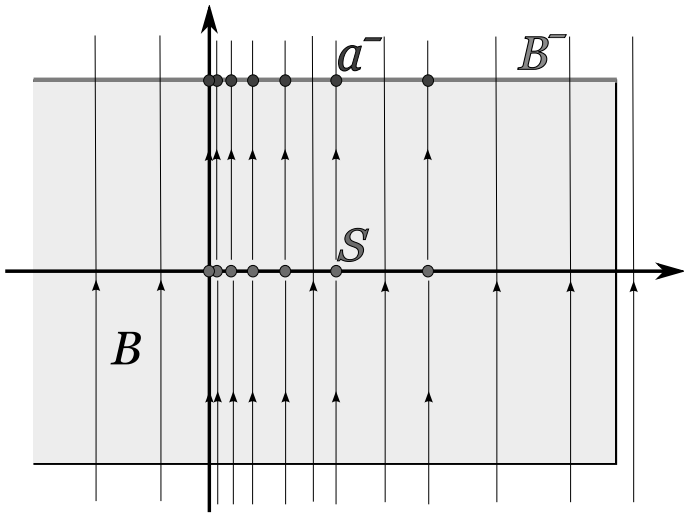
Przykład 3.2. Niech $S = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = \frac{1}{n},\ n = 1,2,\ldots$ lub $x = 0\}$. Istnieje ciągła funkcja $g : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ taka, że

$$S = \{z \in \mathbb{R}^2 : g(z) = 0\}.$$

Niech ψ będzie potokiem generowanym na $\mathbb{R}^2$ przez równanie

$$z' = g(z) \cdot (0,1).$$

Wówczas S składa się ze wszystkich punktów stacjonarnych ψ, a nawet jest to zbiór wszystkich punktów o zwartych trajektoriach, a zatem jest on zbiorem niezmienniczym izolowanym (rys. 7).



Rysunek 7. Przykład asymptotycznego zbioru wyjścia a^-, który nie jest kostabilny w zbiorze wyjścia B^-

Rozważmy blok izolujący dla S:

$$B = [-1,2] \times [-1,1].$$

Wówczas

$$B^{\pm} = [-1,2] \times \{\mp 1\},$$
$$a^{\pm} = \{(x, \mp 1) \ : \ (x,0) \in S\}.$$

Zbiory $a^{\pm}$ mają nieskończenie wiele składowych spójnych, a zatem $H^0(a^{\pm})$ są nieskończonego wymiaru. W szczególności, $a^{\pm}$ *nie są* kostabilne w $B^{\pm}$.

Zauważmy też, że jeśli $B^{\pm}$ są rozmaitościami z brzegami, a $a^{\pm}$ są zbiorami skończonymi, to $a^{\pm}$ są kostabilne w $B^{\pm}$ (por. rys. 9).

Poniższy rezultat podaje warunek wystarczający na istnienie bloku izolującego B dla S mającego ten sam typ kohomologii.

TWIERDZENIE 3.4. *Niech B będzie blokiem izolującym Churchilla dla zbioru niezmienniczego izolowanego S takim, że a^- jest kostabilny w B^-. Wtedy istnieje $W \subset B$ blok izolujący Churchilla dla S taki, że odwzorowanie indukowane przez inkluzję w kohomologiach*

$$H^*(W) \to H^*(S) \quad \textit{jest izomorfizmem.}$$

Co więcej, a^+ jest wówczas również kostabilny w B^+.

DOWÓD. Niech $Y \subset \operatorname{int} B^-$ będzie otoczeniem a^- takim, że odwzorowanie indukowane przez inkluzję

$$H^*(Y) \to H^*(a^-)$$

jest izomorfizmem. Oznaczmy $D := B^- \setminus Y$ (rys. 8).

Definiujemy

$$W := \overline{B \setminus \varphi(D, B)}.$$

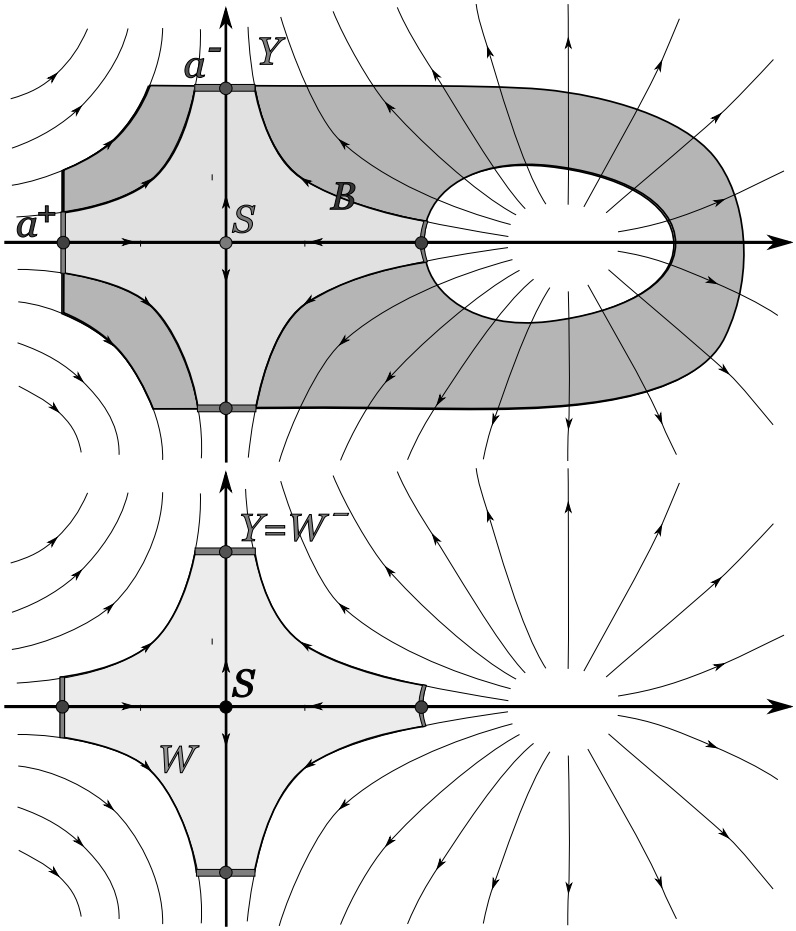
Wtedy W jest blokiem izolującym Churchilla dla S (na podstawie Propozycji 3.11 w [**Mont**]), w którym $W^- = Y$. Z Lematu 3.2 wnioskujemy, że odwzorowanie

$$H^*(W) \to H^*(S) \quad \text{jest izomorfizmem.}$$

Aby uzasadnić kostabilność a^+ w B^+, wystarczy zauważyć, że $a^+ \subset W^+ \subset \operatorname{int} B^+$. Ponieważ $H^*(W) \to H^*(S)$ jest izomorfizmem, to jeszcze raz wykorzystując Lemat 3.2, dostajemy izomorfizm

$$H^*(W^+) \to H^*(a^+).$$

□



Rysunek 8. Ilustracja dowodu tw. 3.4: konstrukcja bloku izolującego W kohomologicznego ze zbiorem niezmienniczym S.

ROZDZIAŁ 4

Bloki izolujące dla potoków na rozmaitościach trójwymiarowych

W tym rozdziale zajmiemy się częściową odpowiedzią na pytanie:

Czy dla zbioru niezmienniczego izolowanego potoku na rozmaitości 2– lub 3–wymiarowej można znaleźć blok izolujący B będący ENR-em i jednocześnie dla którego

$$H^*(B) \to H^*(S)$$

jest izomorfizmem?

Inspiracją dla rozważań jest wspomniane już twierdzenie Eastona

TWIERDZENIE 4.1 ([**E**]). *Niech V będzie polem wektorowym klasy $\mathcal{C}^1$ na orientowalnej, gładkiej rozmaitości 3–wymiarowej M, które generuje na niej potok φ. Niech $S \subset M$ będzie zbiorem niezmienniczym izolowanym dla φ. Wówczas istnieje blok B izolujący S taki, że homomorfizm indukowany przez inkluzję*

$$H^*(B) \to H^*(S)$$

jest monomorfizmem.

Należy zauważyć, że Easton w swojej pracy [**E**] rozważał bloki izolujące o dodatkowej własności $\partial B = B^- \cup B^+$. Dowód przebiegał w dwóch krokach:

(e1) istnienie bloku izolującego B dla S, aby

$$H^*(B^-) \to H^*(a^-)$$

było monomorfizmem;

(e2) dowód faktu, że z iniektywności $H^*(B^-) \to H^*(a^-)$ wynika iniektywność $H^*(B) \to H^*(S)$.

Krok (e1) jest poprawny, opiera się na następującym lemacie [**E**]:

LEMAT 4.2 (Easton). *Niech M będzie zwartą, spójną, gładką rozmaitością 2–wymiarowa z brzegiem, a C — domkniętym podzbiorem* $\operatorname{int} M$. *Wówczas wewnątrz każdego zbioru U będącego otoczeniem otwartym C w M istnieje zwarta rozmaitość z brzegiem N taka, że*

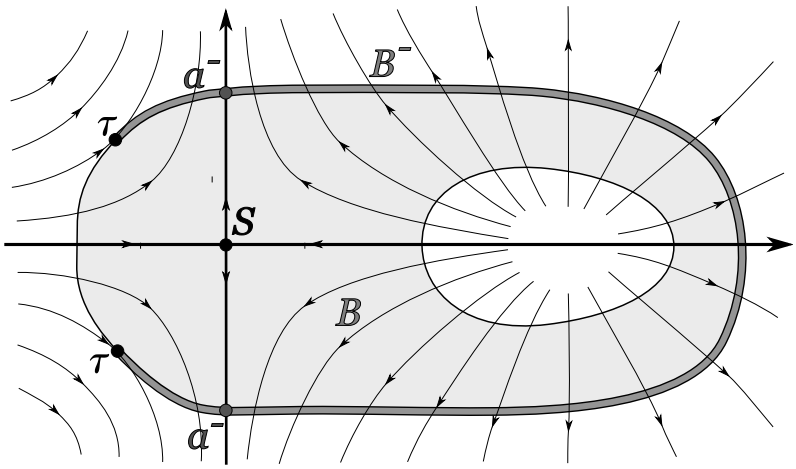
$$C \subset N \subset U$$

oraz

$$H^*(N) \to H^*(C)$$

jest iniekcją. Jeśli dodatkowo $H^*(C)$ są skończenie generowane, to N można wybrać tak, aby $H^*(N) \to H^*(C)$ było izomorfizmem.

Wniosek 3.3 niniejszej pracy orzeka, że iniektywność odwzorowania $H^*(B^-) \to H^*(a^-)$ jest warunkiem koniecznym monomorficzności $H^*(B) \to H^*(S)$, ale nie wystarczającym. Rzeczywiście, prosty przykład bloku dla potoku na płaszczyźnie, przedstawiony na rysunku 9 dowodzi nieprawdziwości kroku (e2) dowodu Eastona. Można również zmodyfikować ten przykład na potrzeby potoków trójwymiarowych, rozszerzając przestrzeń o jeszcze jeden stabilny wymiar w punkcie stacjonarnym.



Rysunek 9. Przykład obrazujący błąd w dowodzie Eastona

Oryginalny dowód Eastona kroku (e2) zakłada dokładność następującego ciągu w homologiach:

$$\cdots \longrightarrow H_n(B^- \setminus a^-, \tau) \longrightarrow H_n(B, \partial B) \longrightarrow H_n(B, B \setminus S) \longrightarrow \cdots,$$

gdzie $\tau = B^+ \cap B^-$. Ostatnia strzałka jest homomorfizmem stopnia -1, a pozostałe są indukowane przez inkluzje (por. ciąg (B) w [**E**], s. 335). Jednak łatwo sprawdzić dla przykładu z rys. 9

$$H_1(B^- \setminus a^-, \tau) \cong H_1(B, B \setminus S) = 0, \qquad H_1(B, \partial B) \cong \mathbb{Z},$$

a zatem ciąg ten nie może być dokładny.

Modyfikacja argumentów Eastona jest przedmiotem następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.3. *Jeśli S jest zbiorem niezmienniczym izolowanym dla potoku na rozmaitości wymiaru 3 i $H^*(S)$ są skończenie generowane, to wewnątrz każdego jego otoczenia izolującego N istnieje $B \subset N$ blok izolujący S taki, że:*

- *$H^*(B) \to H^*(S)$ jest izomorfizmem,*

- *B jest trójwymiarową rozmaitością z brzegiem.*

W szczególności, każdy zbiór niezmienniczy izolowany o skończenie generowanych kohomologiach w wymiarze 3 musi mieć typ kohomologii zwartej rozmaitości.

Dowód. Z twierdzenia 2.2 dostajemy blok izolujący $W \subset N$, który jest ENR-em oraz W^- jest dwuwymiarową rozmaitością z brzegiem. Skoro $CH(S)$ są skończenie generowane, to z lematów 1.2 i 1.3, a także rozważając długi ciąg dokładny pary (A, a^-) dostaniemy wniosek, że $H^*(a^-)$ jest również skończenie generowany. Zatem, z lematu 4.2 zbiór a^- jest kostabilny w W^-.

Wykorzystując teraz Twierdzenie 3.4, wewnątrz każdego otwartego otoczenia U dla a^- w W^- znajdziemy blok $B \subset W$ izolujący S taki, że

- $a^- \subset B^- \subset U$
- $H^*(B) \to H^*(S)$ jest izomorfizmem
- $B^\pm$ są dwuwymiarowymi rozmaitościami.

Można łatwo sprawdzić, że wobec powyższego ∂B jest również dwuwymiarową rozmaitością, a B jest trójwymiarową rozmaitością z brzegiem. □

Wniosek 4.4. *Jeśli zbiór $S = \{0\}$ jest niezmienniczy izolowany dla ciągłego potoku na $\mathbb{R}^3$, to istnieje dla niego blok izolujący B, homologiczny z trójwymiarową kulą domkniętą.*

Rozdział ten zakończymy rozważaniami dotyczącymi konsekwencji wynikającymi z istnienia dla danego zbioru niezmienniczego S bloku izolującego takiego, ze $B^\pm$ są ściągalne w brzegu B. Motywacją dla tego typu rozważań jest następujące pytanie:

Czy dla danego bloku izolującego B znajomość kategorii Lusternika–Schnirelmanna $\mathrm{cat}_{\partial B}(B^-)$ jego zbioru wyjścia B^- w brzegu ∂B może dać informację o strukturze zbioru niezmienniczego izolowanego S izolowanego przez B?
Jak dotąd nie udało się uzyskać rezultatów w tym kierunku.

Lemat 4.5. *Jeśli B jest blokiem izolującym takim, że dla pewnych p, $q \geqslant 1$ odwzorowania indukowane przez inkluzje*

$$H^p(\partial B) \to H^p(B^+)\ , \qquad H^q(\partial B) \to H^q(B^-)$$

są trywialne (np. gdy $B^\pm$ są ściągalne w ∂B), to cup–produkt

$$\cup : H^p(\partial B) \oplus H^q(\partial B) \to H^{p+q}(\partial B)$$

jest trywialny.

Dowód. Rozważmy długi ciąg dokładny pary $(\partial B, B^+)$

$$\cdots \longrightarrow H^p(\partial B, B^+) \longrightarrow H^p(\partial B) \longrightarrow H^p(B^+) \longrightarrow \cdots .$$

Widać, że homomorfizm $H^p(\partial B, B^+) \to H^p(\partial B)$ jest epimorfizmem, analogicznie $H^q(\partial B, B^-) \to H^q(\partial B)$ jest epimorfizmem. Ponieważ $B^\pm$ jest silnym retraktem deformacyjnym $\partial B \setminus B^\mp$, to homomorfizmy

$$H^p(\partial B, \partial B \setminus B^-) \to H^p(\partial B)\ , \qquad H^q(\partial B, \partial B \setminus B^+) \to H^q(\partial B)$$

są epimorfizmami. W diagramie przemiennym

$$\begin{array}{ccc} H^p(\partial B, \partial B \setminus B^-) \oplus H^q(\partial B, \partial B \setminus B^+) & \longrightarrow & H^p(\partial B) \oplus H^q(\partial B) \\ \cup\big\downarrow & & \cup\big\downarrow \\ 0 = H^{p+q}(\partial B, (\partial B \setminus B^-) \cup (\partial B \setminus B^+)) & \longrightarrow & H^{p+q}(\partial B) \end{array}$$

pierwsza pozioma strzałka jest więc epimorfizmem, a zatem drugi cup–produkt musi być trywialny. □

Przykład 4.1. Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie orbitą okresową i jednocześnie zbiorem niezmienniczym izolowanym. Istnieje wówczas dla S blok izolujący homeomorficzny z pełnym torusem $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$. Ponieważ cup–produkt

$$\cup : H^1(\partial B) \oplus H^1(\partial B) \to H^2(\partial B)$$

jest nietrywialny, to jedno z odwzorowań

$$H^1(\partial B) \to H^1(B^+) \quad \text{lub} \quad H^1(\partial B) \to H^1(B^-)$$

jest nietrywialne.

Ale jeśli $H^1(\partial B) \to H^1(B^\pm)$ jest nietrywialne, to $H^1(\partial B) \to H^1(a^\pm)$ również, w szczególności a^+ lub a^- jest nieściągalny w ∂B.

Lemat 4.6. *Jeśli B^+ jest ściągalny w ∂B, to dla $p \geqslant 1$ i $q \in \mathbb{Z}$ cup–produkt*

$$\cup : H^p(\partial B, B^-) \oplus H^q(\partial B) \to H^{p+q}(\partial B, B^-)$$

jest trywialny.

Dowód. Skoro dla $p \geqslant 1$ homomorfizm $H^p(\partial B) \to H^p(B^+)$ jest epimorfizmem oraz B^+ jest silnym retraktem deformacyjnym $\partial B \setminus B^-$, to

$$H^p(\partial B, \partial B \setminus B^-) \to H^p(\partial B)$$

jest epimorfizmem, a zatem teza wynika z przemienności następującego diagramu:

$$\begin{array}{ccc} H^p(\partial B, B^-) \oplus H^q(\partial B, \partial B \setminus B^-) & \longrightarrow & H^p(\partial B, B^-) \oplus H^q(\partial B) \\ \cup\big\downarrow & & \cup\big\downarrow \\ 0 = H^{p+q}(\partial B, \partial B) & \longrightarrow & H^{p+q}(\partial B, B^-) \end{array}$$

□

Niech teraz $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ będzie blokiem izolującym i dodatkowo $(n+1)$–rozmaitością z brzegiem. Zauważmy, że B^+ jest silnym retraktem deformacyjnym $\partial B \setminus B^-$, a w szczególności jest ENR-em. Wobec tego z dualności

$$H^i(\partial B, B^-) \cong H_{n-i}(\partial B \setminus B^-) \cong H_{n-i}(B^+).$$

Lemat 4.7. *Przypuśćmy, że B^+ jest ściągalny w ∂B. Jeżeli $H_i(B^+) \neq 0$ dla pewnego $i \geqslant 1$, to $H^{n-i-1}(B^-) \neq 0$.*

Dowód. Skoro B^+ jest ściągalny w ∂B, to odwzorowanie $H_i(B^+) \to H_i(\partial B)$ jest nietrywialne. Rozważmy długi ciąg dokładny pary $(\partial B, B^+)$

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(\partial B, B^+) \longrightarrow H_i(B^+) \longrightarrow H_i(\partial B) \longrightarrow \cdots,$$

dostajemy fakt, że

$$H_{i+1}(\partial B, B^+) \longrightarrow H_i(B^+)$$

jest epimorfizmem. W szczególności $H_{i+1}(\partial B, B^+) \neq 0$.

Wobec

$$H_{i+1}(\partial B, B^+) \cong H_{i+1}(\partial B, \partial B \setminus B^-)$$

oraz dualności

$$H_{i+1}(\partial B, \partial B \setminus B^-) \cong H^{n-i-1}(B^-)$$

dostajemy

$$H_{i+1}(\partial B, B^+) \cong H^{n-i-1}(B^-).$$

□

Wniosek 4.8. *Jeśli B^+ jest ściągalny w ∂B, to dla $i \geqslant 1$*

$$\dim H_{n-i-1}(B^-) = \dim H^i(B^+) + \dim H^{i+1}(\partial B).$$

Dowód. Dla $i \geqslant 1$ odwzorowania $H^i(\partial B) \to H^i(B^+)$ oraz $H^{i+1}(\partial B) \to H^{i+1}(B^+)$ są trywialne, więc długi ciąg dokładny pary $(\partial B, B^+)$ przyjmuje postać

$$0 \longrightarrow H^i(B^+) \longrightarrow H^{i+1}(\partial B, B^+) \longrightarrow H^{i+1}(\partial B) \longrightarrow 0\ ,$$

a zatem

$$\dim H^{i+1}(\partial B, B^+) = \dim H^i(B^+) + \dim H^{i+1}(\partial B).$$

Z dualności dostajemy

$$\dim H^{i+1}(\partial B, B^+) = \dim H_{n-i-1}(\partial B \setminus B^+) = \dim H_{n-i-1}(B^-)\ ,$$

skąd wynika teza. □

ROZDZIAŁ 5

Dynamika symboliczna, punkty okresowe, ciągi Lefschetza i ich ciągi dualne

1. Notacja

Przedstawimy najpierw notację używaną w następnej części rozprawy.

Niech $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ będzie zbiorem ciągów nieskończonych w obie strony, o wyrazach ze zbioru dwóch symboli 0 i 1. Jest to zwarta przestrzeń metryczna z topologią produktową. Odwzorowanie przesunięcia w lewo (lewy shift) $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ dane wzorem

$$(\sigma(c))_n = c_{n+1}, \quad c = \{c_n\} \in \Sigma_2,$$

jest homeomorfizmem Σ_2 w samą siebie.

Przez $c_k^n \in \Sigma_2$ będziemy oznaczać n–okresowe ciągi takie, że 1 występuje dokładnie $k \in \{0,\ldots,n\}$ razy w pojedynczym okresie $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$. Niech $\Sigma_2(n,k) \subset \Sigma_2$ będzie zbiorem wszystkich takich ciągów. Dodatkowo będziemy wyróżniać dwa ciągi

$$0^\infty = (\ldots, 0, 0, 0, \ldots), \qquad 1^\infty = (\ldots, 1, 1, 1, \ldots).$$

Zauważmy, że 0^∞, 1^∞ są n–okresowe dla każdego okresu $n \geqslant 1$.

Niech $P : I \to I$ będzie homeomorfizmem zwartej przestrzeni metrycznej I w samą siebie. Definiujemy zbiory:

$$\mathbb{P}^n = \{x \in I : P^n(x) = x\} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1,$$

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}^n \setminus \bigcup_{1 \leqslant k < n} \mathbb{P}^k, \qquad \mathbb{P} = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathbb{P}^n.$$

2. Własności ciągu liczb Lefschetza i jego ciągu dualnego

W tym rozdziale omówimy najważniejsze własności arytmetycznego ciągu liczb Lefschetza i jego ciągu dualnego.

Niech $E = \{E_n\}_{n \geqslant 0}$ będzie przestrzenią wektorową (nad $\mathbb{Q}$) z gradacją, a $h = \{h_n\}_{n \geqslant 0}$ endomorfizmem E stopnia zero, czyli dla każdego $n \geqslant 0$ odwzorowanie $h_n : E_n \to E_n$ będzie liniowe. Przypuśćmy dodatkowo, że E jest typu skończonego, a zatem $E_n = 0$, dla prawie

wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $\dim E_n < \infty$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wówczas dobrze określona jest *liczba Lefschetza* odwzorowania h jako

$$L(h) := \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \operatorname{tr}(h_n).$$

W szczególności, jeśli $h = \mathrm{Id} = \{\mathrm{id}_{E_n}\}_{n \geqslant 0}$, to liczba Lefschetza jest równa charakterystyce Eulera–Poincarégo przestrzeni E, tj.

$$L(\mathrm{Id}) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \dim E_n = \chi(E).$$

Dla endomorfizmu $h : E \to E$ definiujemy ciąg liczb całkowitych $\mathcal{L} = \{L_k\}_{k \geqslant 0}$, nazywany *ciągiem Lefschetza*, jako

$$L_k = L(h^k) \quad \text{dla} \quad k \geqslant 0,$$

gdzie $h^k = \underbrace{h \circ \ldots \circ h}_{k}$ oraz $h^0 = \mathrm{Id}$. Definiujemy również ciąg $\mathcal{L}^* = \{L_k^*\}_{k \geqslant 0}$, zwany *ciągiem dualnym do* $\mathcal{L}$ przez

$$L_k^* = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} L_l \quad \text{dla} \quad k \geqslant 0.$$

W szczególności

$$L_0^* = L_0 = L(\mathrm{Id}) = \chi(E).$$

Funkcją Möbiusa $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ będziemy nazywać funkcję daną przez

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1, \\ (-1)^k & \text{dla } n = p_1 \cdots p_k, \text{ gdzie } p_i \text{ – różne liczby pierwsze}, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ liczb całkowitych spełnia *relacje Dolda* (zob. [**JM**]), jeśli

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d \cong 0 \pmod{n}.$$

Zauważmy, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ spełnia relacje Dolda, to dla każdej liczby pierwszej p zachodzi

$$a_p \cong a_1 \pmod{p}.$$

Następujący fakt został udowodniony w [**MW**]:

LEMAT 5.1. *Dla każdego okresowego segmentu izolującego są spełnione własności:*

a) ciągi $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}^*$ spełniają relacje Dolda;
b) $L_k^* = L((h - \mathrm{Id})^k)$ dla $k > 0$,

c) jeśli ciąg $\mathcal{L}$ jest m–okresowy ($m > 1$), to istnieje k_0 takie, że $L^*_{2mk} \neq 0$ dla $k > k_0$. Co więcej, istnieje też $\rho > 1$ takie, że

$$\lim_{k\to\infty} \frac{L^*_{2mk}}{\rho^{2mk}} = a \neq 0.$$

W szczególności, jeśli ciąg $\mathcal{L}$ jest okresowy, to ciąg dualny $\mathcal{L}^*$ jest nieograniczony.

W następnych rozdziałach będziemy często używać własności algebraicznych ciągu $\mathcal{L}$, wynikających z poniższego lematu.

LEMAT 5.2. *Jeśli $\{a_k\}$ jest m–okresowym ciągiem liczb całkowitych takim, że dla każdej liczby pierwszej p zachodzi relacja*

$$a_p \cong a_1 \pmod p$$

oraz $(r, m) = 1$, to $a_r = a_1$. W szczególności, jeśli m jest liczbą pierwszą, to

$$a_1 = \ldots = a_{m-1}.$$

DOWÓD. Skoro $(r, m) = 1$, to z twierdzenia Dirichleta istnieje ciąg $n_k \to \infty$ taki, że

$$p_k = r + n_k m$$

jest liczbą pierwszą dla każdego $k \in \mathbb{N}$. W szczególności istnieje takie k, że

$$p_k > |a_r - a_1|.$$

Stąd dostajemy

$$a_r = a_{p_k} \cong a_1 \pmod{p_k},$$

oraz $p_k|(a_r - a_1)$, a zatem $a_r = a_1$. □

3. Metody topologiczne wykrywania dynamiki symbolicznej

Popularną metodą analizy skomplikowanej dynamiki homeomorfizmu P jest znalezienie zwartego zbioru I niezmienniczego dla P takiego, aby P zawężony do I był semisprzężony z lewym shiftem $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$. W równaniach różniczkowych zwyczajnych mamy zwykle do czynienia z sytuacją, gdzie P jest odwzorowaniem Poincarégo zdefiniowanym na pewnym przekroju Poincarégo. W ostatnich latach pojawiło się wiele nowych metod topologicznych wykrywania tego rodzaju chaotycznych zachowań. Bazują one na różnych technikach w rodzaju: teorii indeksu Conleya, teorii punktów stałych, relacji nakrywających i innych (patrz [**BCG, BF, CDP, GZ, PZ, PZ1, PZ2, MM, MM2, SWZ**]).

Wspomniane semisprzężenie to ciągła suriekcja $g : I \to \Sigma_2$ taka, że

$$g \circ P|_I = \sigma \circ g.$$

Semisprzężeń poszukuje się często wśród naturalnych odwzorowań związanych z geometrycznymi własnościami układu, a następnie, aby udowodnić, że g jest suriekcją, próbuje się znaleźć pewien gęsty zbiór zawarty w obrazie g. Często w dowodzeniu suriektywności g wykorzystuje się teorię punktów stałych.

Interesujące nas techniki topologiczne badania układów dynamicznych zakładają powiązanie odwzorowania Poincarégo P z endomorfizmem $h : E \to E$ w taki sposób, że indeks punktu stałego P^n w zbiorze $I \cap \{x \in U : P^n(x) = x\}$ jest dobrze zdefiniowany oraz równy liczbie Lefschetza $L_n = L(h^n)$. W praktyce zbiór I jest niezmienniczy izolowany dla P i wówczas $h : E \to E$ jest pewnym odwzorowaniem indeksowym typu Conleya. Wówczas zbiór $F(c_k^n) = g^{-1}(c_k^n) \cap \mathbb{P}^n$ jest izolowany w zbiorze punktów stałych P^n, a jego indeks punktu stałego $\operatorname{ind}(P^n, F(c_k^n))$ jest dobrze określony.

Przypuśćmy teraz, że mamy do czynienia z sytuacją, gdy indeks punktu stałego $\operatorname{ind}(P^n, F(c_k^n))$ jest niezależny od n, tj. dla każdych dwóch ciągów c_k^n i c_k^m mamy

$$\operatorname{ind}(k) := \operatorname{ind}(P^n, F(c_k^n)) = \operatorname{ind}(P^m, F(c_k^m)).$$

Zauważmy, że wtedy z własności addytywności indeksu punktu stałego dostaniemy

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{ind}(k),$$

a ze wzoru inwersyjnego Möbiusa

$$\operatorname{ind}(k) = L_k^*.$$

Widać, że w szczególności w takiej sytuacji warunek $L_k^* \neq 0$ pociąga za sobą

$$F(c_k^n) \neq \varnothing,$$

dla każdego $n \geqslant k$ i każdego ciągu $c_k^n \in \Sigma_2(n, k)$. Zatem, ze zwartości $g(I)$ dostajemy zawieranie

$$\overline{\{c_k^n : L_k^* \neq 0,\ n \geqslant k\}} \subset g(I) \subset \Sigma_2,$$

więc, jeśli tylko $\{c_k^n : L_k^* \neq 0,\ n \geqslant k\}$ jest gęsty w Σ_2, g jest suriekcją.

Istotne zatem wydaje się uzyskanie rezultatów gwarantujących niezerowanie się elementów ciągu dualnego $\{L_k^*\}$ do ciągu Lefschetza $\{L_k\}$.

4. Dynamika symboliczna, punkty okresowe

Niech $f : U \to X$ będzie ciągłym odwzorowaniem zdefiniowanym na otwartym podzbiorze U pewnej przestrzeni metrycznej X. Wybierzmy podzbiór zwarty $I \subset U$ tak, aby $f|_I : I \to I$ było homeomorfizmem. Załóżmy także, że

- istnieje ciągłe odwzorowanie $g : I \to \Sigma_2$ takie, że
$$g \circ f|_I = \sigma \circ g,$$
- istnieje $E = \{E_n\}$ — przestrzeń wektorowa z gradacją, skończonego typu, wraz z endomorfizmem $h : E \to E$ takie, że warunek $L_k^* \neq 0$ pociąga za sobą
$$F(c_k^n) := g^{-1}(c_k^n) \cap \mathbb{P}^n \neq \varnothing,$$
dla każdego $n \geqslant k$ i każdego ciągu $c_k^n \in \Sigma_2(n,k)$.

Z ciągiem Lefschetza $\mathcal{L}$ wiążemy zbiór liczb naturalnych, odpowiadających niezerowym wyrazom ciągu dualnego $\mathcal{L}^*$
$$\nu(\mathcal{L}) = \{k \in \mathbb{N} : L_k^* \neq 0\}.$$

Wniosek 5.3. *Jeśli $\nu(\mathcal{L})$ jest zbiorem nieskończonym, to g jest suriekcją. W szczególności, entropia topologiczna f jest dodatnia.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że jeżeli $\nu(\mathcal{L})$ jest nieskończony, to odpowiadający mu zbiór
$$\{c_k^n \in \Sigma_2 : k \in \nu(\mathcal{L}),\ n \geqslant k\} \subset g(I)$$
jest gęsty w Σ_2. □

Następny wynik dotyczy okresowych ciągów Lefschetza typu
$$(L_0, L_1, L_1, \ldots, L_1, L_0, L_1, \ldots).$$

Propozycja 5.4. *Niech $\mathcal{L} = \{L_k\}_{k \geqslant 0}$ będzie ciągiem Lefschetza takim, że $L_1 \neq L_0$. Wówczas*

a) $\{p \in \mathbb{N} : |L_1 - L_0| < p,\ p$ jest liczbą pierwszą $\} \subset \nu(\mathcal{L})$;

b) jeśli $\mathcal{L}$ jest m–okresowy i $L_1 = \ldots = L_{m-1} \neq L_m = L_0$, to
- *$\nu(\mathcal{L}) = \mathbb{N}$ dla m parzystych,*
- *$\nu(\mathcal{L}) = \mathbb{N} \setminus \{nm : n$ — nieparzyste $\}$ dla m nieparzystych;*

c) jeśli $\mathcal{L}$ jest p–okresowy, gdzie p jest liczbą pierwszą, to
$$\nu(\mathcal{L}) = \mathbb{N} \setminus \{np : n \text{ – nieparzyste}\}.$$

Dowód. Załóżmy, że $L_p^* = 0$ dla pewnej liczby pierwszej $p > |L_1 - L_0|$. Skoro $L_1^* = L_1 - L_0$ i ciąg dualny $\mathcal{L}^*$ spełnia relacje Dolda (por. Twierdzenie 5.1), to $0 = L_p^* \cong L_1^* \pmod p$, a zatem $p|(L_1 - L_0) \neq 0$ i dostajemy sprzeczność.

Druga część tezy została udowodniona w [**PW**] (por. również [**SWZ**]), a część c) wynika wprost z b) i lematu 5.2. □

Wniosek 5.5. *Jeśli $L_1 \neq L_0$, to g jest suriekcją. Co więcej,*

a) dla $n > |L_1 - L_0|$ *zachodzi*

$$\operatorname{card} \mathbb{P}_n \geqslant \sum_{p \in S(n)} \binom{n}{p},$$

gdzie $S(n) = \{p \in \mathbb{N} : |L_1 - L_0| < p < n,\ p \not| n,\ p$ *– pierwsza*$\}$;

b) dla każdego $n > \max\{|L_1 - L_0|, 3\}$ *zachodzi*

$$\operatorname{card} \mathbb{P}_{3n} > \binom{3n}{n}.$$

Dowód. Ustalmy $c_p^n \in \Sigma_2(n,p)$. Skoro $L_p^* \neq 0$, to $F(c_p^n)$ jest niepusty. Pokażemy, że jeśli $x \in F(c_p^n)$, to $x \in \mathbb{P}_n$. Należy w tym celu pokazać, że n jest okresem minimalnym x. Zauważmy, że jeśli $1 \leqslant m \leqslant n$ jest okresem minimalnym x, to $m|n$ i $l = \frac{n}{m}$ musi dzielić p, a zatem $l|n$ i wreszcie $l|p$. Ale $p \not| n$, więc $l = 1$, i w konsekwencji $m = n$.

Wiadomo, że dla każdego $p \in S(n)$ istnieje co najmniej $\binom{n}{p}$ punktów okresowych w $\mathbb{P}_n$, odpowiadających n–okresowym ciągom $c_p^n \in \Sigma_2(n,p)$. Ponadto punkty okresowe kodujące różne liczby pierwsze $p \in S(n)$ są różne między sobą, skąd wynika teza a).

Z twierdzenia Czebyszewa istnieje liczba pierwsza p taka, że

$$n < p < 2n$$

(zob. [**AZ**]). W udowodnionej powyżej części a) i prostych własności współczynników dwumianowych dostaniemy

$$\operatorname{card} \mathbb{P}_{3n} \geqslant \nu(3n) \geqslant \binom{3n}{p} > \binom{3n}{n}.$$

□

Wniosek 5.6. *Dla każdego* $n \geqslant \max\{|L_1 - L_0|, 3\}$ *zachodzi*

$$\operatorname{card} \mathbb{P}_{2n} \geqslant 2n.$$

Dowód. Podobnie jak powyżej, z tw. Czebyszewa wybieramy liczbę pierwszą $n < p < 2n$. Z wniosku 5.5 i własności współczynników dwumianowych dostaniemy

$$\operatorname{card} \mathbb{P}_{2n} \geqslant \nu(2n) \geqslant \binom{2n}{p} \geqslant 2n.$$

□

Załóżmy teraz, że $q > 1$ jest liczbą całkowitą względnie pierwszą z $m \in \mathbb{Z}^+$ (ich największy wspólny dzielnik $\operatorname{NWD}(q,m) = 1$). Niech

$$q = \prod_{s=1}^{t} p_s^{\alpha_s},$$

gdzie $p_1, \ldots, p_s$ są różnymi liczbami pierwszymi oraz $\alpha_s \in \mathbb{Z}^+$. Za **[ST]** oznaczmy

$$\nu_m(q) = \text{NWW}\,[p_1^{\alpha_1-1}(p_1^{\beta_1}-1), \ldots, p_t^{\alpha_t-1}(p_t^{\beta_t}-1)],$$

gdzie NWW jest najmniejszą wspólną wielokrotnością, a β_s jest najmniejszą liczbą naturalną o własności $p_s^{\beta_s} \equiv 1 \pmod{m}$.

Propozycja 5.7. *Przypuśćmy, że pewien ciąg Lefschetza $\mathcal{L}$ jest okresowy o okresie nieparzystym $m > 1$ oraz, że $L_1 \neq L_0$.*

a) Istnieje $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\{2mk : k > k_0\} \subset \nu(\mathcal{L}).$$

b) Jeśli dla pewnego $q > |L_1 - L_0|$ zachodzi NWD $(q, m) = 1$, *to*

$$\{1 + l\nu_m(q),\ 2 + l\nu_m(q) : l \geqslant 0\} \subset \nu(\mathcal{L}).$$

Dowód. Część pierwsza tezy wynika z Propozycji 5.1. Oznaczmy

$$a(n, m, r) := \sum_{k \equiv r \bmod m} \binom{n}{k} a^k.$$

Na podstawie pracy **[ST]** dostajemy

$$a(k + \nu_m(q), m, r) \equiv a(k, m, r) \pmod{q},$$

zakładając, że $q > 1$ jest względnie pierwsze z m i $k > 0$. Pokażemy najpierw, że ciąg $\mathcal{L}^*$ jest $\nu_m(q)$–okresowy modulo q. Istotnie, wobec

$$L_R^* = (-1)^R \left(\sum_{r=0}^{m-1} a(R, m, r) L_r \right)$$

oraz

$$L_{l\nu_m(q)+R}^* = (-1)^{l\nu_m(q)+R} \left(\sum_{r=0}^{m-1} a(l\nu_m(q) + R, m, r) L_r \right),$$

dostajemy

$$L_{l\nu_m(q)+R}^* \equiv (-1)^{l\nu_m(q)} L_R^* \pmod{q}.$$

Można sprawdzić, że jeśli $q \neq 2$, to $\nu_m(q)$ jest parzyste, a dla $q = 2$ zachodzi $(-1)^{l\nu_m(2)} \equiv 1 \pmod{2}$, a więc

$$L_{l\nu_m(q)+R}^* \equiv L_R^* \pmod{q}.$$

W szczególności $L_{l\nu_m(q)+1}^* \equiv L_1^* \pmod{q}$. Ponieważ $q > |L_1 - L_0|$, to $L_1^* \not\equiv 0 \pmod{q}$ i w konsekwencji $L_{l\nu_m(q)+1}^* \neq 0$.

Dla $R = 2$ dostajemy $L_{l\nu_m(q)+2}^* \equiv L_2^* \pmod{q}$. Skoro m jest nieparzysta, to NWD $(2, m) = 1$, a więc z Lematu 5.2 dostajemy $L_1 = L_2$. Zatem

$$L_2^* = L_2 - 2L_1 + L_0 = L_0 - L_1,$$

i wobec $q > |L_1 - L_0|$ mamy $L_2^* \not\equiv 0 \pmod q$. Stąd $L^*_{l\nu_m(q)+2} \neq 0$.

□

Głównym twierdzeniem tego rozdziału jest

TWIERDZENIE 5.8. *Przypuśćmy, że $\mathcal{L} = \{L_k\}_{k\geqslant 0}$ jest p–okresowym ciągiem dla pewnej liczby pierwszej p oraz zachodzi*

$$L_1 \neq L_0.$$

Wówczas $g : I \to \Sigma_2$ jest suriekcją. Ponadto

a) jeśli $p = 2$, to $F(c_k^n)$ jest niepusty dla każdego n–okresowego ciągu c_k^n oraz dla dowolnej liczby pierwszej q zachodzi

$$\operatorname{card} \mathbb{P}_q \geqslant 2^q - 2. \tag{1}$$

b) jeśli p jest nieparzystą liczbą pierwszą, to zbiór $F(c_k^n)$ jest niepusty dla każdego n–okresowego ciągu c_k^n, dla którego k nie jest nieparzystą wielokrotnością p oraz dla dowolnej liczby pierwszej q zachodzi

$$\operatorname{card} \mathbb{P}_q \geqslant \sum_{k\in C(q)} \binom{q}{k}, \tag{2}$$

gdzie

$$C(q) = \{1 \leqslant k < q : p \not| k \quad \textit{lub } k \textit{ jest parzyste.}\}$$

DOWÓD. Dla $p = 2$ bezpośrednie wyliczenie daje

$$L_k^* = \begin{cases} L_0 & \text{dla} \quad k = 0 \\ (-2)^{k-1}(L_1 - L_0) & \text{dla} \quad k \geqslant 1 \end{cases}.$$

Zatem $F(c_k^n) \neq \varnothing$. Aby wykazać (1), rozważmy $k \in \{1, \ldots, q-1\}$. Dla każdego ciągu c_k^q istnieje $x \in F(c_k^q)$. Ponieważ q jest pierwsza, to musi zachodzić $x \in \mathbb{P}_q$. Skoro mamy $2^q - 2$ takich ciągów c_k^q, a różne ciągi odpowiadają różnym q–okresowym dla f punktom, dostajemy tezę.

Przypuśćmy teraz, że p jest nieparzystą liczbą pierwszą. Wystarczy udowodnić, że $L_k^* = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy k jest nieparzystą wielokrotnością p. Z lematu 5.2 wynika, że

$$L_1 = \ldots = L_{p-1}, \quad L_p = L_0 \neq L_1,$$

a zatem teza wynika z Propozycji 5.4. Aby pokazać (2), rozważmy $k \in C(q)$. Liczba k nie jest nieparzystą wielokrotnością p, a więc $L_k^* \neq 0$. Stąd istnieje $x \in F(c_k^q)$ i w konsekwencji $x \in \mathbb{P}_q$. Istnieje $\sum_{k\in C(q)} \binom{q}{k}$ możliwych ciągów c_k^q odpowiadających $k \in C(q)$ i odpowiadają one różnym q–okresowym punktom, co kończy dowód. □

Wniosek 5.9. *Załóżmy, że ciąg* $\mathcal{L} = \{L_k\}_{k\geqslant 0}$ *jest* m*–okresowy dla* $m > 1$ *oraz* $L_1 \neq L_0$*. Wówczas istnieje* $k_0 \in \mathbb{N}$ *takie, że dla każdego* $k > k_0$*, dla którego liczba* $p = 4mk + 1$ *jest pierwsza, zachodzi*

$$\operatorname{card} \mathbb{P}_p \geqslant \binom{p}{2mk}.$$

Zwróćmy uwagę, że z twierdzenia Dirichleta istnieje nieskończenie wiele takich $k > k_0$, dla których $4lk + 1$ jest liczbą pierwszą.

Dowód Wniosku 5.9. Z twierdzenia 5.1 wynika, że istnieje k_0 o tej własności, że $L^*_{2mk} \neq 0$ dla każdego $k > k_0$. Skoro $p = 4mk + 1$ jest pierwsza, to każdy punkt $x \in F(c^p_{2mk})$ ma okres minimalny p, co kończy dowód. $\square$

ROZDZIAŁ 6

Zastosowania w dynamice

W tej części opiszemy topologiczne metody wykrywania dynamiki chaotycznej pasujące do schematu opisanego w poprzednim rozdziale.

1. Dynamika odwzorowań Poincarégo równań różniczkowych okresowych w czasie

Niech M będzie rozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$, a $v : \mathbb{R} \times M \to TM$ zależnym od czasu polem wektorowym, okresowym, o okresie $T > 0$. Zakładamy, że równanie nieautonomiczne

$$x' = v(t, x) \tag{NODE}$$

ma własność istnienia i jednoznaczności rozwiązań, czyli dla każdego $t_0 \in \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in M$ istnieje jedyne rozwiązanie problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} x' = v(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \tag{Cauchy}$$

Niech φ będzie lokalnym procesem na M, generowanym przez pole v, tj. dla którego $\varphi_{(t_0,t)}(x_0)$ jest wartością rozwiązania układu (Cauchy) w chwili $t_0 + t$. Produkt $\mathbb{R} \times M$ nazywamy *rozszerzoną przestrzenią fazową* dla (NODE). Odwzorowanie Poincarégo $P = \varphi_{(0,T)}$ jest wówczas dobrze zdefiniowane na pewnym otwartym podzbiorze M. Zauważmy, że jeżeli Φ jest potokiem lokalnym na $\mathbb{R} \times M$ generowanym przez

$$\begin{cases} t' = 1 \\ x' = f(t, x) \end{cases}$$

to $\Phi_t(t_0, x_0) = (t_0 + t, \varphi_{(t_0,t)}(x_0))$.

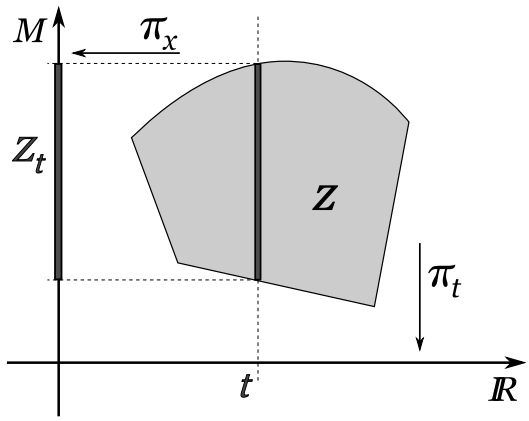
Dla zbioru $Z \subset \mathbb{R} \times M$ definiujemy jego przekroje czasowe

$$Z_t = \{x \in M : (t, x) \in Z\}.$$

Przez $\pi_t : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ oraz $\pi_x : \mathbb{R} \times M \to M$ będziemy oznaczać rzutowania na współrzędną czasową i przestrzenną (rys. 10).

Definicja 6.1. Zbiór zwarty $W \subset [0, T] \times M$ nazywamy *okresowym segmentem izolującym nad* $[0, T]$ jeśli jego zbiory wejścia i wyjścia $W^{\pm} \subset W$ ze względu na potok Φ na $\mathbb{R} \times M$ są zwarte oraz $\partial W = W^+ \cup W^-$, a ponadto

(s1) W, $W^{\pm}$ są zwartymi ENR-ami,



RYSUNEK 10. Rzutowania w przestrzeni fazowej.

(s2) istnieją W^{++}, W^{--} zwarte podzbiory ∂W takie, że

$$W^- = (\{T\} \times W_T) \cup W^{--},$$

$$W^+ = (\{0\} \times W_0) \cup W^{++},$$

(s3) $W_0 = W_T$, $W_0^{--} = W_T^{--}$, $W_0^{++} = W_T^{++}$,

(s4) istnieje homeomorfizm $h : [0,T] \times W_0 \to W$ taki, że $\pi_t \circ h = \pi_t$ oraz

$$h([0,T] \times W_0^{++}) = W^{++}, \quad h([0,T] \times W_0^{--}) = W^{--}.$$

Zbiory W^{--}, W^{++} nazywamy odpowiednio *istotnym zbiorem wyjścia* i *istotnym zbiorem wejścia*. Zwróćmy uwagę, że W jest blokiem izolującym dla potoku Φ na rozszerzonej przestrzeni fazowej $\mathbb{R} \times M$. Ponadto, $\operatorname{inv} W = \varnothing$. Przykład segmentu izolującego przedstawiony jest na rys. 11.

Homeomorfizm h z własności **(s4)** indukuje homeomorfizm

$$m : (W_0, W_0^{--}) \to (W_0, W_0^{--})$$

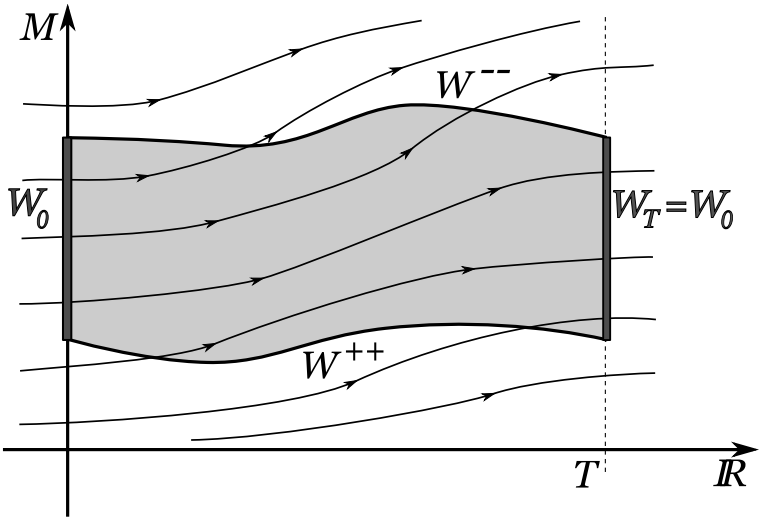
przekroju zerowego segmentu izolującego W przez

$$m(x) = \pi_x h(T, \pi_x h^{-1}(0,x)), \quad x \in W_0.$$

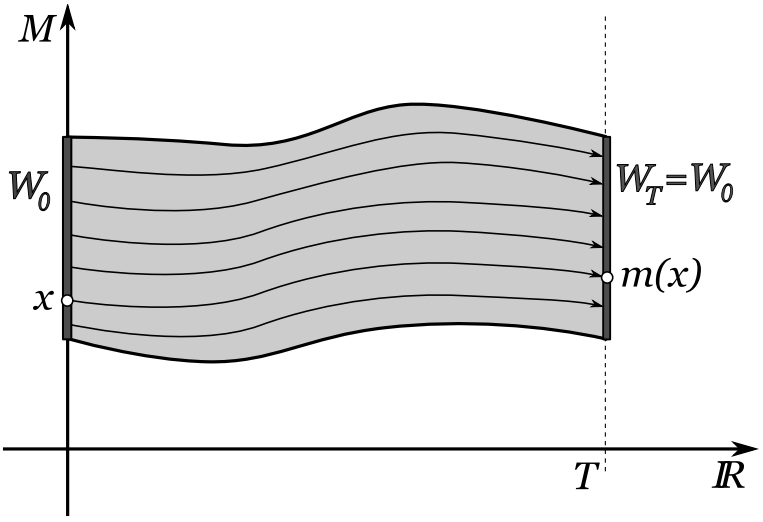
Homeomorfizm m nazywamy *odwzorowaniem monodromii* segmentu W (rys. 12). Można pokazać (patrz [**S1**]), że odwzorowania monodromii tego samego segmentu W należą do tej samej klasy homotopii, więc izomorfizm indukowany w homologiach singularnych o współczynnikach w $\mathbb{Q}$

$$\mu_W := H(m) : H(W_0, W_0^{--}) \to H(W_0, W_0^{--})$$

jest niezmiennikiem topologicznym W.



Rysunek 11. Segment izolujący i jego elementy.

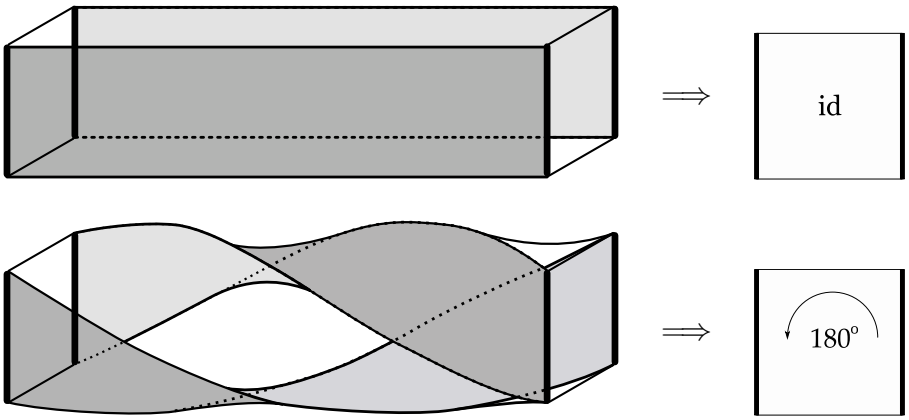


Rysunek 12. Odwzorowanie monodromii m.

Przykład 6.1. Rozważmy dwa segmenty izolujące w przestrzeni fazowej $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, których przekroje w 0 są kwadratami (rys. 13). Pierwszy segment odpowiada odwzorowaniu monodromii m_1 homotopijnemu z identycznością, a więc

$$\mu_1 = H(m_1) = H(\mathrm{id}\,) = \mathrm{Id}\,.$$

Drugi segment generuje odwzorowanie monodromii m_2 homotopijne z obrotem o 180°.



RYSUNEK 13. Dwa różne segmenty izolujące o kwadratowym przekroju zerowym i ich odwzorowania monodromii.

Dla okresowego segmentu izolującego W definiujemy ciąg liczb Lefschetza

$$L_k = L(\mu_W^k), \quad k \geqslant 0,$$

Liczby te są dobrze zdefiniowane, gdyż W_0, W_0^{--} są zwartymi ENR-ami, a zatem $H(W_0, W_0^{--})$ jest typu skończonego.

PRZYKŁAD 6.2. Znajdźmy ciągi liczb Lefschetza dla segmentów z przykładu 6.1.

$$L(\mu_1) = L\left(\mathrm{id}_{(W_0, W_0^{--})}\right) = \mathrm{tr}\,[1] - \mathrm{tr}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1,$$

$$L(\mu_2) = \mathrm{tr}\,[1] - \mathrm{tr}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Ponieważ

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \mu_1^n = \mu_1 = \mathrm{id}_{(W_0, W_0^{--})} = \mu_2^{2n},$$

to ciąg $\mathcal{L}_1 = \{L(\mu_1)^k\}$ jest stały, równy $\{-1, -1, -1, \dots\}$, natomiast ciąg $\mathcal{L}_2 = \{L(\mu_2)^k\}$ jest okresowy o okresie 2, postaci $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$.

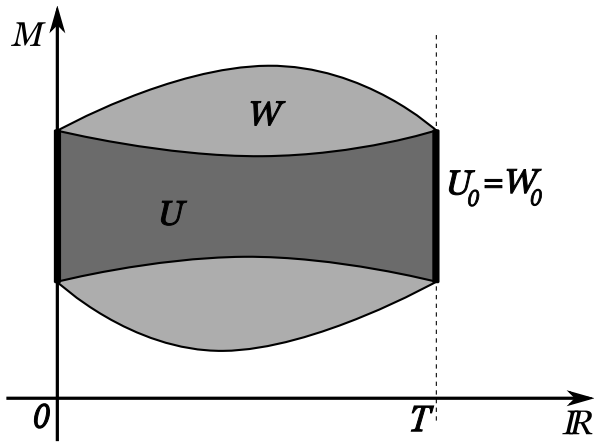
Przypuśćmy, że $U \subset W$ są dwoma okresowymi segmentami izolującymi nad $[0, T]$ tego samego równania (NODE) o tych samych przekrojach zerowych (rys. 14):

$$U_0 = W_0, \quad U_0^{\pm} = W_0^{--}, \quad \mu_U = \mathrm{id}_{H(W_0, W_0^{--})}.$$

Następujące twierdzenie pochodzi z [**W**] (zob. też [**SW, SWZ**])

TWIERDZENIE 6.1. *Istnieje zbiór zwarty $I \subset W_0$ niezmienniczy dla odwzorowania Poincarégo P oraz ciągła funkcja $g : I \to \Sigma_2$ taka, że*

$$\sigma \circ g = g \circ P,$$



Rysunek 14. Dwa segmenty izolujące o równych przekrojach zerowych.

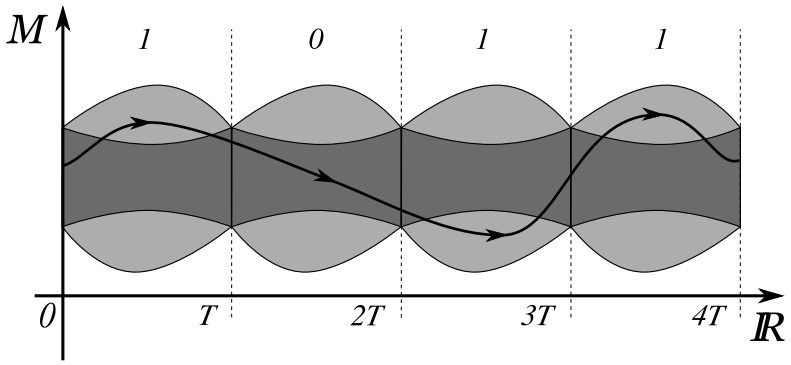
o tej własności, że z warunku $L_k^* \neq 0$ *wynika* $F(c_k^n) \neq \varnothing$ *dla wszystkich ciągów* $c_k^n \in \Sigma_2$.

Zbiór I definiuje się jako zbiór wszystkich punktów W_0, których całe trajektorie zawarte są w większym segmencie W:

$$I := \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \{x \in W_0 : \ \varphi_{(0,t+nT)}(x) \in W_t \ \forall t \in [0,T]\}$$

Widać, że $I \subset \operatorname{int} W_0$ oraz że zbiór I jest zwarty.

Semisprzężenie g z powyższego twierdzenia zilustrowane jest na rys. 15.



Rysunek 15. Semisprzężenie g z twierdzenia 6.1. Jeśli orbita punktu $x \in I$ opuszcza wewnętrzny segment U na odcinku $[kT, (k+1)T]$, to $g(x)_k = 1$. W przeciwnym wypadku przypisujemy mu 0.

Bezpośrednią konsekwencją wniosku 5.5 jest

WNIOSEK 6.2. *Jeśli* $L(\mu_W) \neq \chi(U_0, U_0^{--})$, *to* g *jest suriekcją i entropia topologiczna odwzorowania Poincarégo jest dodatnia. Ponadto, jeżeli* $p > |L(\mu_W) - \chi(U_0, U_0^{--})|$ *jest liczbą pierwszą, to* $F(c_p^n) \neq \varnothing$ *dla każdego* $n \geqslant p$. *W szczególności równanie (NODE) ma nieskończenie wiele geometrycznie różnych rozwiązań okresowych.*

TWIERDZENIE 6.3. *Przypuśćmy, że* $Z \subset V$ *są dwoma* T*–okresowymi segmentami izolującymi dla równania (NODE) o tej własności, że ciągi Lefschetza* $\{L_k^Z\} = \{L(\mu_Z^k)\}_{k\geqslant 0}$, $\{L_k^V\} = \{L(\mu_V^k)\}_{k\geqslant 0}$ *są* p*–okresowe, gdzie* p *jest liczbą pierwszą oraz*

$$\mu_Z \circ \mu_V = \mathrm{Id}_{H(Z_0, Z_0^{--})}, \quad L_1^V \neq \chi(Z_0, Z_0^{--}).$$

Wówczas istnieje zwarty zbiór I *niezmienniczy dla* $F = P^2$ *oraz ciągła suriekcja* $g : I \to \Sigma_2$ *taka, że* $\sigma \circ g = g \circ F|_I$. *Co więcej, dla wszystkich ciągów* $c_k^n \in \Sigma_2(n,k)$ *istnieje* $x \in F(c_k^n)$, *zakładając, że* n *nie jest nieparzystą wielokrotnością* p. *W szczególności, entropia topologiczna* P *jest dodatnia.*

DOWÓD. Definiujemy okresowe segmenty izolujące $U \subset W$ na odcinku $[0, 2T]$ przez

$$U_t := \begin{cases} Z_t & \text{dla} \quad t \in [0,T] \\ V_t & \text{dla} \quad t \in [T, 2T] \end{cases}, \qquad W_t := V_t \quad \text{dla} \quad t \in [0, 2T].$$

Spełnione są własności $\mu_U = \mu_V \circ \mu_Z = \mathrm{Id}_{H(U_0, U_0^{--})}$ i $\mu_W = \mu_V \circ \mu_V$, a więc z lematu 5.2 dostajemy

$$L(\mu_W) = L(\mu_V^2) = L(\mu_V) = L_1^V \neq \chi(Z_0, Z_0^{--}) = \chi(U_0, U_0^{--}).$$

Ponieważ $(2,p) = 1$, to ciąg Lefschetza $\{L_k^W\}$ związany z segmentem W jest również p–okresowy, więc możemy znów użyć lematu 5.2, otrzymując

$$L_1^W = \ldots = L_{p-1}^W \neq L_p^W = \chi(Z_0, Z_0^{--}).$$

Teraz wystarczy zastosować Propozycję 5.4 i twierdzenie 6.1. □

W następnych rozważaniach skupimy się na mocy zbioru $F(c_k^n) = g^{-1}(c_k^n) \cap \mathbb{P}$. Motywacją do tych rozważań będą prace [**OW1, OW2**], skąd pochodzi pojęcie chaosu dystrybucyjnego. Tam też odsyłamy czytelnika po definicję chaosu dystrybucyjnego. Tutaj krótko przypomnę, że według twierdzenia 4 w [**OW1**], jeżeli $g : I \to \Sigma_2^+ = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest semisprzężeniem pomiędzy P a σ oraz dla pewnego okresowego ciągu c zachodzi

$$\operatorname{card} g^{-1}(c) = 1,$$

to P jest dystrybucyjnie chaotyczne i chaos dystrybucyjny jest jednostajny.

W dowodzie następnej propozycji istotną rolę gra twierdzenie Shuba–Sullivana (por. [**BB, SS, JM**]), które tutaj przypomnę.

TWIERDZENIE 6.4 (Shub, Sullivan). *Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym takim, że $0 \in U$, a $f : U \to \mathbb{R}^m$ — funkcją klasy $\mathcal{C}^1$. Jeżeli 0 jest izolowanym punktem stałym dla wszystkich iteracji f^n ($n \in \mathbb{N}$), to zbiór indeksów punktów stałych*

$$\{\mathrm{ind}\,(f^n, 0) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

jest ograniczony.

PROPOZYCJA 6.5. *Załóżmy, że dla pewnego $k \geqslant 1$ ciąg $\{L^*_{mk}\}_{m\geqslant 1}$ jest nieograniczony. Wtedy dla każdego n–okresowego ciągu c^n_k zbiór $g^{-1}(c^n_k) \cap \mathbb{P}$ jest nieskończony.*

DOWÓD. Wystarczy pokazać, że zbiór $\bigcup_{m\geqslant 1} F(c^{mn}_{mk}) \subset F(c^n_k) \cap \mathbb{P}$ jest nieskończony. Przypuśćmy, że jego moc jest ograniczona przez C:

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{m\geqslant 1} F(c^{mn}_{mk})\right) < C.$$

Przypomnijmy, że indeks punktu stałego $\mathrm{ind}\,(P^n, F(c^n_k))$ jest dobrze zdefiniowany oraz równy L^*_k ([**W**]).

Ustalmy $m_0 \geqslant 1$ i $x_0 \in F(c^{m_0 n}_{m_0 k})$. Skoro zbiory $F(c^{mn}_{mk})$ są skończone z założenia, to $x_0 \in F(c^{mm_0 n}_{mm_0 k})$ jest izolowanym punktem stałym odwzorowania $P^{mm_0 n}$ dla każdego $m \geqslant 1$. Ponadto odwzorowanie Poincarégo P jest gładkie, a zatem z twierdzenia Shuba–Sullivana ciąg indeksów punktów stałych

$$\mathrm{ind}\,((P^{m_0 n})^m, \{x_0\})$$

jest ograniczony (a nawet okresowy). Ze skończoności $\bigcup_{m\geqslant 1} F(c^{mn}_{mk})$ istnieje $M > 0$ takie, że

$$|\mathrm{ind}\,((P^{m_0 n})^m, x)| \leqslant M$$

dla każdego $m \geqslant 1$ i $x \in F(c^{mn}_{mk})$. Z własności addytywności indeksu punktu stałego otrzymujemy

$$|L^*_{mk}| = |\mathrm{ind}\,(P^{mn}, F(c^{mn}_{mk}))| \leqslant CM,$$

i dostajemy sprzeczność. □

PRZYKŁAD 6.3. Załóżmy, że $\mathcal{L} = \{L_k\}$ jest 2–okresowy oraz $L_1 \neq L_0$. Wówczas, jak wynika z dowodu twierdzenia 5.8 mamy

$$L^*_{mk} = (-2)^{mk-1}(L_1 - L_0) \quad \text{dla} \quad m, k \geqslant 1,$$

a więc dla każdego $k \geqslant 1$ ciąg $\{L^*_{mk}\}$ jest nieograniczony. Z Propozycji 6.5 wynika zatem, że

$$\mathrm{card}\,(g^{-1}(c^n_k) \cap \mathbb{P}) = \infty,$$

dla wszystkich n–okresowych ciągów $c^n_k \in \Sigma_2(n, k)$ i $k \geqslant 1$.

W pracach [**SW, OW1, OW2**] można znaleźć rozważania dotyczące układu okresowego na płaszczyźnie, postaci

$$z' = \overline{z}(1 + |z|^2 e^{i\eta t})$$

Stamtąd pochodzi też twierdzenie, że dla odpowiednio małych $0 < \eta$ istnieją okresowe segmenty izolujące $U \subset W$, dla których $W_0 = U_0$, $W_0^{--} = U_0^{--}$ oraz

$$\mu_U = \mathrm{id}_{H(U_0, U_0^{--})} = \mu_W^2 = \mathrm{Id}\,, \quad L_1 = L(\mu_W) = 1, \quad L_0 = L(\mathrm{id}\,) = -1,$$

a więc odwzorowanie Poincarégo P jest semisprzężone z σ przez g. Ponadto w [**OW1**] udowodniono, że

$$\mathrm{card}\, g^{-1}(0^\infty) = 1,$$

a zatem odwzorowanie Poincarégo P jest dystrybucyjnie chaotyczne (patrz twierdzenie 4 w [**OW1**]). Z Propozycji 6.5 wynika, że nie istnieje inny ciąg okresowy c o tej własności, że $g^{-1}(c)$ jest zbiorem skończonym.

Wniosek 6.6. *Załóżmy, że pewien ciąg Lefschetza $\mathcal{L}$ jest m–okresowy ($m > 1$). Wtedy* $\mathrm{card}\,(\mathbb{P} \cap g^{-1}(1^\infty)) = \infty$, *więc istnieje nieskończenie wiele okresowych rozwiązań, kodowanych ciągiem* 1^∞.

Dowód. Z Propozycji 5.1 wynika, że ciąg $\mathcal{L}^*$ jest nieograniczony, a zatem teza wynika z Propozycji 6.5. $\square$

2. Dwupunktowe problemy brzegowe

Niech W będzie okresowym segmentem izolującym. Dla homeomorfizmu $b : (W_0, W_0^{--}) \to (W_0, W_0^{--})$, zbadamy istnienie rozwiązań *dwupunktowego problemu brzegowego* postaci

$$\begin{cases} x' & = f(t,x) \\ x(0) & = b(x(nT)) \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Następujące twierdzenie pochodzi z [**S3**]:

TWIERDZENIE 6.7. *Jeżeli W jest okresowym segmentem izolującym nad $[0,T]$ dla równania (NODE), to zbiór*

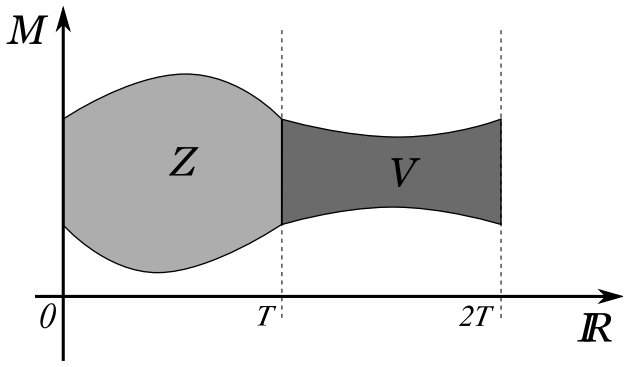
$$F(W,b) = \{x \in M : b \circ \varphi_{(0,T)}(x) = x, \quad \forall t \in [0,T] : \ \varphi_{(0,t)}(x) \in W_t\}$$

jest zwarty i otwarty w zbiorze punktów stałych $b \circ \varphi_{(0,T)}$, a indeks punktu stałego $F(W,b)$ dla odwzorowania $b \circ \varphi_{(0,T)}$ jest dany wzorem

$$\operatorname{ind}(b \circ \varphi_{(0,T)}, F(W,b)) = L(b_* \circ \mu_W).$$

Wprowadzimy teraz operację sklejania dwóch okresowych segmentów izolujących Z i V mających te same przekroje w 0, tj. dla których $(Z_0, Z_0^{\pm}) = (V_0, V_0^{\pm})$ (rys. 16). Definiujemy nowy segment izolujący ZV okresowy nad $[0,2T]$ wzorem

$$\begin{aligned} ZV := \{(t,x) \in [0,2T] \times M \ : \ & x \in Z_t \quad \text{dla} \quad t \in [0,T], \\ & x \in V_{t-T} \quad \text{dla} \quad t \in [T,2T]\}. \end{aligned}$$



RYSUNEK 16. Sklejenie dwóch segmentów izolujących Z i V.

Dla $V(1), \ldots, V(r)$ — okresowych segmentów izolujących nad $[0,T]$, mających te same przekroje w 0 możemy analogicznie zdefiniować nowy segment izolujący $V(1) \ldots V(r)$, okresowy nad $[0,rT]$ jako

$$V(1) \ldots V(r) := (V(1) \ldots V(r-1))\ V(r).$$

Można sprawdzić, że

$$\mu_{V(1)\ldots V(r)} = \mu_{V(r)} \circ \ldots \circ \mu_{V(1)}.$$

Jeśli $Z(1) = \ldots = Z(r) = V$, to oznaczamy $V^r := Z(1)\ldots Z(r)$.

Niech teraz $U \subset W$ będą dwoma okresowymi segmentami izolującymi nad $[0,T]$ dla równania (NODE) takimi, że

$$U_0 = W_0, \quad U_0^{\pm} = W_0^{\pm}, \quad \mu_U = \mathrm{id}_{H(W_0, W_0^{--})}.$$

Z dowodu twierdzenia Ważewskiego (por. **[SWZ]**) wynika, że funkcja czasu pierwszego wyjścia

$$\sigma_U^+ : U_0 \ni x \to \sup\{t \geqslant 0 : \forall s \in [0,t] \quad \varphi_{(0,s)}(x) \in U_{s \bmod T}\} \in [0,+\infty]$$

jest ciągła.

Niech $(V(0),\ldots,V(n-1))$ będzie skończonym ciągiem segmentów U i W, tj. $V(i) \in \{U,W\}$. Oznaczamy

$$J_U := \{x \in F(W^n,b) : \sigma_U^+(x) > T\},\ J_V := \{x \in F(W^n,b) : \sigma_U^+(x) < T\},$$

$$J_{V(0)\ldots V(n-1)} := \{x \in F(W^n,b) : \forall k \in \{0,\ldots,n-1\} \quad \varphi_{(0,T)}^k(x) \in J_{V(k)}\}.$$

Głównym rezultatem tego rozdziału jest następujące

Twierdzenie 6.8. *Przypuśćmy, że okresowy segment izolujący W występuje w ciągu $V(0)\ldots V(n-1)$ dokładnie k razy. Wówczas*

$$\mathrm{ind}\,(b \circ \varphi_{(0,T)}^n, J_{V(0)\ldots V(n-1)}) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} L(b_* \circ \mu_W^l).$$

Zauważmy, że powyższe twierdzenie stwierdza w istocie, że dla ciągu $\widetilde{\mathcal{L}} = \{L(b_* \circ \mu_W^n)\}$ indeks punktu stałego $\mathrm{ind}\,(b \circ \varphi_{(0,T)}^n, J_{V(0)\ldots V(n-1)})$ wyraża się przez ciąg dualny $\widetilde{\mathcal{L}}^*$ do ciągu $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Dowód. Dla $k = 0$, mamy $V(0)\ldots V(n-1) = U^n$ oraz $J_{U^n} = F(U^n,b)$, a więc z twierdzenia 6.7 dostajemy

$$\mathrm{ind}\,(b \circ \varphi_{(0,T)}^n, F(U^n,b)) = L(b_* \circ \mu_U) = L(b_*).$$

Dla $k \geqslant 1$ dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na k.

Skoro segmenty U, W mają równe sekcje zerowe, to $\sigma_U^+(x) \neq T$ dla $x \in F(W^n,b)$, a w konsekwencji zbiory $J_{V(0)\ldots V(n-1)}$ dla wszystkich możliwych n–ciągów złożonych z segmentów U i W tworzą zwarte, rozłączne pokrycie zbioru $F(W^n,b)$.

Niech $k = 1$ i $n \geqslant 1$. Ponieważ $F(U^n,b) = J_{U^n}$ oraz $J_{V(0)\ldots V(n-1)}$ stanowią zwarte, rozłączne pokrycie $F(V(0)\ldots V(n-1),b)$, to z twierdzenia 6.7 i własności addytywności indeksu punktu stałego dostajemy

$$L(b_* \circ \mu_{V(0)\ldots V(n-1)}) = \mathrm{ind}\,(b \circ \varphi_{(0,T)}^n, F(V(0)\ldots V(n-1),b)) =$$
$$\mathrm{ind}\,(b \circ \varphi_{(0,T)}^n, F(U^n,b)) + \mathrm{ind}\,(b \circ \varphi_{(0,T)}^n, J_{V(0)\ldots V(n-1)}) =$$
$$L(b_* \circ \mu_U) + \mathrm{ind}\,(b \circ \varphi_{(0,T)}^n, J_{V(0)\ldots V(n-1)}),$$

skąd wynika teza, gdyż $\mu_{V(0)\dots V(n-1)} = \mu_W$ i μ_U jest identycznością.

Załóżmy teraz, że wzór zachodzi dla $1 \leqslant k < n$. Udowodnimy go dla $k+1$.

Ustalmy ciąg $(V(0), \dots, V(n-1))$, w którym jest dokładnie $k+1$ symboli W. Z twierdzenia 6.7 i własności $\mu_{V(0)\dots V(n-1)} = \mu_W^{k+1}$ dostajemy

$$\text{ind}\,(b \circ \varphi^n_{(0,T)}, F(V(0)\dots V(n-1), b)) = L(b_* \circ \mu_W^{k+1}). \tag{3}$$

Przez Γ oznaczamy zbiór wszystkich ciągów $(Z(0), \dots, Z(n-1))$, dla których $V(i) = U$ pociąga za sobą $Z(i) = U$, a W pojawia się w okresie l razy dla pewnego $l \in \{0, \dots, k\}$. Z własności addytywności otrzymujemy

$$\text{ind}\,(b \circ \varphi^n_{(0,T)}, F(V(0)\dots V(n-1), b)) =$$

$$= \text{ind}\,(b \circ \varphi^n_{(0,T)}, J_{V(0)\dots V(n-1)}) + \sum_{Z(0)\dots Z(n-1)\in\Gamma} \text{ind}\,(b \circ \varphi^n_{(0,T)}, J_{Z(0)\dots Z(n-1)}).$$

Stosujemy krok indukcyjny dla równania (3) i otrzymujemy:

$$\text{ind}\,(b \circ \varphi^n_{(0,T)}, J_{V(0)\dots V(n-1)}) =$$

$$L(b_* \circ \mu_W^{k+1}) - \sum_{s=0}^{k} \binom{k+1}{s} \sum_{l=0}^{s} (-1)^{s-l} \binom{s}{l} L(b_* \circ \mu_W^l) =$$

$$\sum_{l=0}^{k+1} (-1)^{k+1-l} \binom{k+1}{l} L(b_* \circ \mu_W^l).$$

□

Przykład 6.4. Jako zastosowanie rozważmy większy segment W, dla którego $\mu_W^3 = \text{id}_{H(W_0, W_0^-)}$, czyli którego ciąg Lefschetza $\mathcal{L} = L(\mu_W^k)$ jest 3–okresowy.

Niech $b = m : (W_0, W_0^{--}) \to (W_0, W_0^{--})$ będzie odwzorowaniem monodromii związanym z W. Wtedy $b_* = \mu_W$ i z twierdzenia 6.8 dostajemy

$$\text{ind}\,(m \circ \varphi^n_{(0,T)}, J_{V(0)\dots V(n-1)}) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} L(\mu_W^{l+1}), \tag{4}$$

gdzie $(V(0), \dots, V(n-1))$ jest ciągiem segmentów U i W o dokładnie k symbolach W.

Udowodnimy następujący

WNIOSEK 6.9. *Przypuśćmy, że* $\mu_W^3 = \mathrm{id}_{H(W_0,W_0^-)}$, $L_1 \neq 0$ *oraz* $L_1 \neq L_0$. *Niech* $(V(0), V(1), V(2), V(3))$ *będzie ciągiem segmentów* U *i* W, *w którym* W *pojawia się dokładnie* $k \in \{0, 2, 3, 4\}$ *razy. Wtedy istnieje* $x \in W_0$ *takie, że*

a) $\varphi_{(0,t)} \in W_{t \bmod T}$ *dla* $t \in [0, 4T]$,
b) $m \circ \varphi_{(0,4T)}(x) = x$,
c) jeśli $V(i) = U$, *to dla* $t \in [iT, (i+1)T]$

$$\varphi_{(0,t)}(x) \in U_{t \bmod T},$$

d) jeśli $V(i) = W$, *to dla pewnego* $t_i \in (iT, (i+1)T)$

$$\varphi_{(0,t)}(x) \notin U_{t_i \bmod T}.$$

W szczególności problem

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = m(x(4T)) \end{cases}$$

ma co najmniej 12 geometrycznie różnych rozwiązań.

DOWÓD. Ciąg $\{L_k\}$ jest 3–okresowy, więc z lematu 5.2 musi zachodzić $L_1 = L_2$. Bezpośrednie przekształcenie wzoru (4) daje

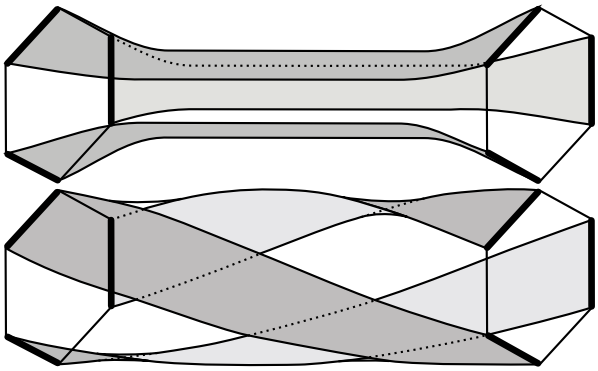
$$\mathrm{ind}\,(m \circ \varphi^n_{(0,T)}, J_{V(0)V(1)V(2)V(3)}) = \begin{cases} L_1 & \text{dla} \quad k = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad k = 1 \\ L_0 - L_1 & \text{dla} \quad k = 2 \\ 6(L_0 - L_1) & \text{dla} \quad k = 3 \\ 3(L_1 - L_0) & \text{dla} \quad k = 4 \end{cases},$$

skąd wynika teza. □

Z rozważań w pracy **[SWZ]** wynika, że okresowe równanie na płaszczyźnie

$$z' = \overline{z}^2(1 + |z|^2 e^{i\kappa t}) \tag{SWZ}$$

spełnia założenia wniosku 6.9 dla odpowiednio małych parametrów $\kappa > 0$. Okresowe segmenty izolujące U i W nad $[0, \frac{2\pi}{\kappa}]$ konstruowane dla tego równania mają przekroje zerowe o kształcie sześciokątów, poglądowo przedstawione na rys. 17.



Rysunek 17. Segmenty izolujące U i W dla równania (SWZ).

3. Dyskretny indeks Conleya i dynamika chaotyczna

Niech X będzie lokalnie zwartym, metrycznym ENR-em, a $f : X \to X$ — homeomorfizmem.

Zwarty zbiór $N \subset X$ nazywamy *blokiem izolującym* dla f, jeżeli

$$f^{-1}(N) \cap N \cap f(N) \subset \operatorname{int} N.$$

Oznaczamy dodatkowo $N^- = N \setminus f^{-1}(\operatorname{int}(N))$. Zbiór niezmienniczy $I := \operatorname{inv}(N) := \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(N)$, będący częścią niezmienniczą bloku izolującego N nazywamy *zbiorem niezmienniczym izolowanym.*

Przez H oznaczać będziemy funktor kohomologii Alexandera–Spaniera o współczynnikach wymiernych. Definiujemy też funkcje

$$f_N : (N, N^-) \ni x \to f(x) \in (N \cup f(N^-), N^- \cup f(N^-)),$$

$$i_N : (N, N^-) \in x \to x \in (N \cup f(N^-), N^- \cup f(N^-)).$$

Z własności silnego wycinania wynika, że i_N indukuje izomorfizm w kohomologiach Alexandera–Spaniera. Endomorfizm

$$\chi_N := H(f_N) \circ H(i_N)^{-1} : H(N, N^-) \to H(N, N^-)$$

nazywamy *odwzorowaniem indeksowym* na N.

Następujące twierdzenie pochodzi z [**MrW**]:

TWIERDZENIE 6.10. *Niech $M \subset N$ będą dwoma blokami izolującymi dla f o własnościach:*

- $\chi_M = \mathrm{id}_{H(N,N^-)}$ *oraz* χ_N *jest izomorfizmem,*
- $f(N) \cap M \cap f^{-1}(N) \subset \operatorname{int}(M)$,
- $f(N \setminus f^{-1}(\operatorname{int}(M))) \cap M \subset N^-$,
- *wszystkie inkluzje*

$$(M, M \cap N^-) \hookrightarrow (N, N^-),$$

$$(N, N^-) \hookrightarrow (N, N \setminus f^{-1}(\operatorname{int}(M))),$$

$$(M, M \cap N^-) \hookrightarrow (M, M^-),$$

$$(M, M^-) \hookrightarrow (N, N \setminus f^{-1}(\operatorname{int}(M)))$$

indukują izomorfizmy w kohomologiach Alexandera–Spaniera.

Wtedy dla części niezmienniczej $I = \operatorname{inv}(N)$ istnieje ciągła funkcja $g : I \to \Sigma_2$ o własnościach:

- $g \circ f|_I = \sigma \circ g$
- *dla każdego ciągu $c_k^n \in \Sigma_2(n,k)$ istnieje $x \in g^{-1}(c)$ taki, że $f^n(x) = x$, o ile $L_k^* \neq 0$, gdzie $\{L_k^*\}$ jest ciągiem dualnym do ciągu Lefschetza $\{L_k\} = \{L(\chi_N^k)\}$ związanego z większym blokiem izolującym N.*

Zastosowaniem wniosku 5.5 jest następujący:

WNIOSEK 6.11. *Jeśli* $L(\chi_N) \neq \chi(N, N^-)$, *to* g *jest suriekcją, a entropia topologiczna* f *jest dodatnia. Ponadto, jeśli* $p > |L(\chi_N) - \chi(N, N^-)|$ *jest liczbą pierwszą, to* $F(c_p^n) \neq \varnothing$ *dla wszystkich* $n \geqslant p$. *W konsekwencji* f *ma nieskończenie wiele punktów okresowych.*

4. Metoda przekrojów pośrednich

W ostatnim rozdziale omówimy pewne aspekty metody sekcji pośrednich wykrywania chaotycznej dynamiki wprowadzonej w [**M**].

Motywacją dla tej metody w [**M**] było badanie dynamiki równania

$$z' = (1 + e^{i\eta t}|z|^2)\overline{z}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{Mr}$$

Równanie to rozważano również w [**SW, WZ**] za pomocą metod topologicznych wiążących pojęcie okresowego segmentu izolującego i klasycznej analizy oszacowań. Występowanie dynamiki symbolicznej zostało wykazane dla parametrów η z zakresu $\eta \in (0, 0.495]$. Później wynik został poprawiony w [**OW2**] na wartości $\eta \in (0, 0.5044]$. Układ dynamiczny generowany przez to równanie trudno badać metodami symulacji komputerowej. Wykazuje ono bowiem bardzo szybką ekspansję i większość orbit ucieka do nieskończoności w bardzo krótkim czasie. Metoda Mrozka pozwala na obejście tego problemu przy wykorzystaniu częściowych przekrojów Poincarégo. Głównym rezultatem pracy [**M**] jest wykazanie chaotycznego zachowania równania (Mr) dla $\eta = 1$.

Przybliżymy najpierw krótko metodę Mrozka i wykażemy jej powiązania z metodami przedstawionymi w tej pracy. Przez resztę rozdziału będziemy traktować odwzorowanie Poincarégo jako generator dyskretnego układu dynamicznego. Zaczniemy od przypomnienia podstawowych pojęć teorii dyskretnego indeksu Conleya.

Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią metryczną, a $f : X \to X$ homeomorfizmem. Mówimy, że zbiór $S \subset X$ jest *niezmienniczy* jeżeli $f(S) = S$. Dla $N \subset X$ definiujemy jego *część niezmienniczą* przez $\operatorname{inv}(N) := \bigcap_{n\in\mathbb{Z}}(N)$. Mówimy, że $S \subset X$ jest zbiorem niezmienniczym *izolowanym*, jeżeli posiada zwarte otoczenie N takie, że $S = \operatorname{inv}(N)$. Wtedy N nazywamy *otoczeniem izolującym* dla S.

DEFINICJA 6.2. Niech $N \subset X$ będzie otoczeniem izolującym, a S jego częścią niezmienniczą. Parę zbiorów zwartych $P = (P_1, P_2)$ takich, że $P_2 \subset P_1 \subset N$ nazywamy *parą indeksową*, jeżeli

(pi1) $f(P_2) \cap P_1 \subset P_2$,
(pi2) $P_1 \cap \overline{(f(P_1) \setminus P_1)} \subset P_2$,
(pi3) $S \subset \operatorname{int}(P_1 \setminus P_2)$.

Zauważmy, że f indukuje w parze indeksowej odwzorowanie

$$f_P : (P_1, P_2) \ni x \to f(x) \in (P_2 \cup f(P_1), P_2 \cup (f(P_1) \setminus P_1).$$

Ponadto, inkluzja

$$i_P : (P_1, P_2) \to (P_2 \cup f(P_1), P_2 \cup (f(P_1) \setminus P_1)$$

indukuje izomorfizm w kohomologiach Alexandera–Spaniera. Odwzorowanie

$$\chi_P := f_P^* \circ (i_P^*)^{-1} : H^*(P_1, P_2) \to H^*(P_1, P_2)$$

nazywamy *odwzorowaniem indeksowym* dla P. Dowodzi się, że jeśli X jest ENR-em, a S — izolowanym zbiorem niezmienniczym, to $S \cap \mathrm{Fix}\,(f)$ jest izolowanym zbiorem punktów stałych i zachodzi

$$\mathrm{ind}\,(S, f) := \mathrm{ind}\,(f, S \cap \mathrm{Fix}\,(f)) = L(\chi_P),$$

dla dowolnej pary indeksowej dla S.

Dla pewnego $n \in \mathbb{N}_+$ rozważmy teraz rodzinę parami rozłącznych zwartych przestrzeni metrycznych $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}_n}$ oraz homeomorfizmy $f_i : X_i \to X_{i+1}$ dla $i \in \mathbb{Z}_n$. Oznaczmy $P := f_{n-1} \circ \ldots \circ f_0 : X_0 \to X_0$, a także

$$X := \bigcup_{i=0}^{n-1} X_i, \qquad f := \bigcup_{i=0}^{n-1} f_i : X \to X.$$

Dla $A \subset X$ będziemy używać oznaczenia $A_i = A \cap X_i$. Przestrzeń X wyposażamy w topologię w sposób następujący: zbiór $U \subset X$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy U_i jest otwarty dla każdego $i \in \mathbb{Z}_n$. Zauważmy, że

$$f(X_i) \subset X_{i+1}, \qquad i \in \mathbb{Z}_n.$$

Definicja 6.3. Niech $N \subset X$ będzie blokiem izolującym dla f, czyli N jest zwarty oraz $f^{-1}(N) \cap N \cap f(N) \subset \mathrm{int}\,(N)$. Wtedy $S = \mathrm{inv}\,(N)$ jest zbiorem niezmienniczym izolowanym. Powiemy, że para zwarta (N, N^e) jest *parą blokową* dla f i N, jeżeli

(pb1) $f(N^e) \cap N = \varnothing$,
(pb2) $f(N) \cap \partial N \subset N^e$,
(pb3) $N^e \subset \partial N$.

Łatwo sprawdzić, że para blokowa jest parą indeksową. Niech $\chi_N : H^*(N, N^e) \to H^*(N, N^e)$ będzie odwzorowaniem indeksowym związanym z parą blokową (N, N^e). Wówczas

$$\chi_N(H^*(N_i, N_i^e)) \subset H^*(N_{i+1}, N_{i+1}^e), \qquad i \in \mathbb{Z}_n.$$

Niech $\chi_{N_i} := \chi_N|_{H^*(N_i,N_i^e)}$.
Ponieważ $H^*(N,N^e) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} H^*(N_i,N_i^e)$, to

$$\chi_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \chi_{N_{n-1}} \\ \chi_{N_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi_{N_1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \chi_{N_{n-2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem χ_N^n jest macierzą diagonalną, gdzie

$$a_{11} = \chi_{N_{n-1}} \cdots \chi_{N_0}.$$

Niech $S = \operatorname{inv}(N,f)$. Wówczas S jest izolowanym zbiorem niezmienniczym dla f^n oraz

$$\chi(S,f^n) = \chi(S,f)^n.$$

Można sprawdzić, że zbiory X_i są niezmiennicze względem f^n. Zatem każdy ze zbiorów S_i jest niezmienniczy względem f^n oraz

$$\chi(S_0, f^n|_{X_0}) = \chi_{N_{n-1}} \cdots \chi_{N_0}.$$

W szczególności

$$\operatorname{ind}(S_0, f^n|_{X_0}) = L(\chi_{N_{n-1}} \cdots \chi_{N_0}).$$

Niech W będzie ENR-em, a φ — T–okresowym procesem globalnym na X, czyli

$$\Phi_t(s,x) = (s+t, \varphi_{(s,t)}(x)),$$

jest potokiem na $\mathbb{R} \times W$ i $\varphi_{(s,t)} = \varphi_{(s+T,t)}$ dla wszystkich s, t. Przez $P = \varphi_{(0,T)} : W \to W$ oznaczmy odwzorowanie Poincarégo.

Obserwacja 6.12. W praktyce proces φ i odpowiadający mu potok Φ w rozszerzonej przestrzeni fazowej $\mathbb{R} \times M$ jest generowany przez okresowe w czasie pole wektorowe $v : \mathbb{R} \times M \to TM$ na pewnej rozmaitości riemannowskiej M. Zwykle pole wektorowe v generuje tylko proces lokalny φ i w konsekwencji lokalny potok Φ, ponieważ rozwiązania problemu Cauchy'ego są zdefiniowane na pewnym otwartym otoczeniu 0. Można obejść tę trudność w sposób następujący: niech $W \subset M$ będzie zwartym zbiorem takim, że $\mathbb{R} \times W$ jest zbiorem Ważewskiego, tj. funkcja pierwszego wyjścia

$$\sigma_W^+ : W \times \mathbb{R} \ni (x,t) \to \sup\{s \geqslant 0 : \Phi([0,s],(x,t)) \subset \mathbb{R} \times W$$

jest ciągła. Definiujemy potok $\overline{\Phi}$ na $\mathbb{R} \times W$ przez

$$\overline{\Phi}((s,(x,t)) := \begin{cases} \Phi(s,(x,t)) & \text{dla } s \leqslant \sigma_W^+(x,t), \\ (s - \sigma_W^+(x,t), p(\Phi(\sigma_W^+(x,t)), \Phi(x,t))) & \\ & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Wówczas $\overline{\Phi}$ jest dobrze zdefiniowany, a każda orbita potoku $\overline{\Phi}$ zawarta w $\operatorname{int}_M(W) \times \mathbb{R}$ jest również orbitą potoku Φ.

Dla ustalonych n, $p \in \mathbb{N}$ oznaczamy

$$T_n^p = \{t = (t_i)_{i \in \mathbb{Z}_n} : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < pT\}.$$

Dla $t \in T_n^p$ kładziemy $|t| = n$. Dla ciągów $t \in T_n^p$ i $s \in T_m^q$ definiujemy ich *sklejenie* $st \in T_{n+m}^{p+q}$ przez

$$(st)_i = \begin{cases} t_i, & \text{dla} \quad i < n \\ s_{i-n} + pT, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Zauważmy, że dla każdego $p \in \mathbb{N}$ istnieje potok indukowany Φ na $W \times S_{pT}^1$, gdzie $S_{pT}^1 = [0, pT]/_\sim$, a relacja „$\sim$" identyfikuje 0 i pT.

Ustalmy $t \in T_n^p$. Niech $X_i^t = W \times \{t_i\}$ oraz

$$f_i^t : X_i^t \to X_{i+1}^t$$

oznacza częściowe odwzorowanie Poincarégo. Niech $X^t = \bigcup_{i=0}^{n-1} X_i^t$ oraz $f^t = \bigcup_{i=0}^{n-1} f_i^t$.

Zauważmy, że $(f^t)^n|_{X_0^t} = P^p$.

Niech $t \in T_{\hat{n}}^1$ i $s \in T_{\hat{m}}^1$. Przypuśćmy, że $N \subset X^t$ jest blokiem izolującym dla f^t, a $M \subset X^s$ — blokiem izolującym dla f^s. Oznaczamy

$$S_N = \operatorname{inv}(N, f^t)_0, \quad S_M = \operatorname{inv}(M, f^s)_0.$$

Załóżmy, że

1) $M_0 = N_0$,
2) $S_M \subset S_N$,
3) $\chi(S_M, P) = I$ i $L(\chi(S_N, P)) \neq L(\chi(S_M, P))$.

Widzimy, że S_N i S_M są izolowanymi zbiorami niezmienniczymi względem, odpowiednio, $(f^t)^{\hat{n}}|_{X_0^t} = P$ i $(f^s)^{\hat{m}}|_{X_0^t} = P$, zatem 3) ma sens.

Niech

$$I = S_N, \quad I_0 = S_M, \quad I_1 = S \setminus S_0.$$

Można sprawdzić, że I_1 jest zwarty (por. lemat 6 w [**MW**]). Zdefiniujmy ciągłe przekształcenie $g : I \to \Sigma_2$ przez

$$g(x)_i = j \iff P^i(x) \in I_j, \qquad i \in \mathbb{Z},\ j \in \{0, 1\}.$$

Ustalmy $c_k^n \in \Sigma_2$. Głównym rezultatem tego rozdziału jest następująca

PROPOZYCJA 6.13. *Niech $\mathcal{L}$ będzie ciągiem Lefschetza związanym z $\chi(S_N, P)$, a $\mathcal{L}^*$ — jego ciągiem dualnym. Wówczas*

$$\operatorname{ind}(P^n, F(c_k^n)) = L_k^*.$$

Dowód. Mając $A \subset X^t$ i $B \subset X^s$ definiujemy sklejenie $BA \subset X^{st}$ przez

$$(BA)_i = \begin{cases} A_i & \text{dla} \quad i < n \\ B_{i-n} & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}.$$

Dla ustalonego ciągu c_k^n i j zdefiniujmy $\tau : \mathbb{Z}_n \to \{t, s\}$

$$\tau(j) = \begin{cases} s & \text{dla} \quad (c_k^n)_j = M \\ t & \text{dla} \quad (c_k^n)_j = N \end{cases}.$$

Będziemy identyfikować τ ze sklejeniem $\tau(n-1)\dots\tau(0)$.

Niech $K = K^{\tau(n-1)}\dots K^{\tau(0)}$ oznacza odpowiednie sklejenie bloków izolujących M i N. Ponieważ $M_0 = N_0$, to K jest również blokiem izolującym dla f^τ. W szczególności $K_0 = N_0 = M_0$. Niech $S_K = \operatorname{inv}(K, f^\tau)_0$. Wtedy S_K jest izolowanym zbiorem niezmienniczym dla $P^n = (f^\tau)^{|\tau|}|_{X_0^t}$ oraz

$$\operatorname{ind}(S_K, P^n) = L(\chi_{|\tau|-1}\dots\chi_0) = L(\chi_N^k) = L_k.$$

Dla $k = 0$, dostajemy $\operatorname{ind}(P^n, F(c_0^n)) = \operatorname{ind}(S_K, P^n) = L(\chi_M) = \chi(M_0, M_0^e) = L_0$.

Dla $k \geqslant 1$ skorzystamy z indukcji ze względu na k. Niech $k = 1$. Skoro $F(c_1^n)$ i $F(c_0^n)$ stanowią zwarte, rozłączne pokrycie $S_K \cap \operatorname{Fix}(P^n)$, to z własności addytywności indeksu punktu stałego dostajemy

$$L_1 = \operatorname{ind}(P^n, F(c_1^n)) + \operatorname{ind}(P^n, F(c^n, 0)) = \operatorname{ind}(P^n, F(c_1^n)) + L_0,$$

skąd wynika teza.

Załóżmy teraz, że wzór zachodzi dla $1 \leqslant k < n$. Udowodnimy jego prawdziwość dla $k+1$. Niech

$$\Gamma = \{c_l^n : 0 \leqslant l < n,\ (c_{k+1}^n)_i = 0 \Longrightarrow (c_l^n)_i = 0\} \subset \Sigma_2.$$

Wówczas $F(c_{k+1}^n) \cup \bigcup_{c_l^n \in \Gamma} F(c_l^n)$ jest zwartym, rozłącznym pokryciem $S_K \cap \operatorname{Fix}(P^n)$. Z własności addytywności indeksu punktu stałego dostajemy

$$L_{k+1} = \operatorname{ind}(S_K, P^n) = \operatorname{ind}(P^n, F(c_{k+1}^n)) + \sum_{c_l^n \in \Gamma} \operatorname{ind}(P^n, F(c_l^n)).$$

Krok indukcyjny i bezpośrednie przeliczenie dają

$$\operatorname{ind}(P^n, F(c_{k+1}^n)) = \left(L_{k+1} - \sum_{s=0}^{k} \binom{k+1}{s} \sum_{l=0}^{s} L_s^* \right) = L_{k+1}^*.$$

$\square$

Bibliografia

[AZ] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Third Edition, Springer 2003.

[B] R. H. Bing, *The cartesian product of a certain nonmanifold and a line is* E^4, Ann. of Math. 70 (1959), 399–412.

[BB] I. K. Babienko, S. A. Bogatyi, *Behaviour of the index of periodic points under iterations of mapping*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 55 nr 1 (1991), 3–31.

[BCG] B. Banhelyi, T. Csendes, B. M. Garay, *Optimization and the Miranda approach in detecting horseshoe–type chaos by computer*, Inter. J. Bifurcation and Chaos 17 (2007), 735–747.

[BF] F. Battelli, M. Feĉkan, *Chaos arising near topologically transversal homoclinic set*, Topol. Meth. Nonl. Anal. 20 (2002), 195–215.

[Bo] K. Borsuk, *On an irreducible 2 dimensional absolute retract*, Fund. Math. (1950), 137–160.

[Bo1] K. Borsuk, *On the decomposition of manifolds into products of curves and surfaces*, Fund. Math. 33 (1945), 273–298.

[C] C. C. Conley, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CBMS t. 38, Amer. Math. Soc., Providence, 1978.

[C1] C. C. Conley, *Invariant set which carry a one-form*, J. Diff. Eq. 8 (1970), 587–594.

[CDP] A. Capietto, W. Dambrosio, D. Papini, *Superlinear indefinite equations on the real line and chaotic dynamics*, J. Diff. Eq. 181 (2) (2002), 419–438.

[CE] C. C. Conley, R. Easton, *Isolated invariant sets and isolating blocks*, Trans. AMS 158 (1970), 54–60.

[Ch] R. C. Churchill, *Isolated invariant sets in compact metric spaces*, J. Diff. Eq. 12 (1972), 330–352.

[D] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.

[E] R. Easton, *Flows near isolated invariant sets in dimension 3*, Periodic Orbits, Stability and Resonances, Proc. Sympos., Univ. Sao Paulo, 1969, 332–336.

[En] R. Engelking, *Dimension Theory* North–Holland Mathematical Library, t. 19, North Holland Publishing Company, Amsterdam and New York, Polish Scientific Pulishers, Warszawa, 1978.

[F] F. Frankl, *Über die Zusammenhängenden Mengen von höchstens zweiter Ordnung* Fund. Math. 11 (1928), s. 97.

[GZ] M. Gidea, P. Zgliczyński, *Covering relations for multidimensional dynamical systems*, J. Diff. Eq. 202 (2004), 32–58.

[H] M. W. Hirsch, *Topology of fixed point sets of surface homeomorphisms*, Houston J. Math. 26 (2000), 765–788.

[JM] J. Jezierski, W. Marzantowicz, *Homotopy methods in topological fixed and periodic point theory*, w: Topological Fixed Point Theory and Its Applications, t. 3, Springer 2005.

[M] M. Mrozek, *The method of topological sections in the rigorous numerics of dynamical systems*, Canadian Applied Mathemathics Quartely 14 (2006), 209–222.

[MW] W. Marzantowicz, K. Wójcik, *Periodic segment implies infinitely many periodic solutions*, Proc. AMS t. 135, nr 8 (2007), 2637–2647.

[MM] K. Mischaikow, M. Mrozek, *Chaos in Lorenz equations: a computer assisted proof*, Bull. AMS 33 (1995), 66–72.

[MM2] K. Mischaikow, M. Mrozek, *Isolating neighbourhoods and chaos*, Japan J. Indust. Appl. Math. 12 (1995), 203–236.

[Mont] J. Montgomery, *Cohomology of isolated invariant sets under perturbation*, J. Diff. Eq. 13 (1973), 257–299.

[MrW] M. Mrozek, K. Wójcik, *Disrete version of a geometric method for detecting chaotic dynamics*, Topology Appl. 152 (2005), 70–82.

[OW1] P. Oprocha, P. Wilczyński, *Distributional chaos via semiconjugacy*, Nonlinearity 20 (2007), 2661–2679.

[OW2] P. Oprocha, P. Wilczyński, *Distributional chaos via isolating segments*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 8 (2007), nr 2, 347–356.

[PW] L. Pieniążek, K. Wójcik, *Complicated dynamics in non–autonomous ODEs*, Univ. Iag. Acta Math. XLI (2003), 163–179.

[PZ] M. Pireddu, F. Zanolin, *Cutting surfaces and applications to periodic points and chaotic–like dynamics*, Topol. Meth. Nonl. Anal. 30 (2007), 271–320.

[PZ1] D. Papini, F. Zanolin, *Some results on periodic points and chaotic dynamics arising from the study of the Nonlinaer Hill Equation*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 65 (2007), 115–157.

[PZ2] D. Papini, F. Zanolin, *Fixed points, periodic points and coin–tossing sequences for mapping defined on two–dimensional cells*, Fixed Point Theory and Appl. 2 (2004), 113–134.

[Ra] T. Radó, *Über der Begriff der Riemanschen Fläche* Acta Litt. Sci. Szeged 2 (1925), 101–121.

[RS] F. R. Ruiz del Portal, J. M. Salazar, *Fixed point index of iterations of local homeomorphisms of the plane: a Conley index approach*, Topology 41 (2002), 1199–1212.

[Ru] L. Ruchała, *O blokach izolujących będących ENR-ami*, praca magisterska, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 2000.

[S] R. Srzednicki, *On rest points of dynamical systems*, Fund. Math. 126 (1985), 69–81.

[S1] R. Srzednicki, *Periodic and bounded solutions in blocks for time–periodic nonautonomous ordinary differential equations*, Nonlinear Anal. TMA t. 22 (1994), 707–737.

[S2] R. Srzednicki, *Ważewski method and the Conley index*, w: *Handbook of Differential Equations* t. 1, wyd. przez: A. Canada, P. Drabek, A. Fonda, Elsevier 2004, 591–684.

[S3] R. Srzednicki, *On solutions of two–point boundary value problems inside isolating segments*, Topol. Meth. Nonl. Anal. 13 (1999), 73–89.

[Sp] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw–Hill, New York–Toronto–London (1966).

[SS] M. Shub, P. Sullivan, *A remark on the Lefschetz fixed point formula for differentiable maps*, Topology 13 (1974), 189–191.

[ST] Zhi–Wei Sun, R. Tauraso, *Congruences for sums of binomial coefficients*, Journal of Number Theory 126 (2007), 287–296.

[SW] R. Srzednicki, K. Wójcik, *A geometric method for detecting chaotic dynamics*, J. Diff. Eq. 135 (1997), 66–82.

[SWZ] R. Srzednicki, K. Wójcik, P. Zgliczyński, *Fixed point results based on Ważewski method*, w: R. Brown, M. Furi, L. Górniewicz, B. Jiang, *Handbook of topological fixed point theory*, Kluwer 2004, 903–941.

[W] K. Wójcik, *On detecting periodic solutions and chaos in the time periodically forced ODE's*, Nonlinear Anal. TMA 45 (2001), 19–27.

[Wa] T. Ważewski, *Sur un principe topologique pour l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), 279–313.

[WG] K. Wójcik, A. Gierzkiewicz, *On the cohomology of isolating block and its invariant part* Top. Meth. Nonl. Anal. t. 32 (2008), 313–326.

[WY] F. W. Wilson, J. A. Yorke, *Lyapunov functions and isolating blocks*, J. Diff. Eq. 13 (1973), 106–123.

[WZ] K. Wójcik, P. Zgliczyński, *Isolating segments, fixed point index and symbolic dynamics*, J. Diff. Eq. 161 (2000), 245–288.