

Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki

Artur Płaneta

PORZĄDEK SPEKTRALNY DLA UKŁADÓW OPERATORÓW

Rozprawa doktorska

Promotor
prof. dr hab. Jan Stochel

Kraków 2010

Podziękowania

Pragnę złożyć serdeczne podziękowania Panu Profesorowi dr hab. Janowi Stochelowi za życzliwość, poświęcony czas oraz pomoc podczas pisania pracy. Chciałbym również podziękować Panu Profesorowi dr hab. Franciszkowi Hugonowi Szafrącowi oraz Panu Profesorowi dr hab. Janowi Janasowi za możliwość przedstawienia wyników zawartych w tej rozprawie na prowadzonych przez nich seminariach: „Teoria operatorów” i „Seminarium z przestrzeni Hilberta”.

W tym miejscu pragnę jeszcze złożyć podziękowania dr hab. Markowi Koškowi, dr Dariuszowi Cichoniowi oraz dr Zenonowi Jabłońskiemu za wszelką udzieloną mi pomoc w trakcie studiów.

Praca została częściowo sfinansowana z grantu promotorskiego MNiSW N N201 526638.

Spis treści

Rozdział 1. Przedmowa	3
Rozdział 2. Preliminaria	5
2.1. Wstęp	5
2.2. Nierówności całkowe dla przedziałów ograniczonych	8
2.3. Nierówności całkowe na \mathbb{R}	11
Rozdział 3. Porządek spektralny	14
3.1. Rzuty ortogonalne a algebry von Neumanna	14
3.2. Rozszerzenie definicji porządku Olsona	15
3.3. Porządek spektralny pośród operatorów samosprężonych	18
3.4. Porządek spektralny a operatory samosprężone dodatnie	22
3.5. Przykład	26
3.6. Pewna metoda redukcji do przypadku ograniczonych operatorów samosprężonych	28
3.7. Związki z istotną samosprężonością	33
Rozdział 4. Wielowymiarowy porządek spektralny	36
4.1. Zbiory ćwiartkowe i funkcje oddzielnie rosnące	36
4.2. Regularność miar spektralnych	38
4.3. Nierówności całkowe na \mathbb{R}^k	39
4.4. Wielowymiarowy porządek spektralny	42
4.5. Jednomiany a wielowymiarowy porządek spektralny	50
4.6. Wektory ograniczone układów operatorów	57
4.7. Wielowymiarowy porządek spektralny dla spektralnie przemiennej układów operatorów samosprężonych dodatnich	63
Rozdział 5. Aneks	69
5.1. Granica	69
Indeks	71
Bibliografia	72

ROZDZIAŁ 1

Przedmowa

Porządek spektralny został zdefiniowany przez M. P. Olsona w roku 1971 dla ograniczonych operatorów samosprzężonych. Jedną z głównych motywacji poszukiwania tego porządku była słabość klasycznego porządku (zdefiniowanego za pomocą form kwadratowych) polegająca na braku fundamentalnych własności kratowych (Sherman 1951, Kadison 1951). Jak wykazał Kadison, zbiór $\mathbf{B}_S(\mathcal{H})$ wszystkich ograniczonych operatorów samosprzężonych na zespolonej przestrzeni Hilberta \mathcal{H} jest antykratą, co oznacza, że dla dowolnych $A, B \in \mathbf{B}_S(\mathcal{H})$ istnienie kresu dolnego A i B względem zwykłego porządku „ \leq ” w $\mathbf{B}_S(\mathcal{H})$ (zob. (2.1.2)) jest równoważna temu, że A i B są porównywalne (zob. [9, twierdzenie 6]). Nieco wcześniej, Sherman udowodnił, że jeśli zbiór samosprzężonych elementów C^* -algebry \mathcal{A} ograniczonych operatorów na \mathcal{H} jest kratą względem porządku „ \leq ”, to \mathcal{A} jest przemienna (zob. [28, twierdzenie 1 i 2]). Porządek znaleziony przez Olsona jest silniejszy niż klasyczny i posiada żądane własności kratowe. Sam Olson w swojej pracy udowodnił, że zbiór wszystkich samosprzężonych elementów algebry von Neumanna ograniczonych operatorów liniowych na \mathcal{H} jest kratą warunkowo zupełną względem porządku spektralnego (zob. [21, twierdzenie 1]). To w szczególności oznacza, że dla każdego skończonego zbioru ograniczonych operatorów samosprzężonych na \mathcal{H} istnieje kres górny względem porządku „ \preceq ”. Jawny wzór został podany przez Kato w [11]. Ceną jako płacimy stosując porządek spektralny jest to, że nie jest on wektorowy (zob. [21]).

Celem niniejszej rozprawy doktorskiej jest przeniesienie porządku spektralnego na grunt nieograniczonych operatorów samosprzężonych, a następnie skończonych układów operatorów samosprzężonych. Pierwszemu z zagadnień poświęcony jest w głównej mierze rozdział 3. Jak zostało pokazane wiele własności porządku spektralnego przenosi się in extenso na ten grunt. Są jednak istotne różnice, mianowicie bez dodatkowych założeń nie można znaleźć sensownych relacji pomiędzy dziedzinami operatorów które są porównywalne w sensie porządku spektralnego (zob. przykłady 3.3.4 i 3.3.5). Okazuje się jednak, że naturalne inkluzje dziedzin zachodzą o ile tylko porównujemy operatory samosprężone i półograniczone z dołu. Porządek spektralny w przypadku operatorów ograniczonych charakteryzuje się za pomocą klasycznego o ile ten ostatni zachodzi dla wszystkich potęg porównywanych operatorów. Jak

się okazuje dla każdej liczby naturalnej k można znaleźć przykład dwóch macierzy skalarnych 2 na 2 których wszystkie potęgi od 0 do k są klasycznie porównywalne natomiast nie są porównywalne w sensie porządku spektralnego. Okazuje się, że dwa dodatnie operatory samosprężone są porównywalne w sensie porządku spektralnego wtedy i tylko wtedy, gdy nieskończenie wiele potęg tych operatorów jest porównywalna klasycznie (jest to *novum* także w przypadku operatorów ograniczonych). Wynik ten jest konsekwencją znacznie ogólniejszego kryterium (zob. twierdzenie 3.4.5 i wnioski 3.4.7). Warto tutaj nadmienić, że charakteryzacja ta jest interesująca niezależnie od samego porządku spektralnego.

Rozdział 4 traktuje o drugim z zagadnień czyli o porządku spektralnym dla skończonych układów operatorów samosprężonych. O operatorach tworzących każdy z porównywanych układów zakłada się, że są spektralnie przemienne, natomiast same układy nie muszą być przemienne między sobą. W badaniach nad wielowymiarowym porządkiem spektralnym koncentrujemy się na kilku kwestiach. Pierwszą z nich jest odpowiedź na pytanie, w jakiej sytuacji rachunek operatorowy Stone'a-von Neumanna zachowuje wielowymiarowy porządek spektralny. Problem ten dyskutowany jest w podrozdziale 4.4. Wnioskiem z otrzymanych rezultatów jest opis nowych sytuacji, w których porządek spektralny w przypadku pojedynczych operatorów posiada cechy porządku wektorowego.

Drugim z problemów jest znalezienie związków pomiędzy dziedzinami jednomianów układów, które są porównywalne w sensie wielowymiarowego porządku spektralnego (zob. twierdzenie 4.5.2).

W kontekście charakteryzacji porządku spektralnego za pomocą potęg operatorów, o której wspominałem powyżej w przypadku pojedynczych operatorów, interesującym zagadnieniem stają się związki pomiędzy wielowymiarowym porządkiem spektralnym a porządkiem zadany za pomocą form kwadratowych (zwłaszcza z uwzględnieniem potęg porównywanych operatorów). Tą kwestię rozpatrujemy w podrozdziale 4.7.

Jednym z głównych narzędzi badawczych stosowanych w tej pracy jest wspólna miara spektralna układu spektralnie przemiennych operatorów samosprężonych (zob. [2]). Duże znaczenie zwłaszcza w przypadku dodatnich operatorów samosprężonych odgrywają zależności pomiędzy wspólną miarą spektralną układu a wektorami ograniczonymi układu. Istotną rolę odgrywają też nierówności całkowe dla funkcji rosnących. W przypadku funkcji wielu zmiennych pojęcie monotoniczności jest zastąpione przez oddzielną monotoniczność. W odróżnieniu od monotoniczności w przypadku jednej zmiennej, która automatycznie gwarantuje borelowskość rozważanych funkcji, oddzielna tego nie czyni.

ROZDZIAŁ 2

Preliminaria

2.1. Wstęp

Symbole \mathbb{N} , \mathbb{N}_* , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} i \mathbb{C} będą oznaczać odpowiednio zbiór liczb całkowitych nieujemnych, zbiór liczb całkowitych dodatnich, zbiór liczb całkowitych, ciało liczb wymiernych, ciało liczb rzeczywistych oraz ciało liczb zespolonych. Pod pojęciem rozszerzonego zbioru liczb rzeczywistych rozumiemy zbiór $\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Przez χ_σ będziemy oznaczać funkcję charakterystyczną zbioru σ (dziedzina funkcji χ_σ będzie zależna od sytuacji, w której się pojawi).

Jeśli X jest przestrzenią topologiczną, to przez $\mathfrak{B}(X)$ oznaczamy rodzinę wszystkich zbiorów borelowskich na X . Jeśli $Y \subset X$ jest wyposażony w topologię indukowaną z X , to

$$(2.1.1) \quad \mathfrak{B}(Y) = \mathfrak{B}(X) \cap Y := \{\sigma \cap Y : \sigma \in \mathfrak{B}(X)\}.$$

2.1.1. Porządki. Kluczowym pojęciem tej pracy jest porządek. Z tego względu oraz dla wygody czytelnika przypomnimy podstawową terminologię dotyczącą zbiorów uporządkowanych.

DEFINICJA 2.1.1. Relację $\prec \subset X \times X$ nazywamy relacją porządkującą zbiór X lub porządkiem na X jeśli \prec jest zwrotna, przechodnia oraz antysymetryczna tzn. spełnione są własności:

- (i) $x \prec x$ dla każdego $x \in X$,
- (ii) dla dowolnych $x, y, z \in X$ jeśli $x \prec y$ oraz $y \prec z$, to $x \prec z$,
- (iii) dla dowolnych $x, y \in X$ jeśli $x \prec y$ oraz $y \prec x$, to $x = y$.

Mówimy, że zbiór uporządkowany (X, \prec) jest krata, jeśli dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje $\sup\{x, y\}$ oraz $\inf\{x, y\}$. Zbiór uporządkowany (X, \prec) nazywamy kratą warunkowo zupełną, gdy dowolny niepusty i ograniczony¹ podzbiór X posiada kres dolny i kres górny.

Jeśli rozważamy rzeczywistą przestrzeń wektorową X , to na szczególną uwagę zasługują te porządki na X , które są zgodne ze strukturą przestrzeni wektorowej tzn. dla dowolnych $x, y, z \in X$ oraz dla dowolnej liczby rzeczywistej $\lambda \geq 0$ spełnione są następujące warunki:

- (i) jeśli $x \prec y$, to $x + z \prec y + z$,
- (ii) jeśli $0 \prec x$, to $0 \prec \lambda x$.

¹Zbiór $Y \subset X$ nazywamy ograniczonym, gdy zbiór minorant Y i zbiór majorant Y są niepuste.

Wówczas przestrzeń (X, \prec) określa się mianem uporządkowanej przestrzeni wektorowej.

Mówimy, że uporządkowana przestrzeń wektorowa X jest antykratą, gdy dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi równoważność

$$\text{istnieje } \inf\{x, y\} \Leftrightarrow x \text{ i } y \text{ są porównywalne.}$$

Nietrudno wykazać, że uporządkowana przestrzeń wektorowa X jest antykratą wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, y \in X$ spełniony jest poniższy warunek

$$\text{istnieje } \sup\{x, y\} \Leftrightarrow x \text{ i } y \text{ są porównywalne.}$$

Przykładem uporządkowanej przestrzeni wektorowej jest $(\mathbf{B}_S(\mathcal{H}), \leq)$ -przeźrzeń wszystkich ograniczonych samosprężonych operatorów na zespolonej przestrzeni Hilberta \mathcal{H} z porządkiem zdefiniowanym za pomocą warunku (2.1.2).

2.1.2. Operator. Symbol \mathcal{H} jest rezerwowany dla zespolonej przestrzeni Hilberta. Przez *operator* w \mathcal{H} rozumiemy liniowe odwzorowanie $A: \mathcal{H} \supseteq \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ zdefiniowane na podprzestrzeni wektorowej $\mathcal{D}(A)$ przestrzeni \mathcal{H} , którą nazywa się *dziedziną* A ; $\mathcal{N}(A)$ i $\mathcal{R}(A)$ będą oznaczać odpowiednio *jądro* i *obraz* A . Symbol \bar{A} będzie używany na oznaczenie domknięcia operatora domykającego A . Odnotujmy w tym miejscu również, że podprzestrzeń wektorowa \mathcal{E} przestrzeni $\mathcal{D}(A)$ nazywamy *rdzeniem* operatora A jeśli wykres A jest zawarty w domknięciu wykresu $A|_{\mathcal{E}}$ - obcięcia operatora A do \mathcal{E} . W szczególności, jeśli A jest domknięty i \mathcal{E} jest rdzeniem A , to wektor $h \in \mathcal{H}$ należy do $\mathcal{D}(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$ taki, że h_n dąży do h i $\{Ah_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Jeśli A i B są operatorami w \mathcal{H} , to piszemy $A \subset B$, gdy $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ oraz $Ah = Bh$ dla każdego $h \in \mathcal{D}(A)$.

Niech A będzie operatorem w \mathcal{H} . Kładziemy $\mathcal{D}^{\infty}(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ oraz

$$\mathcal{B}_a(A) = \bigcup_{\substack{c \in \mathbb{R} \\ c > 0}} \bigcap_{n=0}^{\infty} \{h \in \mathcal{D}^{\infty}(A) : \|A^n h\| \leq ca^n\}$$

dla każdej liczby rzeczywistej $a \geq 0$. Każdy element zbioru $\mathcal{B}(A) := \bigcup_{a>0} \mathcal{B}_a(A)$ nazywamy *wektorem ograniczonym* A (zob. [4]). Powiemy, że wektor $h \in \mathcal{D}^{\infty}(A)$ jest *wektorem analitycznym* A , jeśli istnieje liczba rzeczywista $t > 0$ taka, że $\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n h\| t^n / n! < \infty$ (zob. [17]), *wektorem quasi-analitycznym* A , gdy $\sum_{n=1}^{\infty} \|A^n h\|^{-1/n} = \infty$ z konwencją, że $1/0 = \infty$ (zob. [19]), i *wektorem stieljesowskim* A , jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} \|A^n h\|^{-1/2n} = \infty$ (zob. [20]). Zbiory wektorów analitycznych, quasi-analitycznych i stieljesowskich operatora A będziemy oznaczać odpowiednio przez $\mathcal{A}(A)$, $\mathcal{Q}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$. Zwróćmy uwagę, że $\mathcal{B}(A) \subseteq \mathcal{A}(A) \subseteq \mathcal{Q}(A) \subseteq \mathcal{S}(A)$

(każda z inkluzji może być silna). Zbiory $\mathcal{B}(A)$ i $\mathcal{A}(A)$ są podprzestrzeniami wektorowymi $\mathcal{D}^\infty(A)$. Jednakże, w ogólnej sytuacji, zbiory $\mathcal{Q}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ nie muszą być podprzestrzeniami wektorowymi $\mathcal{D}^\infty(A)$ (por. [25, 26]).

Przez $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ oznaczmy C^* -algebrę wszystkich ograniczonych operatorów A w \mathcal{H} z dziedziną $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$. Niech $I = I_{\mathcal{H}}$ oznacza operator identycznościowy na \mathcal{H} . Dla danych operatorów samosprzężonych $A, B \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$, będziemy pisać $A \leq B$ jeśli

$$(2.1.2) \quad \langle Ah, h \rangle \leq \langle Bh, h \rangle, \quad h \in \mathcal{H}.$$

Powiemy, że operator A w \mathcal{H} jest ograniczony od dołu przez liczbę $a \in \mathbb{R}$, jeśli

$$a\|h\|^2 \leq \langle Ah, h \rangle, \quad h \in \mathcal{D}(A).$$

Każdy operator A w \mathcal{H} , dla którego istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$ taka, że A jest ograniczony od dołu przez liczbę $a \in \mathbb{R}$, będziemy nazywać ograniczonym od dołu.

Gęsto określony operator A w \mathcal{H} nazywa się *symetrycznym* jeśli jego sprzężenie A^* jest rozszerzeniem A , a *dodatnim* jeśli $\langle Ah, h \rangle \geq 0$ dla wszystkich $h \in \mathcal{D}(A)$. Powiemy, że operator A w \mathcal{H} jest *samosprzężony*, gdy $A = A^*$, i *istotnie samosprzężony* jeśli A^* jest równe domknięciu A .

Wektory ograniczone okazują się być użyteczne zwłaszcza w kontekście istotnej samosprzężoności potęg operatorów symetrycznych (co wyróżnia zbiór wektorów ograniczonych od pozostałych rodzin wektorów klasy C^∞ wprowadzonych powyżej²).

PROPOZYCJA 2.1.2. *Jeśli A jest operatorem symetrycznym w \mathcal{H} takim, że $\mathcal{B}(A)$ jest gęsty w \mathcal{H} , to dla każdej liczby całkowitej $k \geq 1$ operator $A^k|_{\mathcal{B}(A)}$ jest istotnie samosprzężony oraz*

$$(2.1.3) \quad \overline{A^k|_{\mathcal{B}(A)}} = \overline{A^k} = \bar{A}^k.$$

DOWÓD. Ponieważ operator A^k jest symetryczny, to $A^k|_{\mathcal{B}(A)}$, restrykcja A^k do swojej podprzestrzeni niezmienniczej $\mathcal{B}(A)$, jest również symetryczny. Skoro $\mathcal{B}(A^k) = \mathcal{B}(A)$ (inkluzja “ \supseteq ” jest oczywista podczas gdy inkluzję “ \subseteq ” można wywnioskować z [30, lematu 8 (b)]) i $\mathcal{B}(A)$ jest gęsty w \mathcal{H} , to $A^k|_{\mathcal{B}(A)}$ jest istotnie samosprzężony (por. [4, strona 99] lub [12, Lemat 4]). Inkluzja $A^k|_{\mathcal{B}(A)} \subseteq A^k$ wraz z maksymalnością operatora samosprzężonego $\overline{A^k|_{\mathcal{B}(A)}}$ daje pierwszą z równości w (2.1.3). Stosując to dla $k = 1$, widzimy, że $\overline{A|_{\mathcal{B}(A)}} = \bar{A}$ oraz operator \bar{A} jest samosprzężony. Stąd również operator \bar{A}^k jest samosprzężony (por. [2, podrozdział 6.1.4]). Stąd w szczególności wynika, że $\overline{A^k|_{\mathcal{B}(A)}} \subseteq \bar{A}^k$. Dzięki maksymalności $\overline{A^k|_{\mathcal{B}(A)}}$ ostatnia inkluzja staje się równością. \square

²Wektor $f \in \mathcal{H}$ określamy mianem wektora klasy C^∞ dla operatora A jeśli $f \in \mathcal{D}^\infty(A)$.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz niech E będzie miarą spektralną na $\mathfrak{B}(X)$. Wówczas przez $S(X, E)$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji borelowskich $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ takich, że $E(f^{-1}(\{-\infty, \infty\})) = 0$.

Niech A będzie operatorem samosprzężonym w \mathcal{H} z miarą E . Dla danej funkcji borelowskiej $\varphi \in S(\mathbb{R}, E_A)$ definiujemy

$$\varphi(A) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) E(dx).$$

Operator $\varphi(A)$ jest samosprzężony. Co więcej, jeśli $\varphi \geq 0$, to $\varphi(A)$ jest dodatni. Więcej informacji dotyczących rachunku operatorowego Stone'a-von Neumanna odnaleźć można w monografiach [2, 35]. Dla danej liczby rzeczywistej $s \geq 0$ i dodatniego operatora samosprzężonego A w \mathcal{H} kładziemy $A^s = \varphi_s(A)$ gdzie $\varphi_s(x) = |x|^s \chi_{[0, \infty)}(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ (używamy konwencji w której $0^0 = 1$). Ta definicja zgadza się ze zwykłą definicją dla nieujemnych liczb całkowitych s . Jeśli A i B są dodatnimi operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} takimi, że $\mathcal{D}(B^{1/2}) \subseteq \mathcal{D}(A^{1/2})$ i $\|A^{1/2}h\| \leq \|B^{1/2}h\|$ dla wszystkich $h \in \mathcal{D}(B^{1/2})$, to piszemy $A \leq B$ (por. [11]). Łatwo zauważyć, że definicja ta jest zgodna z podaną wcześniej definicją porządku „ \leq ” dla operatorów ograniczonych na \mathcal{H} .

2.2. Nierówności całkowe dla przedziałów ograniczonych

Inspiracją dla rozważań tego podrozdziału jest twierdzenie 107 z [8] (które w istocie jest konsekwencją twierdzenia 2.2.1 poniżej) jak również pewne nierówności, które pojawiają się w [21]. Będziemy pisali $\text{supp } \mu$ na oznaczenie domkniętego nośnika skończonej nieujemnej miary borelowskiej μ na \mathbb{R} (pojęcie nośnika ma sens, gdyż każda taka miara jest automatycznie regularna, zob. np., [23, twierdzenie 2.18]).

TWIERDZENIE 2.2.1. *Niech $[a, b]$ będzie ograniczonym i domkniętym przedziałem w \mathbb{R} , gdzie $a < b$, i niech μ_1 oraz μ_2 będą skończonymi dodatnimi miarami borelowskimi na \mathbb{R} takimi, że $\text{supp } \mu_j \subseteq [a, b]$ dla $j = 1, 2$. Połóżmy $F_j(x) = \mu_j((-\infty, x])$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $j = 1, 2$. Rozważmy następujące trzy warunki:*

- (i) $F_2(x) \leq F_1(x)$ dla wszystkich $x \in (a, b)$,
- (ii) $\int_{[a, b]} f d\mu_1 \leq \int_{[a, b]} f d\mu_2$ dla każdej funkcji rosnącej $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$,
- (iii) $\int_{[a, b]} f d\mu_1 \leq \int_{[a, b]} f d\mu_2$ dla każdej funkcji rosnącej $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Jeśli (ii) zachodzi, to $F_1(b) \leq F_2(b)$. Jeśli $F_1(b) \leq F_2(b)$, to (i) implikuje (ii). Jeżeli (iii) zachodzi, to $F_1(b) = F_2(b)$. Jeśli $F_1(b) = F_2(b)$, to wszystkie warunki (i), (ii) oraz (iii) są równoważne.

DOWÓD. Podstawiając $f \equiv 1$, zobaczymy, że warunek (ii) implikuje nierówność $F_1(b) \leq F_2(b)$. Natomiast jeśli rozważymy $f \equiv \pm 1$, to z warunku (iii) otrzymamy równość $F_1(b) = F_2(b)$.

Założmy teraz, że $F_1(b) \leq F_2(b)$.

(i) \Rightarrow (ii) Na początku rozważmy przypadek, gdy $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ jest funkcją rosnącą i ciągłą. Niech $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ będzie podziałem przedziału $[a, b]$. Połóżmy $g = f(t_0)\chi_{\{t_0\}} + \sum_{j=1}^n f(t_{j-1})\chi_{(t_{j-1}, t_j]}$. Ponieważ f jest nieujemna i rosnąca, to

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} g d\mu_1 &= f(a)F_1(a) + \sum_{j=1}^n f(t_{j-1})(F_1(t_j) - F_1(t_{j-1})) \\ &= f(a)F_1(a) + \sum_{j=1}^n f(t_{j-1})F_1(t_j) - \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)F_1(t_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (f(t_{j-1}) - f(t_j))F_1(t_j) + f(t_{n-1})F_1(b) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1} (f(t_{j-1}) - f(t_j))F_2(t_j) + f(t_{n-1})F_2(b) \\ &= \int_{[a,b]} g d\mu_2. \end{aligned}$$

Z jednostajnej ciągłości funkcji ciągłych na $[a, b]$ wynika, że funkcja f może być aproksymowana jednostajnie funkcjami postaci g na przedziale $[a, b]$. Stąd natychmiast otrzymujemy nierówność $\int_{[a,b]} f d\mu_1 \leq \int_{[a,b]} f d\mu_2$.

Niech teraz $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ będzie dowolną funkcją rosnącą. Bez straty ogólności możemy założyć, że f nie jest funkcją stałą. W przeciwnym razie nierówność wynika natychmiast z założenia $F_1(b) \leq F_2(b)$. Skoro f jest rosnąca, to $f(a) < f(b)$. Z warunku (i) i prawostronnej ciągłości F_j w punkcie a wynika, że

$$(2.2.1) \quad F_2(x) \leq F_1(x), \quad x \in [a, b].$$

Dla $j = 1, 2$ zdefiniujmy skończone nieujemne miary borelowskie $\tilde{\mu}_j$ na \mathbb{R} wzorem $\tilde{\mu}_j(\sigma) := \mu_j(f^{-1}(\sigma))$ dla każdego $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Ponieważ f jest rosnąca, to $f([a, b]) \subseteq [f(a), f(b)]$. Tym samym $\text{supp } \tilde{\mu}_j \subseteq [f(a), f(b)]$. Niech $\tilde{F}_j(y) := \tilde{\mu}_j((-\infty, y])$ dla $y \in \mathbb{R}$.

Weźmy $y \in [f(a), f(b))$. Ponieważ $a \in f^{-1}([f(a), y])$, możemy zdefiniować

$$y_f = \sup f^{-1}([f(a), y]) \in [a, b].$$

Stąd dzięki temu, że f jest rosnąca wynika, że

$$[a, y_f] \subseteq f^{-1}([f(a), y]) \subseteq [a, y_f].$$

Jeśli $f^{-1}([f(a), y]) = [a, y_f]$, to $y_f < b$ i $\tilde{F}_j(y) = \mu_j(f^{-1}([f(a), y])) = F_j(y_f)$. To wraz (2.2.1), implikuje, że $\tilde{F}_2(y) \leq \tilde{F}_1(y)$. Z kolei, jeśli $f^{-1}([f(a), y]) = [a, y_f)$, to $y_f > a$ i $\tilde{F}_j(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_j(y_f - \frac{1}{n})$, co daje

nierówność $\tilde{F}_2(y) \leq \tilde{F}_1(y)$. W rezultacie dostajemy, że $\tilde{F}_2(y) \leq \tilde{F}_1(y)$ dla każdego $y \in [f(a), f(b)]$, i

$$\tilde{F}_1(f(b)) = F_1(b) \leq F_2(b) = \tilde{F}_2(f(b)).$$

Stosując twierdzenie o transporcie miary ([7, twierdzenie C, str. 163]) i wyniki poprzedniego paragrafu do przedziału $[f(a), f(b)]$ i miar $\tilde{\mu}_1$ oraz $\tilde{\mu}_2$ otrzymujemy

$$\int_{[a,b]} f d\mu_1 = \int_{[f(a),f(b)]} x \tilde{\mu}_1(dx) \leq \int_{[f(a),f(b)]} x \tilde{\mu}_2(dx) = \int_{[a,b]} f d\mu_2.$$

Założmy na koniec, że $F_1(b) = F_2(b)$.

(i) \Rightarrow (iii) Rozumujemy analogicznie jak w implikacji (i) \Rightarrow (ii).

(iii) \Rightarrow (ii) Oczywiste.

(ii) \Rightarrow (i) Ustalmy $x \in (a, b)$. Oczywiście $f = \chi_{(x,b]}$ jest funkcją rosnącą na $[a, b]$. Stąd i z założenia wynika, że

$$F_1(b) - F_1(x) = \mu_1((x, b]) \stackrel{(ii)}{\leq} \mu_2((x, b]) = F_2(b) - F_2(x),$$

co wraz z równością $F_1(b) = F_2(b)$ implikuje, że $F_2(x) \leq F_1(x)$. To kończy dowód. \square

Poniższy przykład pokazuje, że warunek $F_1(b) < F_2(b)$ na ogół nie gwarantuje prawdziwości implikacji (ii) \Rightarrow (i) w twierdzeniu 2.2.1 (pomimo, że implikacja odwrotna jest prawdziwa).

PRZYKŁAD 2.2.2. Niech $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ i β_2 będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $\alpha_1 \leq \beta_1 < \alpha_2 \leq \beta_2$ i $(\beta_2 - \alpha_2) - (\beta_1 - \alpha_1) > 0$. Kładziemy $\mu_j = \alpha_j \delta_a + (\beta_j - \alpha_j) \delta_b$ dla $j = 1, 2$, gdzie δ_a i δ_b są miarami Diraca określonymi na $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Oczywiście

$$F_1(x) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{dla } a \leq x < b, \\ \beta_1 & \text{dla } x = b, \end{cases} \quad \text{i} \quad F_2(x) = \begin{cases} \alpha_2 & \text{dla } a \leq x < b, \\ \beta_2 & \text{dla } x = b. \end{cases}$$

Jeśli $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ jest funkcją borelowską, to

$$f(a)(\alpha_1 - \alpha_2) \leq 0 \leq f(b)((\beta_2 - \alpha_2) - (\beta_1 - \alpha_1)),$$

co pociąga za sobą, że

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f d\mu_1 &= f(a)\alpha_1 + f(b)(\beta_1 - \alpha_1) \\ &\leq f(a)\alpha_2 + f(b)(\beta_2 - \alpha_2) = \int_{[a,b]} f d\mu_2. \end{aligned}$$

W szczególności oznacza to, że warunek (ii) zachodzi. Jednak pomimo tego $F_1(x) < F_2(x)$ dla wszystkich $x \in [a, b]$.

2.3. Nierówności całkowe na \mathbb{R}

Zajmiemy się teraz odpowiednikiem twierdzenia 2.2.1 dla miar zdefiniowanych na całej prostej rzeczywistej.

TWIERDZENIE 2.3.1. *Niech μ_1 i μ_2 będą skończonymi nieujemnymi miarami borelowskimi na \mathbb{R} . Rozważmy następujące trzy warunki:*

- (i) $\mu_2((-\infty, x]) \leq \mu_1((-\infty, x])$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$,
- (ii) $\int_{\mathbb{R}} f d\mu_1 \leq \int_{\mathbb{R}} f d\mu_2$ dla każdej funkcji rosnącej $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$,
- (iii) $\int_{\mathbb{R}} f d\mu_1 \leq \int_{\mathbb{R}} f d\mu_2$ dla każdej funkcji rosnącej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że $\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu_2 < \infty$ (całka $\int_{\mathbb{R}} f d\mu_1$ może być równa $-\infty$).

Jeśli warunek (i) (odpowiednio : (ii), (iii)) zachodzi, to $\mu_2(\mathbb{R}) \leq \mu_1(\mathbb{R})$ (odpowiednio: $\mu_1(\mathbb{R}) \leq \mu_2(\mathbb{R})$, $\mu_1(\mathbb{R}) = \mu_2(\mathbb{R})$). Jeśli $\mu_1(\mathbb{R}) \leq \mu_2(\mathbb{R})$ oraz warunek (i) jest spełniony, to $\mu_1(\mathbb{R}) = \mu_2(\mathbb{R})$. Jeśli $\mu_1(\mathbb{R}) = \mu_2(\mathbb{R})$, to wszystkie warunki (i), (ii) i (iii) są równoważne.

DOWÓD. W rozszerzonym zbiorze liczb rzeczywistych rozważmy standardową topologię, z którą $\overline{\mathbb{R}}$ stanowi przestrzeń topologiczną zwartą. Dla $j = 1, 2$ rozszerzamy miary μ_j do skończonych miar borelowskich na $\overline{\mathbb{R}}$ przyjmując $\mu_j(\{\pm\infty\}) = 0$. Rozważmy dowolny rosnący homeomorfizm $\phi: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$ (np., $\phi(x) = x/(1 + |x|)$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $\phi(\pm\infty) = \pm 1$). Zdefiniujemy skończone miary borelowskie ν_1 i ν_2 na $\overline{\mathbb{R}}$ w następujący sposób

$$\nu_j(\sigma) = \mu_j(\phi^{-1}(\sigma)), \quad \sigma \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}), \quad j = 1, 2.$$

Położmy $G_j(x) = \nu_j((-\infty, x])$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $j = 1, 2$. Oczywiście, $\text{supp } \nu_j \subset [-1, 1]$, $G_j(-1) = 0$ i $G_j(1) = G_j(1-) = \mu_j(\mathbb{R})$ dla $j = 1, 2$.

Założmy, że $\mu_1(\mathbb{R}) = \mu_2(\mathbb{R})$ (pozostałe części tezy są oczywiste). Tym samym $G_1(1) = G_2(1)$.

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ograniczoną funkcją rosnącą. Oznaczmy przez f_∞ rozszerzenie f do $\overline{\mathbb{R}}$ dane wzorem $f_\infty(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. Oczywiście f_∞ jest ograniczoną funkcją rosnącą. Stąd funkcja $f_\infty \circ \phi^{-1}$ też jest ograniczona i rosnąca. Z twierdzenia o transporcie miary dostaniemy, że

$$(2.3.1) \quad \int_{\mathbb{R}} f d\mu_j = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f_\infty d\mu_j = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f_\infty \circ \phi^{-1} \circ \phi d\mu_j = \int_{[-1, 1]} f_\infty \circ \phi^{-1} d\nu_j$$

dla $j = 1, 2$. W związku z tym, jeśli warunek (i) zachodzi, to z twierdzenia 2.2.1 otrzymujemy, że

$$(2.3.2) \quad \int_{\mathbb{R}} f d\mu_1 \stackrel{(2.3.1)}{=} \int_{[-1, 1]} f_\infty \circ \phi^{-1} d\nu_1 \leq \int_{[-1, 1]} f_\infty \circ \phi^{-1} d\nu_2 \stackrel{(2.3.1)}{=} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_2$$

dla każdej ograniczonej funkcji rosnącej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) \Rightarrow (ii) Założmy, że $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ jest funkcją rosnącą. Dla $n \in \mathbb{N}_*$ definiujemy funkcję $f_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ wzorem $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$ dla

$x \in \mathbb{R}$. Wówczas funkcje f_n są ograniczonymi funkcjami rosnącymi na \mathbb{R} takimi, że $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej dostaniemy, że

$$(2.3.3) \quad \int_{\mathbb{R}} f d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu_1 \stackrel{(2.3.2)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu_2 = \int_{\mathbb{R}} f d\mu_2.$$

(i) \Rightarrow (iii) Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą taką, że $\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu_2 < \infty$. Funkcja $f_+: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ zdefiniowana wzorem $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest rosnąca oraz $\int_{\mathbb{R}} f_+ d\mu_2 < \infty$. Stąd i z implikacji (i) \Rightarrow (ii) możemy wywnioskować, że $\int_{\mathbb{R}} f_+ d\mu_1 < \infty$. Jeśli $\int_{\mathbb{R}} f d\mu_1 = -\infty$, wówczas nierówność $\int_{\mathbb{R}} f d\mu_1 \leq \int_{\mathbb{R}} f d\mu_2$ jest oczywista. W przeciwnym razie $\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu_1 < \infty$. Dla $n \in \mathbb{N}_*$ rozważmy funkcję $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $f_n(x) = \max\{-n, \min\{f(x), n\}\}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wówczas f_n są funkcjami ograniczonymi i rosnącymi na \mathbb{R} takimi, że $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej otrzymamy (2.3.3).

(iii) \Rightarrow (ii) To jest oczywiste.

(ii) \Rightarrow (i) Podstawiając $f = \chi_{(x, \infty)}$, $x \in \mathbb{R}$, i korzystając z równości $\mu_1(\mathbb{R}) = \mu_2(\mathbb{R})$ otrzymamy (i). To kończy dowód twierdzenia. \square

UWAGA 2.3.2. Twierdzenia 2.2.1 i 2.3.1 pozostają prawdziwe jeśli wyrażenie „funkcja rosnąca” zastąpimy przez ”ograniczona ciągła funkcja rosnąca”. Tylko implikacja (ii) \Rightarrow (i) wymaga dowodu. Rozważmy na początek przypadek twierdzenia 2.2.1. Ustalmy $x \in (a, b)$ i zdefiniujmy dla $n = 1, 2, \dots$ ograniczone ciągłe funkcje rosnące $f_n: [a, b] \rightarrow [0, 1]$ wzorem

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a \leq t \leq x, \\ \frac{n(t-x)}{b-x}, & \text{gdy } x < t \leq x + \frac{1}{n}(b-x), \\ 1 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Z (ii) wynika, że $\int_{[a,b]} f_n d\mu_1 \leq \int_{[a,b]} f_n d\mu_2$ dla wszystkich $n \geq 1$. Ponieważ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny punktowo do $\chi_{(x,b]}$, to z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej otrzymujemy, że

$$F_1(b) - F_1(x) = \mu_1((x, b]) \leq \mu_2((x, b]) = F_2(b) - F_2(x),$$

co wraz z równością $F_1(b) = F_2(b)$ prowadzi do nierówności $F_2(x) \leq F_1(x)$. Przypadek twierdzenia 2.3.1 można uzyskać na mocy podobnego rozumowania.

UWAGA 2.3.3. Przypatrzmy się jeszcze raz warunkowi (iii) z twierdzenia 2.3.1. Rozważmy dwie miary μ_1 i μ_2 (o których zakładamy, że spełniają warunek (i) i równość $\mu_1(\mathbb{R}) = \mu_2(\mathbb{R})$) skupione na przedziale $[a, \infty)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Wówczas $\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu_1 < \infty$ dla każdej funkcji rosnącej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że $\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu_2 < \infty$. Wynika to bezpośrednio z faktu, że $f(x) \geq f(a)$ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}$ względem miary μ_1 .

W tym miejscu warto zauważyć, że warunek (iii) twierdzenia 2.3.1 nie gwarantuje sam z siebie, że $\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu_1 < \infty$ dla funkcji rosnącej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że $\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu_2 < \infty$.

PRZYKŁAD 2.3.4. Niech μ będzie skończoną miarą borelowską na \mathbb{R} daną przez $d\mu(x) = (1+x^2)^{-3/2} dx$. Weźmy ściśle rosnącą funkcją $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{jeśli } x \geq -1 \\ -x^2 & \text{jeśli } x < -1. \end{cases}$$

Oczywiście ϕ jest homeomorfizmem z \mathbb{R} do \mathbb{R} takim, że

$$(2.3.4) \quad \phi(x) \leq x \text{ i } x \leq \phi^{-1}(x) \text{ dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$

Oznaczmy przez $\mu \circ \phi^{-1}$ skończoną nieujemną miarę borelowską na \mathbb{R} daną wzorem $\mu \circ \phi^{-1}(\sigma) = \mu(\phi^{-1}(\sigma))$ dla każdego $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Z bijektywności ϕ oraz nierówności (2.3.4) wynika, że $\mu(\mathbb{R}) = \mu \circ \phi^{-1}(\mathbb{R})$ i

$$\mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, \phi^{-1}(x)]) = \mu \circ \phi^{-1}((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Stąd na mocy twierdzenia 2.3.1 (lub bezpośrednich rachunków z użyciem twierdzenia o transporcie miary) otrzymamy, że $\int_{\mathbb{R}} f d\mu \circ \phi^{-1} \leq \int_{\mathbb{R}} f d\mu$ dla każdej funkcji rosnącej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającej warunek $\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu < \infty$. Tym samym miary $\mu \circ \phi^{-1}$ i μ spełniają warunek (iii). Pomimo tego dla funkcji identycznościowej f na \mathbb{R} mamy, że $\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu < \infty$ oraz $\int_{\mathbb{R}} f d\mu \circ \phi^{-1} = -\infty$.

ROZDZIAŁ 3

Porządek spektralny

3.1. Rzuty ortogonalne a algebry von Neumanna

Rozważmy zbiór uporządkowany $(\mathbf{P}(\mathcal{H}), \leq)$, gdzie $\mathbf{P}(\mathcal{H})$ jest zbiorem wszystkich rzutów ortogonalnych na przestrzeni \mathcal{H} . Warto zwrócić uwagę na fakt, że dla każdej rodziny rzutów ortogonalnych $\mathcal{A} \subset \mathbf{P}(\mathcal{H})$ istnieje kres górny i kres dolny¹. Symbolu $\bigvee \mathcal{A}$ (odpowiednio $\bigwedge \mathcal{A}$) będziemy używali na oznaczenie kresu górnego (odpowiednio kresu dolnego) zbioru \mathcal{A} .

Jeśli $\{M_j\}_{j \in J}$ jest rodziną podzbiorów \mathcal{H} , to $\bigvee_{j \in J} M_j$ będzie oznaczało najmniejszą (w sensie inkluzji) domkniętą podprzestrzeń wektorową \mathcal{H} zawierającą zbiór $\bigcup_{j \in J} M_j$. Z kolei niech $\bigwedge_{j \in J} M_j := \bigcap_{j \in J} M_j$. Jeśli M jest domkniętą podprzestrzenią wektorową przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , to przez P_M oznaczamy rzut ortogonalny na M . Dla każdej rodziny $\mathcal{A} = \{P_{M_j}\}_{j \in J}$, gdzie M_j jest domkniętą podprzestrzenią wektorową \mathcal{H} dla $j \in J$, prawdziwe są równości

$$(3.1.1) \quad \bigvee \mathcal{A} = \bigvee \{P_{M_j}\}_{j \in J} = P_{\bigvee_{j \in J} M_j}$$

oraz

$$(3.1.2) \quad \bigwedge \mathcal{A} = \bigwedge \{P_{M_j}\}_{j \in J} = P_{\bigwedge_{j \in J} M_j}.$$

Jeśli $h \in \mathcal{H}$, to funkcja $p_h: \mathbf{B}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, \infty)$ dana wzorem $p_h(T) := \|Th\|$ dla $T \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ jest półnormą. Zbiór $\{p_h: h \in \mathcal{H}\}$ zadaje na przestrzeni $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ topologię lokalnie wypukłą, którą nazywamy silną topologią operatorową. Można wykazać, że ciąg uogólniony $\{T_j\}$, gdzie $T_j \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ jest silnie zbieżny do $T \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $h \in \mathcal{H}$ ciąg uogólniony $\{\|(T_j - T)h\|\}$ jest zbieżny do 0. Do oznaczenia granicy funkcji o wartościach w $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ z silną topologią operatorową będziemy używali symbolu $s - \lim$.

Zbiór $\mathcal{V} \subset \mathbf{B}(\mathcal{H})$ nazywamy algebrą von Neumanna, jeśli \mathcal{V} jest zespoloną $*$ -algebrą domkniętą w silnej topologii operatorowej. W dalszym ciągu będziemy zawsze zakładali, że $I \in \mathcal{V}$. Poniższa propozycja opisuje ważną własność rodziny rzutów ortogonalnych zawartych w algebrze von Neumanna.

¹Jeśli $\mathcal{A} = \emptyset$, to kres górny (odpowiednio kres dolny) jest równy 0 (odpowiednio I).

PROPOZYCJA 3.1.1. Niech $\mathcal{V} \subset \mathbf{B}(\mathcal{H})$ będzie algebrą von Neumanna. Wówczas $\bigwedge_{j \in J} E_j, \bigvee_{j \in J} E_j \in \mathbf{P}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{V}$ dla dowolnej rodziny $\{E_j\}_{j \in J} \subset \mathbf{P}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{V}$.

Warto również zwrócić w tym miejscu uwagę na następujący fakt.

STWIERDZENIE 3.1.2. Niech $\mathcal{V} \subset \mathbf{B}(\mathcal{H})$ będzie algebrą von Neumanna taką, że $I \in \mathcal{V}$. Niech E będzie borelowską miarą spektralną na \mathbb{R} . Jeśli F jest dystrybuantą spektralną taką, że $E((-\infty, x]) = F(x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, to poniższe warunki są równoważne:

- (i) $E(\sigma) \in \mathcal{V}$ dla każdego $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$,
- (ii) $F(x) \in \mathcal{V}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Niech X będzie dowolnym zbiorem. Mówimy, że funkcja $F: X \rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H})$ jest skojarzona z \mathcal{V} , jeżeli $F(X) \subset \mathcal{V}$.

3.2. Rozszerzenie definicji porządku Olsona

Jeśli E jest miarą spektralną samosprzężonego operatora A w \mathcal{H} , to funkcje

$$(3.2.1) \quad F(x) = E((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R},$$

będziemy nazywać *dystrybuantą spektralną*² operatora A . Spektralne dystrybuanty mogą być też zdefiniowane w sposób abstrakcyjny bez odwoływania się do miary spektralnej jako funkcje $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{H})$ spełniające poniższe warunki

- (m) $F(x) \leq F(y)$, gdy $x \leq y$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, (monotoniczność)
- (z) $s - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ i $s - \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = I$, (zupełność)
- (c) $s - \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$ dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}$. (prawostronna ciągłość)

Okazuje się, że zachodzi wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy miarami spektralnymi a dystrybuantami spektralnymi dana równością (3.2.1) (zob. n.p., [2, Rozdział 6]).

Od tej chwili rezerwujemy symbole E_A i F_A odpowiednio dla miary spektralnej i dystrybuanty spektralnej operatora samosprzężonego A .

Mówimy, że operatory samosprzężone A i B w \mathcal{H} są *spektralnie przemienne* jeśli ich miary spektralne są przemienne t.j. $E_A(\sigma)E_B(\tau) = E_B(\tau)E_A(\sigma)$ dla wszystkich $\sigma, \tau \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Wiadomo, że A i B są spektralnie przemienne wtedy i tylko wtedy, gdy $F_A(x)F_B(y) = F_B(y)F_A(x)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ (tą równoważność można wywnioskować z [32, twierdzenie 8.1] oraz [2, twierdzenie 6.3.2]).

²W dawniejszej terminologii używano pojęcia *rozkład identyczności* (por. [2]).

Poniższa propozycja 3.2.1, która jest szczególnym przypadkiem [31, propozycja 4] (patrz również [13, 6, 12]), opisuje zależności pomiędzy wektorami ograniczonymi a dystrybuantą spektralną.

PROPOZYCJA 3.2.1. *Jeśli A jest dodatnim samosprzężonym operatorem w \mathcal{H} , to*

$$(3.2.2) \quad \mathcal{R}(F_A(x)) = \mathcal{B}_x(A), \quad x \geq 0.$$

Niech \mathcal{V} będzie algebrą von Neumanna w $\mathbf{B}(\mathcal{H})$. Mówimy, że operator samosprzężony A w \mathcal{H} jest *skojarzony* z \mathcal{V} wtedy i tylko wtedy, gdy $E_A(\sigma) \in \mathcal{V}$ dla każdego $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Warunek ten okazuje się być równoważny żądaniu, aby $F_A(x) \in \mathcal{V}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ (użyć twierdzenia o bikomutancie).

W tym miejscu rozszerzamy definicję porządku spektralnego wprowadzonego przez Olsona w [21] do przypadku nieograniczonych operatorów samosprzężonych (zob. również [10]).

DEFINICJA 3.2.2. Niech A i B będą operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} . Piszemy, że $A \preceq B$, jeśli $F_B(x) \leq F_A(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Ciągłość miar pociąga za sobą, że definicja relacji $A \preceq B$ nie zależy od sposobu definicji spektralnej dystrybuanty, co potwierdza poniższy lemat.

LEMAT 3.2.3. *Jeśli A i B są operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} , to $A \preceq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E_B((-\infty, x)) \leq E_A((-\infty, x))$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.*

Oczywiście relacja „ \preceq ” jest porządkiem w zbiorze wszystkich operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} . Relacja ta jest nazywana *porządkiem spektralnym*. Olson udowodnił w [21], że zbiór wszystkich samosprzężonych elementów algebry von Neumanna w $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ jest kratą warunkowo zupełną względem porządku spektralnego. Sformułujemy teraz i udowodnimy odpowiednik twierdzenia Olsona dla nieograniczonych operatorów samosprzężonych³.

TWIERDZENIE 3.2.4. *Niech \mathcal{V} będzie algebrą von Neumanna w $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ i niech $\{T_\omega : \omega \in \Omega\}$ będzie rodziną samosprzężonych operatorów w \mathcal{H} skojarzonych z \mathcal{V} . Załóżmy, że A_1 i A_2 są operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} takimi, że $A_1 \preceq T_\omega \preceq A_2$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$. Wtedy istnieje $\inf_{\omega \in \Omega} T_\omega$ i $\sup_{\omega \in \Omega} T_\omega$ (względem porządku „ \preceq ”) i każdy z tych operatorów jest skojarzony z \mathcal{V} .*

DOWÓD. (por. dowód twierdzenia 1. w [21]) Dowód rozbijemy na kilka kroków.

Krok 1. Niech $F_{\text{sup}}(x) := \bigwedge_{\omega \in \Omega} F_{T_\omega}(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Pokażemy, że

³Czytelników zainteresowanych dalszymi uogólnieniami twierdzenia Olsona odsyłamy do [3].

- (i) F_{sup} jest dystrybuantą spektralną skojarzoną z \mathcal{V} ,
(ii) jeśli G jest dystrybuantą spektralną skojarzoną z \mathcal{V} taką, że

$$(3.2.3) \quad F_{\text{sup}}(x) \leq G(x) \leq F_{T_\omega}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega,$$

to $F_{\text{sup}} = G$.

ad. (i) Z założenia twierdzenia oraz ze stwierdzenia 3.1.1 dostajemy, że $F_{\text{sup}}(x) \in \mathcal{V}$ i $F_{A_2}(x) \leq F_{\text{sup}}(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Stąd wynika, że $s\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\text{sup}}(x) = I$. Równość $s\text{-}\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\text{sup}}(x) = 0$ i monotoniczność F_{sup} są natychmiastową konsekwencją odpowiednich własności F_{T_ω} , $\omega \in \Omega$. W szczególności dzięki monotoniczności F_{sup} otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} s\text{-}\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_{\text{sup}}(x) &= \bigwedge_{x > x_0^+} F_{\text{sup}}(x) = \bigwedge_{x > x_0^+} \left(\bigwedge_{\omega \in \Omega} F_{T_\omega}(x) \right) \\ &= \bigwedge_{\omega \in \Omega} \left(\bigwedge_{x > x_0^+} F_{T_\omega}(x) \right) = \bigwedge_{\omega \in \Omega} F_{T_\omega}(x_0) = F_{\text{sup}}(x_0). \end{aligned}$$

Powyższa równość oznacza, że F_{sup} jest prawostronnie ciągła. Zatem F_{sup} jest dystrybuantą spektralną.

ad. (ii) Wynika bezpośrednio z definicji F_{sup} .

Krok 2. Wykażemy, że jeśli funkcja $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{H})$ skojarzona z \mathcal{V} spełnia warunki (m) i (z), to $G_r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{H})$ zdefiniowana wzorem $G_r(x) := \bigwedge_{y > x} G(y)$ jest dystrybuantą spektralną skojarzoną z \mathcal{V} .

Bez trudu sprawdzamy, że G_r spełnia warunki (m) i (z). Zauważmy równocześnie, że

$$s\text{-}\lim_{y \rightarrow x^+} G_r(y) = \bigwedge_{y > x} G_r(y) = \bigwedge_{y > x} \left(\bigwedge_{v > y} G(v) \right) = \bigwedge_{v > x} G(v) = G_r(x),$$

co oznacza, że G_r jest prawostronnie ciągła.

Krok 3. Niech $G(x) := \bigvee_{\omega \in \Omega} F_{T_\omega}(x)$. Wówczas

- (iii) $F_{\text{inf}} := G_r$ jest dystrybuantą spektralną skojarzoną z \mathcal{V} ,
(iv) jeśli H jest dystrybuantą spektralną skojarzoną z \mathcal{V} taką, że

$$(3.2.4) \quad F_{T_\omega}(x) \leq H(x) \leq G_r(x), \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R} \text{ i } \omega \in \Omega,$$

to $H = G_r$.

ad. (iii) Na mocy kroku 2. wystarczy wykazać, że G jest monotoniczna i zupełna. Oczywiście $s\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = I$. Równocześnie z założenia i z definicji G wynika, że $G(x) \leq F_{A_1}(x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Wynika stąd, że $s\text{-}\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$. Monotoniczność G wynika bezpośrednio z monotoniczności F_{T_ω} dla każdego $\omega \in \Omega$.

ad. (iv) Z nierówności (3.2.4) wynika, że $G(x) \leq H(x) \leq G_r(x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Stąd oraz z prawostronnej ciągłości H otrzymamy, że

$$H(x) \leq G_r(x) = \bigwedge_{y > x} G(y) \leq \bigwedge_{y > x} H(y) = H(x), \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

W szczególności $H = G_r$.

Krok 4. Z jednoznacznej odpowiedniości pomiędzy miarami spektralnymi na $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ a dystrybuantami spektralnymi oraz stwierdzenia 3.1.2 znajdziemy miary spektralne E_{sup} i E_{inf} na $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ skojarzone z \mathcal{V} takie, że $E_{\text{sup}}((-\infty, x]) = F_{\text{sup}}(x)$ oraz $E_{\text{inf}}((-\infty, x]) = F_{\text{inf}}(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Stąd na mocy kroku 1. i kroku 3. otrzymujemy, że $\int_{\mathbb{R}} x dE_{\text{sup}}(x) = \sup_{\omega \in \Omega} T_{\omega}$ i $\int_{\mathbb{R}} x dE_{\text{inf}}(x) = \inf_{\omega \in \Omega} T_{\omega}$. \square

Poniższy wniosek jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 3.2.4.

WNIOSEK 3.2.5. *Jeśli \mathcal{V} jest algebrą von Neumanna w $\mathbf{B}(\mathcal{H})$, to zbiór wszystkich samosprzężonych operatorów A w \mathcal{H} , które są skojarzone z \mathcal{V} jest kratą warunkowo zupełną względem porządku „ \preceq ”.*

3.3. Porządek spektralny pośród operatorów samosprzężonych

Ten podrozdział zaczniemy od sformułowania użytecznej (i łatwej w dowodzie) własności funkcji rosnących, którą użyjemy w dowodzie propozycji 3.3.2.

LEMAT 3.3.1. *Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ będzie funkcją rosnącą i niech $a \in \mathbb{R}$ będzie takie, że $f^{-1}([-\infty, a]) \neq \emptyset$. Połóżmy $a_f = \sup f^{-1}([-\infty, a])$. Wówczas*

$$(3.3.1) \quad (-\infty, a_f) \subseteq f^{-1}([-\infty, a]) \subseteq (-\infty, a_f] \cap \mathbb{R}.$$

Dodatkowo jeśli f jest półciągła z dołu, to

$$f^{-1}([-\infty, a]) = (-\infty, a_f] \cap \mathbb{R}.$$

PROPOZYCJA 3.3.2. *Niech A i B będą operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} takimi, że $A \preceq B$. Wtedy $f(A) \preceq f(B)$ dla każdej funkcji rosnącej $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ takiej, że $f \in S(\mathbb{R}, E_A) \cap S(\mathbb{R}, E_B)$. W szczególności $f(A) \preceq f(B)$ dla każdej funkcji rosnącej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.*

DOWÓD. Na mocy twierdzenia o transporcie miary (por. [2, twierdzenie 5.4.10]) mamy

$$E_{f(C)}(\sigma) = E_C \circ f^{-1}(\sigma), \quad \sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),$$

gdzie C jest dowolnym operatorem samosprzężonym w \mathcal{H} . Z powyższej równości oraz z założenia, że $f \in S(\mathbb{R}, E_A) \cap S(\mathbb{R}, E_B)$, możemy wywnioskować, że

$$(3.3.2) \quad E_{f(C)}(\sigma) = E_C \circ f^{-1}(\sigma \cup \{-\infty\}), \quad \sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),$$

dla $C = A, B$.

Ustalmy $a \in \mathbb{R}$. Jeśli $f^{-1}([-\infty, a]) = \emptyset$, to z równości (3.3.2) wynika, że $F_{f(B)}(a) = F_{f(A)}(a) = 0$. W przeciwnym wypadku $f^{-1}([-\infty, a]) \neq \emptyset$. Stąd i z lematu 3.3.1 wiemy, że zachodzi (3.3.1). Jeśli $a_f = \infty$, to z (3.3.1) i (3.3.2) otrzymujemy, że

$$F_{f(B)}(a) = E_B(\mathbb{R}) = I = E_A(\mathbb{R}) = F_{f(A)}(a).$$

Jeśli $a_f \in \mathbb{R}$ i $f^{-1}([-\infty, a]) = (-\infty, a_f]$, to z równości (3.3.2) dostaniemy, że

$$F_{f(B)}(a) \stackrel{(3.3.2)}{=} F_B(a_f) \leq F_A(a_f) \stackrel{(3.3.2)}{=} F_{f(A)}(a).$$

Ostatecznie, jeśli $a_f \in \mathbb{R}$ i $f^{-1}([-\infty, a]) = (-\infty, a_f)$, to na mocy lematu 3.2.3 otrzymamy, że $F_{f(B)}(a) = E_B((-\infty, a_f)) \leq E_A((-\infty, a_f)) = F_{f(A)}(a)$. \square

Propozycja 3.3.2 pokazuje, że jeśli $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją rosnącą, to implikacja $A \preceq B \implies f(A) \preceq f(B)$ zachodzi dla dowolnych operatorów samosprzężonych A i B w \mathcal{H} . Odwrotnie, jeśli $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją borelowską spełniającą powyższą implikację dla wszystkich operatorów samosprzężonych A i B w \mathcal{H} , to f musi być rosnącą. Aby to zobaczyć wystarczy rozważyć operatory samosprężone postaci $aI_{\mathcal{H}}$, $a \in \mathbb{R}$.

Następujący rezultat jest odpowiednikiem [21, lemat 4] dla nieograniczonych operatorów samosprzężonych.

PROPOZYCJA 3.3.3. *Niech A i B będą samosprzężonymi operatorami w \mathcal{H} takimi, że $A \preceq B$. Wówczas $\langle Ah, h \rangle \leq \langle Bh, h \rangle$ dla wszystkich $h \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$. Co więcej, jeśli A jest ograniczony od dołu, to również B jest ograniczony od dołu oraz $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(A)$.*

DOWÓD. Jeśli $h \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, to $\int_{\mathbb{R}} x^2 \langle E_C(dx)h, h \rangle < \infty$, co pociąga za sobą, że $\int_{\mathbb{R}} |x| \langle E_C(dx)h, h \rangle < \infty$ dla $C = A, B$. To w połączeniu z równością $\langle E_A(\mathbb{R})h, h \rangle = \langle E_B(\mathbb{R})h, h \rangle = \|h\|^2$ i twierdzeniem 2.3.1 implikuje, że

$$\langle Ah, h \rangle = \int_{\mathbb{R}} x \langle E_A(dx)h, h \rangle \leq \int_{\mathbb{R}} x \langle E_B(dx)h, h \rangle = \langle Bh, h \rangle.$$

Przejdziemy teraz do dowodu drugiej części propozycji. Na początek rozważmy przypadek, gdy operator A jest dodatni. Na mocy obserwacji 3.4.1 wynika, że $0 \preceq A$. Stąd oraz z nierówności $A \preceq B$ otrzymamy, że $0 \preceq B$. Tym samym B jest dodatni. Oczywiście $\langle E_A(\mathbb{R})h, h \rangle = \langle E_B(\mathbb{R})h, h \rangle = \|h\|^2$ dla wszystkich $h \in \mathcal{H}$. Stąd i z twierdzenia 2.3.1 możemy wywnioskować, że $\int_{[0, \infty)} x^2 \langle E_A(dx)h, h \rangle \leq \int_{[0, \infty)} x^2 \langle E_B(dx)h, h \rangle$, gdyż $f(x) = x^2 \chi_{[0, \infty)}(x)$ jest funkcją rosnącą. Ostatnia nierówność pociąga za sobą, że $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(A)$.

Jeśli A jest ograniczony od dołu przez $a \in \mathbb{R}$, to na mocy propozycji 3.3.2, operator $A - aI_{\mathcal{H}}$ jest dodatni, samosprężony oraz $A - aI_{\mathcal{H}} \preceq B - aI_{\mathcal{H}}$. To wraz z rozumowaniem w poprzednim akapicie kończy dowód. \square

Warto zauważyć, że w ogólnej sytuacji relacja $A \preceq B$ nie implikuje ani inkluzji $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(A)$ ani tego, że $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$. W przypadku, gdy A i B nie są spektralnie przemienne, może się nawet zdarzyć, że $A \preceq B$ oraz $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \{0\}$ (zob. 3.3.5).

PRZYKŁAD 3.3.4. Niech A będzie samosprzężonym operatorem mnożenia przez borelowską funkcję $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ w $L^2(\mathbb{R})$ ⁴ i niech B będzie samosprzężonym operatorem mnożenia przez funkcję identycznościową na \mathbb{R} w $L^2(\mathbb{R})$. Rozważmy funkcję ciągłą ϕ :

$$\phi(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{gdy } x \in (-\infty, -1], \\ x & \text{gdy } x \in (-1, 1], \\ \sqrt{x} & \text{gdy } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Pokażemy, że $A \preceq B$. Na wstępie zauważamy, że $E_B(\sigma)h = \chi_\sigma h$ dla $h \in L^2(\mathbb{R})$. Z drugiej strony $E_A(\sigma) = E_B(\phi^{-1}(\sigma))$ dla $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. To pociąga za sobą, że dla każdej funkcji borelowskiej $\psi: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ i dla każdego wektora $h \in L^2(\mathbb{R})$ mamy

$$(3.3.3) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \langle E_B(dx)h, h \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) |h(x)|^2 dx, \\ \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \langle E_A(dx)h, h \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \psi(\phi(x)) |h(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Ponieważ ϕ jest rosnącą bijekcją i $\phi(x) \leq x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, to

$$E_B((-\infty, x]) = E_A((-\infty, \phi(x)]) \leq E_A((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R},$$

co oznacza, że $A \preceq B$. Zdefiniujmy dwie funkcje $h_1, h_2 \in L^2(\mathbb{R})$ w następujący sposób

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in (-\infty, 1], \\ x^{-3/2} & \text{gdy } x \in (1, \infty), \end{cases} \\ h_2(x) &= \begin{cases} |x|^{-5/2} & \text{gdy } x \in (-\infty, -1], \\ 0 & \text{gdy } x \in (-1, \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Korzystając z równości (3.3.3) dla funkcji $\psi(x) = x^2$ wnioskujemy, że $h_1 \in \mathcal{D}(A) \setminus \mathcal{D}(B)$ and $h_2 \in \mathcal{D}(B) \setminus \mathcal{D}(A)$.

PRZYKŁAD 3.3.5. Niech \mathcal{H} będzie nieskończenie wymiarową ośrodkową przestrzenią Hilberta oraz niech A będzie dowolnym nieograniczonym dodatnim operatorem samosprzężonym w \mathcal{H} . Na mocy [18, twierdzenie 18] istnieje operator unitarny $U \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ taki, że $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(U^*AU) = \{0\}$. Przyjmijmy $B := -|U^*AU|$. Z jednej strony mamy, że $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(U^*AU)$. W szczególności $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \{0\}$. Z drugiej strony korzystając z obserwacji 3.4.1 oraz lematu 3.6.2 otrzymujemy, że $B \preceq A$.

⁴Jeśli $p \in [1, \infty)$ i μ jest miarą borelowską na \mathbb{R}^κ , to $L^p(\mathbb{R}^\kappa, \mu)$ oznacza przestrzeń zespolonych funkcji borelowskich na \mathbb{R}^κ całkowalnych w p -tej potęgze względem miary μ (utożsamianych prawie wszędzie). W przypadku, gdy μ jest κ -wymiarową miarą Lebesgue'a, stosujemy oznaczenie $L^p(\mathbb{R}^\kappa)$.

Twierdzenie 3.3.6 poniżej jest uogólnieniem [21, wniosek 1] dla przypadku nieograniczonych operatorów samosprzężonych, o których nie zakłada się, że są dodatnie. Poniższy dowód jest inny niż dowód oryginalny, a warunek (iii) obejmuje istotnie szerszą klasę funkcji.

TWIERDZENIE 3.3.6. *Jeśli A i B są operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} , to poniższe warunki są równoważne:*

- (i) $A \preceq B$,
- (ii) $f(A) \leq f(B)$ dla każdej ograniczonej i ciągłej funkcji rosnącej $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$,
- (iii) $f(A) \leq f(B)$ dla każdej ograniczonej funkcji rosnącej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

DOWÓD. (i) \Rightarrow (iii) Zauważmy, że $f(C) \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ dla każdego samo-sprzężonego operatora C w \mathcal{H} i dla dowolnej ograniczonej rzeczywistej funkcji borelowskiej f na \mathbb{R} . Dzięki temu oraz propozycjom 3.3.2 i 3.3.3 dostajemy tezę.

(iii) \Rightarrow (ii) To jest oczywiste.

(ii) \Rightarrow (i) Jeśli $h \in \mathcal{H}$, to

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \langle E_A(dx)h, h \rangle = \langle f(A)h, h \rangle \leq \langle f(B)h, h \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \langle E_B(dx)h, h \rangle$$

dla każdej ograniczonej i ciągłej funkcji rosnącej $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$. Stąd na mocy twierdzenia 2.3.1, $\langle F_B(x)h, h \rangle \leq \langle F_A(x)h, h \rangle$ dla wszystkich $h \in \mathcal{H}$ i $x \in \mathbb{R}$. \square

Na zakończenie ogólnych rozważań o porządku spektralnym warto zwrócić uwagę na to, że $(\mathbf{B}_S(\mathcal{H}), \preceq)$ nie jest uporządkowaną przestrzenią wektorową, gdy $\dim \mathcal{H} \geq 2$ (zob. [21]). Do kwestii tej wrócimy jeszcze raz przy okazji badania wielowymiarowego porządku spektralnego (por. wniosek 4.4.13).

PRZYKŁAD 3.3.7. Rozważmy przestrzeń Hilberta $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ wraz z bazą ortonormalną $\{e_1, e_2\}$, gdzie $e_1 = (1, 0)$ i $e_2 = (0, 1)$. Zdefiniujmy trzy operatory A, B i C za pomocą poniższych macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście operatory A, B i C są samosprzężone. Bez problemu sprawdzamy, że B jest operatorem dodatnim. Stąd i z obserwacji 3.4.1 wynika, że $A \preceq B$. Pokażemy teraz, że $A+C \not\preceq B+C$. Ponieważ $B+C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, to jego dystrybuanta spektralna ma postać

$$F_{B+C}(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x < 0, \\ P_2, & \text{gdy } 0 \leq x < 1, \\ I, & \text{gdy } 1 \leq x, \end{cases}$$

gdzie P_2 jest projekcją ortogonalną na $\{0\} \times \mathbb{C}$. Z kolei $A+C = C$ ma dwie wartości własne: $\lambda_1 = -1 - \sqrt{2}$ oraz $\lambda_2 = -1 + \sqrt{2}$. Łatwo sprawdzić że, wartości własnej λ_1 odpowiada przestrzeń własna $M_1 := \{(z, -z) : z \in \mathbb{C}\}$ a wartości własnej λ_2 przestrzeń własna $M_2 := \{(z, z) : z \in \mathbb{C}\}$. Jeśli Q_j będzie oznaczała projekcję ortogonalną na podprzestrzeń M_j dla $j = 1, 2$, to dystrybuantę spektralną $A + C$ można wyrazić wzorem

$$F_{A+C}(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x < -1 - \sqrt{2}, \\ Q_1, & \text{gdy } -1 - \sqrt{2} \leq x < -1 + \sqrt{2}, \\ I, & \text{gdy } -1 + \sqrt{2} \leq x. \end{cases}$$

W szczególności $F_{B+C}(0) \not\leq F_{A+C}(0)$, co oznacza, że $A + C \not\leq B + C$.

3.4. Porządek spektralny a operatory samosprężone dodatnie

W tym podrozdziale zajmiemy się dokładniej zachowaniem się porządku spektralnego w klasie operatorów samosprężonych dodatnich. Rozważania o porządku spektralnym dla tej klasy rozpoczniemy od prostej ale ważnej obserwacji (por. [21, str. 540]).

OBSERWACJA 3.4.1. *Niech A będzie operatorem samosprężonym w \mathcal{H} . Wówczas $0 \preceq A$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest dodatni.*

DOWÓD. Oczywiście

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \in (-\infty, 0), \\ I, & \text{gdy } x \in [0, \infty). \end{cases}$$

Stąd wynika, że relacja $0 \preceq A$ jest równoważna równości $E_A((-\infty, 0)) = 0$. Ostatnia własność jest równoznaczna z tym, że A jest dodatni. \square

Przejdziemy teraz do zagadnienia charakteryzacji porządku spektralnego we wspomnianej klasie operatorów za pomocą zależności pomiędzy potęgami porównywanych operatorów. Na wstępie pokażemy, że porządek spektralny wymusza odpowiednie relacje pomiędzy zbiorami wektorów ograniczonych, analitycznych, quasi-analitycznych i stieljesowskich operatorów, które chcemy porównywać.

PROPOZYCJA 3.4.2. *Niech A i B będą dodatnimi operatorami samo-sprężonymi w \mathcal{H} takimi, że $A \preceq B$. Wówczas dla każdej liczby rzeczywistej $s \geq 0$ zachodzą następujące warunki:*

- (i) $A^s \preceq B^s$,
- (ii) $\mathcal{D}(B^s) \subseteq \mathcal{D}(A^s)$ i $\mathcal{D}^\infty(B^s) \subseteq \mathcal{D}^\infty(A^s)$,
- (iii) $\|A^s h\| \leq \|B^s h\|$ dla wszystkich $h \in \mathcal{D}(B^s)$,
- (iv) $\langle A^s h, h \rangle \leq \langle B^s h, h \rangle$ dla wszystkich $h \in \mathcal{D}(B^s)$,
- (v) $A^s \leq B^s$.

Co więcej, $\mathcal{D}^\infty(B) \subseteq \mathcal{D}^\infty(A)$, $\mathcal{B}(B) \subseteq \mathcal{B}(A)$, $\mathcal{A}(B) \subseteq \mathcal{A}(A)$, $\mathcal{Q}(B) \subseteq \mathcal{Q}(A)$ i $\mathcal{S}(B) \subseteq \mathcal{S}(A)$.

DOWÓD. (i) Wynika bezpośrednio z propozycji 3.3.2 zastosowanej do funkcji rosnącej $f(x) = |x|^s \chi_{[0,\infty)}(x)$.

(ii) Stosując (i) oraz propozycję 3.3.3 widzimy, że $\mathcal{D}(B^t) \subseteq \mathcal{D}(A^t)$ dla każdej liczby rzeczywistej $t \geq 0$. Stąd wynika, że $\mathcal{D}((B^s)^n) = \mathcal{D}(B^{sn}) \subseteq \mathcal{D}(A^{sn}) = \mathcal{D}((A^s)^n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Tym samym⁵ $\mathcal{D}^\infty(B^s) \subseteq \mathcal{D}^\infty(A^s)$.

(iii) Korzystając z (ii) i z twierdzenia 2.3.1 do funkcji rosnącej $f(x) = |x|^{2s} \chi_{[0,\infty)}(x)$ otrzymujemy, że

$$\|A^s h\|^2 = \int_{[0,\infty)} x^{2s} \langle E_A(dx)h, h \rangle \leq \int_{[0,\infty)} x^{2s} \langle E_B(dx)h, h \rangle = \|B^s h\|^2$$

dla wszystkich $h \in \mathcal{D}(B^s)$.

(iv) Wynika natychmiast z (i) i z propozycji 3.3.3 (można też wynioskować (iv) z (iii)).

(v) Wynika bezpośrednio z (ii) i (iii).

Pozostała część tezy wynika z (ii) i (iii). \square

WNIOSEK 3.4.3. *Jeśli A i B są dodatnimi operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} takimi, że $A^t \preceq B^t$ dla pewnej rzeczywistej liczby $t > 0$, to $A^s \preceq B^s$ dla każdej liczby rzeczywistej $s \geq 0$.*

DOWÓD. Niech s będzie dowolną nieujemną liczbą rzeczywistą. Wówczas $C^s = (C^t)^{s/t}$, gdzie C jest dodatnim samosprzężonym operatorem w \mathcal{H} . Stąd na mocy propozycji 3.4.2 (i) otrzymujemy tezę. \square

Zgodnie z propozycją 3.4.2, jeśli A i B są dodatnimi operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} takimi, że $A \preceq B$, to $A^n \leq B^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Można w tym miejscu postawić pytanie: czy implikacja odwrotna jest prawdziwa. Jak się okazuje odpowiedź jest pozytywna (zobacz wniosek 3.4.7). Zaczniemy od udowodnienia kluczowego lematu. Poniżej przyjmujemy konwencję, że $0/0 = 0$ i $a/0 = \infty$ dla $a \in (0, \infty)$.

LEMAT 3.4.4. *Jeśli A i B są dodatnimi operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} , to*

(i) $\overline{\mathcal{R}(F_B(x)) \cap \mathcal{E}_{A/B}} \subseteq \mathcal{R}(F_A(x))$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $A \preceq B$ zakładając, że $\mathcal{B}(B) \subseteq \mathcal{E}_{A/B}$,

gdzie $\mathcal{E}_{A/B} = \{h \in \mathcal{D}^\infty(A) \cap \mathcal{D}^\infty(B) : \underline{L}_{A/B}(h) \leq 1\}$ oraz⁶

(3.4.1)

$$\underline{L}_{A/B}(h) := \liminf_{s \rightarrow \infty} \sqrt[s]{\langle A^s h, h \rangle / \langle B^s h, h \rangle}, \quad h \in \mathcal{D}^\infty(A) \cap \mathcal{D}^\infty(B).$$

DOWÓD. Na wstępie zauważmy, że jeśli C jest dodatnim operatorem samosprzężonym w \mathcal{H} , to $\langle C^s h, h \rangle = \int_{[0,\infty)} x^s \langle E_C(dx)h, h \rangle$ dla każdego

⁵ Zauważmy, że $\mathcal{D}^\infty(C^t) = \mathcal{D}^\infty(C)$ dla każdego dodatniego operatora samosprzężonego C i dla wszystkich liczb rzeczywistych $t > 0$.

⁶ Zagadnienie istnienia granicy w (3.4.1) jest dyskutowane w aneksie.

$h \in \mathcal{D}^\infty(C)$. W szczególności stąd i ze stwierdzenia 5.1.1 (zastosowanego do funkcji $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = x^s$ dla $x \geq 0$ oraz miary borelowskiej μ_h określonej wzorem $\mu_h(\sigma) := \langle E_C(\sigma)h, h \rangle$ dla wszystkich $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$) wynika, że dla dowolnego dodatniego operatora samosprzężonego C w \mathcal{H} oraz dla każdego $h \in \mathcal{D}^\infty(C)$ istnieje granica $\lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt[s]{\langle C^s h, h \rangle} \in [0, \infty]$.

(i) Dla danego $h \in \mathcal{D}^\infty(A) \cap \mathcal{D}^\infty(B)$ wprowadźmy pomocnicze oznaczenie $r_s(h) = \langle A^s h, h \rangle / \langle B^s h, h \rangle$. Ustalmy liczbę rzeczywistą $x \geq 0$ i weźmy $h \in \mathcal{R}(F_B(x)) \cap \mathcal{E}_{A/B}$. Wówczas na mocy (3.2.2) $h \in \mathcal{B}_x(B)$. Ponieważ $\underline{L}_{A/B}(h) \leq 1$, to istnieje rosnący ciąg $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ liczb rzeczywistych dodatnich taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[s_n]{r_{s_n}(h)} \leq 1$. Stosując powyższe informacje otrzymamy następujące oszacowania

$$\begin{aligned}
(3.4.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n h\|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\langle A^{2n} h, h \rangle} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[s_n]{\langle A^{s_n} h, h \rangle} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[s_n]{r_{s_n}(h)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[s_n]{\langle B^{s_n} h, h \rangle} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\langle B^{2n} h, h \rangle} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|B^n h\|} \leq x.
\end{aligned}$$

Dzięki zastosowaniu [30, lemat 8 (b)] do operatora A widzimy, że $h \in \mathcal{B}_x(A)$. Stąd i z równości (3.2.2) otrzymujemy, że $h \in \mathcal{R}(F_A(x))$, co oznacza że $\mathcal{R}(F_B(x)) \cap \mathcal{E}_{A/B} \subseteq \mathcal{R}(F_A(x))$. To pociąga za sobą (i).

Punkt (ii) tezy jest natychmiastowym wnioskiem z (i) i (3.2.2). \square

Możemy teraz udowodnić naszą główną charakteryzację porządku spektralnego.

TWIERDZENIE 3.4.5. *Jeśli A i B są dodatnimi operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} , to następujące warunki są równoważne:*

- (i) $A \preceq B$,
- (ii) $\mathcal{D}^\infty(B) \subseteq \mathcal{D}^\infty(A)$ i $\underline{L}_{A/B}(h) \leq 1$ dla wszystkich $h \in \mathcal{D}^\infty(B)$,
- (iii) $\mathcal{B}(B) \subseteq \mathcal{D}^\infty(A)$ i $\underline{L}_{A/B}(h) \leq 1$ dla wszystkich $h \in \mathcal{B}(B)$,
- (iv) $\mathcal{B}(B) \subseteq \mathcal{B}(A)$ i $\underline{L}_{A/B}(h) \leq 1$ dla wszystkich $h \in \mathcal{B}(B)$.

DOWÓD. (i) \Rightarrow (ii) Na mocy części (ii) i (iv) propozycji 3.4.2 otrzymujemy, że $\mathcal{D}^\infty(B) \subseteq \mathcal{D}^\infty(A)$ i $\langle A^s h, h \rangle \leq \langle B^s h, h \rangle$ dla każdego $s \geq 0$ i $h \in \mathcal{D}^\infty(B)$, co oznacza, że $\underline{L}_{A/B}(h) \leq 1$ dla wszystkich $h \in \mathcal{D}^\infty(B)$.

(ii) \Rightarrow (iii) To jest oczywiste.

(iii) \Rightarrow (i) Wystarczy zastosować lemat 3.4.4 (ii).

(i) \Rightarrow (iv) To jest konsekwencją (i) \Rightarrow (ii) oraz propozycji 3.4.2.

(iv) \Rightarrow (iii) To jest oczywiste. \square

WNIOSEK 3.4.6. *Jeśli A i B są dodatnimi operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} , to następujące warunki są równoważne:*

- (i) $A \preceq B$,
- (ii) $\mathcal{D}^\infty(B) \subseteq \mathcal{D}^\infty(A)$ i $\mathcal{I}_{A,B}(h) = [0, \infty)$ dla każdego $h \in \mathcal{D}^\infty(B)$,
- (iii) $\mathcal{D}^\infty(B) \subseteq \mathcal{D}^\infty(A)$ i zbiór $\mathcal{I}_{A,B}(h)$ jest nieograniczony dla każdego $h \in \mathcal{D}^\infty(B)$,
- (iv) $\mathcal{B}(B) \subseteq \mathcal{D}^\infty(A)$ i zbiór $\mathcal{I}_{A,B}(h)$ jest nieograniczony dla każdego $h \in \mathcal{B}(B)$,
- (v) $\mathcal{B}(B) \subseteq \mathcal{B}(A)$ i zbiór $\mathcal{I}_{A,B}(h)$ jest nieograniczony dla każdego $h \in \mathcal{B}(B)$,

gdzie $\mathcal{I}_{A,B}(h) := \{s \in [0, \infty) : \langle A^s h, h \rangle \leq \langle B^s h, h \rangle\}$ dla $h \in \mathcal{D}^\infty(A) \cap \mathcal{D}^\infty(B)$.

DOWÓD. (i) \Rightarrow (ii) To wynika z propozycji 3.4.2 (ii)&(iv).

Implikacje (iv) \Rightarrow (v) i (v) \Rightarrow (i) są bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 3.4.5.

Pozostałe implikacje są oczywiste. \square

Poniższy wniosek, za wyjątkiem punktu (iv), jest uogólnieniem [21, twierdzenie 3] na przypadek operatorów nieograniczonych. Równoważność (iii) \Leftrightarrow (iv) poniżej jest ciekawa niezależnie od samych rozważań o porządku spektralnym.

WNIOSEK 3.4.7. Niech A i B będą dodatnimi operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} . Załóżmy, że $\{s_n\}_{n=1}^\infty \subseteq [0, \infty)$ i $\{r_n\}_{n=1}^\infty \subseteq [1, \infty)$ są ciągami takimi, że $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ i $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r_n} \leq 1$ ⁷. Wówczas poniższe warunki są równoważne:

- (i) $A \preceq B$,
- (ii) $A^s \preceq B^s$ dla wszystkich $s \geq 0$,
- (iii) $A^s \leq B^s$ dla wszystkich $s \geq 0$,
- (iv) $A^{s_n} \leq r_n B^{s_n}$ dla wszystkich $n \geq 1$.

W szczególności $A \preceq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A^n \leq B^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

DOWÓD. Na mocy propozycji 3.4.2 wnioskujemy, że (i) implikuje (ii) oraz (ii) implikuje (iii). Implikacja (iii) \Rightarrow (iv) jest trywialna.

(iv) \Rightarrow (i) Niech C będzie dowolnym dodatnim operatorem samosprzężonym w \mathcal{H} . Ponieważ $\mathcal{D}(C^t) \subseteq \mathcal{D}(C^s)$ dla wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych s, t takich, że $s \leq t$, to $\mathcal{D}^\infty(C) = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{D}(C^{s_n/2})$. Z (iv) wynika, że $\mathcal{D}(B^{s_n/2}) \subseteq \mathcal{D}(A^{s_n/2})$ dla wszystkich $n \geq 1$. Z połączenia obu faktów wnioskujemy, że $\mathcal{D}^\infty(B) \subseteq \mathcal{D}^\infty(A)$. Stąd na mocy (iv) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \langle A^{s_n} h, h \rangle &= \|A^{s_n/2} h\|^2 \leq r_n \|B^{s_n/2} h\|^2 \\ &= r_n \langle B^{s_n} h, h \rangle, \quad h \in \mathcal{D}^\infty(B), n \geq 1. \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie 3.4.5 dostajemy (i).

⁷Z założenia wynika, że $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r_n} = 1$. Dowód samej implikacji (iv) \Rightarrow (i) nie wymaga tak silnego warunku.

Pozostała część tezy jest szczególnym przypadkiem równoważności (i) \Leftrightarrow (iv). \square

Następny wniosek rzuca więcej światła na związki pomiędzy porządkami „ \preceq ” i „ \leq ”.

WNIOSEK 3.4.8. *Niech A i B będą dodatnimi operatorami samosprężonymi w \mathcal{H} . Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- (i) $A \not\preceq B$,
- (ii) zbiór $\{s \in [0, \infty) : A^s \leq B^s\}$ jest ograniczony.

Dodatkowo, jeśli $A \not\preceq B$ i $\mathcal{B}(B) \subseteq \mathcal{D}^\infty(A)$, to istnieje wektor $h \in \mathcal{B}(B)$ taki, że zbiór $\{s \in [0, \infty) : \langle A^s h, h \rangle \leq \langle B^s h, h \rangle\}$ jest ograniczony.

DOWÓD. Równoważność (i) \Leftrightarrow (ii) można wydedukować z równoważności (i) \Leftrightarrow (iv) we wniosku 3.4.7 dzięki zastosowaniu kontrapozycji (z $r_n \equiv 1$ i odpowiednio dobranym ciągiem $\{s_n\}_{n=1}^\infty$). Druga część tezy jest konsekwencją wniosku 3.4.6 (iv). \square

3.5. Przykład

Naszym najbliższym celem będzie zilustrowanie wniosku 3.4.8. Ograniczamy się do przypadku dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ wyposażonej w bazę ortonormalną $\{(1, 0), (0, 1)\}$. W tej sytuacji porządek spektralny ma prostą charakteryzację, której dowód (dosyć techniczny) pozostawiamy czytelnikowi.

LEMAT 3.5.1. *Niech A i B będą symetrycznymi macierzami dwa na dwa o wartościach własnych $\alpha_1 \leq \alpha_2$ i $\beta_1 \leq \beta_2$ odpowiednio (jeśli przestrzeń własna jest dwuwymiarowa, to odpowiadająca jej wartość własna jest liczona dwukrotnie). Wówczas następujące dwa warunki są równoważne:*

- (i) $A \preceq B$,
- (ii) $\alpha_j \leq \beta_j$ dla $j = 1, 2$, i $\mathcal{N}(A - \alpha_1) = \mathcal{N}(B - \beta_1)$ jeśli tylko $\beta_1 < \alpha_2$.

Co więcej, jeśli $A \preceq B$ i $\beta_1 < \alpha_2$, to $AB = BA$.

Zauważmy, że jeśli $\alpha_j \leq \beta_j$ dla $j = 1, 2$ i $\beta_1 \geq \alpha_2$, to $A \preceq B$ nie musi implikować przemienności A i B . Rzeczywiście, jeśli $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \beta_1 < \beta_2$ i $P, Q \in \mathbf{B}(\mathbb{C}^2)$ są dowolnymi nieprzemiennymi rzutami ortogonalnymi, to macierze $A = (\alpha_1 - \alpha_2)P + \alpha_2$ i $B = (\beta_1 - \beta_2)Q + \beta_2$, które są symetryczne, nie są przemienne oraz $A \preceq B$ (zauważmy, że musi być $\dim \mathcal{R}(P) = \dim \mathcal{R}(Q) = 1$). Zakładając dodatkowo, że $\alpha_1 \geq 0$, dostaniemy, że $A \geq 0$ i $B \geq 0$.

Niech A i B_θ będą macierzami zdefiniowanymi w następujący sposób

$$(3.5.1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B_\theta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \theta \end{bmatrix} \text{ dla } \theta \in [1, \infty).$$

Oczywiście, $A \geq 0$ i $B_\theta \geq 0$. Macierze A i B_1 pojawiają się w [5, strona 584], gdzie zauważono, że $A \leq B_1$ oraz $A^2 \not\leq B_1^2$ (zatem $A \not\preceq B_1$).

LEMAT 3.5.2. *Jeśli A i B_θ są określone równościami (3.5.1), to następujące warunki są równoważne:*

- (i) $A \preceq B_\theta$,
- (ii) $AB_\theta = B_\theta A$,
- (iii) $\theta = 2$.

DOWÓD. Zauważmy, że $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_2 = 2$ są wartościami własnymi macierzy A oraz $\beta_{\theta,1} = (\theta + 2 - \sqrt{\Delta_\theta})/2$ i $\beta_{\theta,2} = (\theta + 2 + \sqrt{\Delta_\theta})/2$ są wartościami własnymi macierzy B_θ , gdzie $\Delta_\theta = (\theta - 2)^2 + 4$. Z nierówności $\theta - 2 \leq |\theta - 2| < \sqrt{\Delta_\theta}$, wynika, że

$$(3.5.2) \quad \beta_{\theta,1} < \alpha_2.$$

(i) \Rightarrow (ii) Na mocy 3.5.1 i (3.5.2), macierze A i B_θ są przemienne.

(ii) \Leftrightarrow (iii) To jest oczywiste.

(iii) \Rightarrow (i) Wynika bezpośrednio z lematu 3.5.1, (3.5.2) i równości $A = A - \alpha_1 = B_2 - \beta_{2,1}$. \square

Zauważmy, że $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \beta_{\theta,1} = 2 = \frac{1}{2}(\beta_{2,1} + \beta_{2,2}) \neq \beta_{2,1}$ i $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \beta_{\theta,2} = \infty$.

W tym momencie możemy zobrazować sytuację z wniosku 3.4.8. Pokażemy mianowicie, że dla każdej liczby całkowitej $k \geq 1$ istnieją samo sprzężone operatory dodatnie A_1 i A_2 działające na tej samej przestrzeni Hilberta takie, że $A_1^n \leq A_2^n$ dla każdego $n = 0, \dots, k$ i $A_1 \not\leq A_2$.

PROPOZYCJA 3.5.3. *Niech A i B_θ będą takie jak w (3.5.1). Wtedy dla każdej liczby całkowitej dodatniej k istnieje $\theta_k \in (2, \infty)$ taka, że dla każdego $\theta \in [\theta_k, \infty)$,*

- (i) $A^n \leq B_\theta^n$ dla każdego $n = 0, \dots, k$,
- (ii) $A \not\leq B_\theta$.

DOWÓD. Na mocy zasady indukcji matematycznej

$$A^n = 2^{n-1}A, \quad n \geq 1.$$

Ponieważ macierze B_θ są symetryczne, to n -tą potęgę można zapisać w postaci

$$(3.5.3) \quad B_\theta^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{bmatrix}, \quad n \geq 1,$$

gdzie a_n, b_n, c_n są zależne od θ . Obliczając $B_\theta^{(n+1)}$ otrzymamy, że

$$(3.5.4) \quad a_{n+1} = 2a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_n + \theta b_n = 2b_n + c_n, \quad c_{n+1} = b_n + \theta c_n, \quad n \geq 1.$$

Stąd na mocy zasady indukcji matematycznej możemy wywnioskować, że (pamiętając o tym, że $a_1 = 2$ i $a_2 = 5$)

(3.5.5) a_{n+2} , b_n i c_n są unormowanymi⁸ wielomianami zmiennej θ
dla każdego $n \geq 1$,

(3.5.6) współczynniki a_n , b_n i c_n są całkowite i nieujemne dla $n \geq 1$,

(3.5.7) $\deg a_n = \max\{n - 2, 0\}$, $\deg b_n = n - 1$ i $\deg c_n = n$ dla
wszystkich $n \geq 1$.

Oczywiście, wystarczy udowodnić, że dla ustalonej dodatniej liczby całkowitej k zachodzi nierówność $B_\theta^k - A^k \geq 0$ dla odpowiednio dużych θ . Na wstępie zauważmy, że $a_k(\theta) - 2^{k-1}$, element $(1, 1)$ macierzy $B_\theta^k - A^k$, jest dodatni dla każdego $\theta \in [1, \infty)$. Istotnie, wynika to z zasady indukcji matematycznej oraz (3.5.6) zastosowanych do zależności rekurencyjnej

$$a_{n+1}(\theta) - 2^n \stackrel{(3.5.4)}{=} 2(a_n(\theta) - 2^{n-1}) + b_n(\theta), \quad n \geq 1.$$

Kolejnym krokiem będzie wykazanie, że $\det(B_\theta^k - A^k) > 0$ dla odpowiednio dużych θ . Uwzględniając to, że wielomian c_k jest unormowany (zob. (3.5.5)), otrzymamy

$$\begin{aligned} \det(B_\theta^k - A^k) &= (a_k c_k - b_k^2) - 2^{k-1} c_k + 2^k b_k - 2^{k-1} a_k \\ &\stackrel{(3.5.3) \& (3.5.7)}{=} \det(B_\theta^k) - 2^{k-1} \theta^k + \square_{k-1} \\ &= (\det B_\theta)^k - 2^{k-1} \theta^k + \square_{k-1} \\ &= (2\theta - 1)^k - 2^{k-1} \theta^k + \square_{k-1} \\ &= 2^k \theta^k - 2^{k-1} \theta^k + \square'_{k-1} \\ &= 2^{k-1} \theta^k + \square'_{k-1}, \end{aligned}$$

gdzie \square_{k-1} i \square'_{k-1} są wielomianami zmiennej θ , których stopień jest mniejszy lub równy $k - 1$. Stosując kryterium Sylwestra otrzymamy, że $B_\theta^k - A^k \geq 0$ dla odpowiednio dużych θ . Jeśli $\theta \neq 2$, to na mocy lematu 3.5.2, $A \not\preceq B_\theta$. To kończy dowód. \square

3.6. Pewna metoda redukcji do przypadku ograniczonych operatorów samosprężonych

Z definicji porządku spektralnego wynika, że jeśli A i B są operatorami samosprężonymi w \mathcal{H} takimi, że $A \preceq B$, to

$$(3.6.1) \quad F_A(x)F_B(x) = F_B(x)F_A(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Warunek (3.6.1) jest znacznie słabszy niż spektralna przemienność A i B (zob. podrozdział 3.5). Olson udowodnił w [21, twierdzenie 2], że jeśli $A, B \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ są samosprężone, to $A \preceq B$ wtedy i tylko wtedy,

⁸Wielomiany o współczynniku wiodącym równym 1 nazywa się czasami monicznymi.

gdy $A \leq B$ oraz spełniona jest równość (3.6.1). Pojawia się w tym miejscu pytanie, czy podobnie jest w przypadku operatorów nieograniczonych. Ponieważ w przypadku operatorów nieograniczonych porządek „ \leq ” zdefiniowany jest tylko dla operatorów samosprzężonych dodatnich, to musimy ograniczyć nasze badania do tej szczególnej klasy operatorów (por. również z przykładem 3.3.4). W tym zakresie odpowiedź na nasze pytanie jest pozytywna (por. wniosek 3.6.6; zob. także wniosek 3.6.9).

Zacznijmy od udowodnienia serii lematów. Dla pełności wywodu zamieszczamy dowód następującego znanego faktu.

LEMAT 3.6.1. *Niech A będzie dodatnim operatorem samosprzężonym w \mathcal{H} i niech η będzie dodatnią liczbą rzeczywistą. Jeśli $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \eta]$ i $g: [0, \eta] \rightarrow [0, \infty)$ są funkcjami borelowskimi, to widmo operatora $f(A)$ zawarte jest w przedziale $[0, \eta]$ i zachodzi równość*

$$g(f(A)) = (g \circ f)(A).$$

DOWÓD. Dzięki równości $E_{f(A)}(\sigma) = E_A(f^{-1}(\sigma))$ dla każdego $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ otrzymujemy, że

$$E_{f(A)}((\eta, \infty)) = E_A(f^{-1}((\eta, \infty))) = E_A(\emptyset) = 0.$$

Stąd wynika, że widmo dodatniego operatora samosprzężonego $f(A)$, które jest równe domkniętemu nośnikowi miary spektralnej $E_{f(A)}$, jest zawarte w $[0, \eta]$. To oznacza, że istnieje operator $g(f(A))$. Stosując twierdzenie o transporcie miar dla miar spektralnych dostaniemy, że

$$\begin{aligned} (g \circ f)(A) &= \int_{[0, \infty)} g \circ f dE_A \\ &= \int_{[0, \eta]} g dE_A \circ f^{-1} = \int_{[0, \eta]} g dE_{f(A)} = g(f(A)), \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

LEMAT 3.6.2. *Jeśli A i B są operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} , to $A \preceq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-B \preceq -A$.*

DOWÓD. Oczywiście dla dowolnego operatora samosprzężonego C w \mathcal{H} i dla wszystkich $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ zachodzi równość⁹ $E_{-C}(\sigma) = E_C(-\sigma)$. Stąd wynika, że

$$(3.6.2) \quad F_{-C}(x) = E_C([-x, \infty)) = I - E_C((-\infty, -x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jeśli $A \preceq B$, to na mocy lematu 3.2.3 dostaniemy, że $E_B((-\infty, x)) \leq E_A((-\infty, x))$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Stąd i z równości (3.6.2) wynika, że $F_{-A}(x) \leq F_{-B}(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, co oznacza, że $-B \preceq -A$. Stosując powyższe rozumowanie do $-B$ i $-A$ otrzymamy implikację odwrotną. □

⁹Jeśli $\sigma \subset \mathbb{R}$, to przyjmujemy z definicji, że $-\sigma := \{x \in \mathbb{R}: -x \in \sigma\}$.

WNIOSEK 3.6.3. *Niech A i B będą operatorami samosprzęzonymi w \mathcal{H} i niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją malejącą. Jeśli $A \preceq B$, to $f(B) \preceq f(A)$.*

DOWÓD. Korzystając z propozycji 3.3.2 dla funkcji $-f$ i z lematu 3.6.2 otrzymujemy tezę. \square

LEMAT 3.6.4. *Niech $C_1, C_2 \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ będą iniektywnymi dodatnimi operatorami samosprzęzonymi, których widma zawarte są w domkniętym przedziale $[0, \eta]$, gdzie $\eta \in (0, \infty)$. Załóżmy, że $f: (0, \eta] \rightarrow [0, \infty)$ jest malejącą bijekcją. Jeśli $C_1 \preceq C_2$, to $f(C_2) \preceq f(C_1)$.*

DOWÓD. Rozszerzmy f do funkcji $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ definiując $\tilde{f}(x) = \infty$, gdy $x \leq 0$ oraz $\tilde{f}(x) = 0$, gdy $x \geq \eta$. Ponieważ widmo operatora C_j zawarte jest w domkniętym przedziale $[0, \eta]$ oraz zero nie należy do widma punktowego C_j , to istnieje $f(C_j)$ oraz $f(C_j) = \tilde{f}(C_j)$, $j = 1, 2$. Zdefiniujmy $\check{f}: \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, 0]$ wzorem $\check{f}(x) = -\tilde{f}(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Funkcja \check{f} jest rosnąca oraz $\check{f} \in S(\mathbb{R}, E_{C_1}) \cap S(\mathbb{R}, E_{C_2})$. Stąd na mocy propozycji 3.3.2 wynika, że $\check{f}(C_1) \preceq \check{f}(C_2)$. Dzięki temu oraz lematowi 3.6.2 otrzymujemy tezę. \square

W tym momencie jesteśmy przygotowani do dowodu głównego twierdzenia redukcyjnego.

TWIERDZENIE 3.6.5. *Niech A_1 i A_2 będą dodatnimi operatorami samosprzęzonymi w \mathcal{H} . Załóżmy, że $g: [0, \infty) \rightarrow (0, \eta]$ jest malejącą bijekcją, gdzie $\eta \in (0, \infty)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- (i) $A_1 \preceq A_2$,
- (ii) $g(A_2) \preceq g(A_1)$,
- (iii) $g(A_2) \leq g(A_1)$ i zachodzi (3.6.1).

DOWÓD. (i) \Rightarrow (ii) Niech $\tilde{g}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \eta]$ będzie rozszerzeniem g danym przez $\tilde{g}(x) = g(0) = \eta$ dla $x \in (-\infty, 0)$. Oczywiście \tilde{g} jest malejąca. Stąd dzięki wnioskowi 3.6.3 wynika, że $g(A_2) = \tilde{g}(A_2) \preceq \tilde{g}(A_1) = g(A_1)$.

(ii) \Rightarrow (i) Niech $C_j = g(A_j)$ dla $j = 1, 2$. Wówczas operatory C_1 i C_2 spełniają założenia lematu 3.6.4 z $f := g^{-1}: (0, \eta] \rightarrow [0, \infty)$, co jest konsekwencją twierdzenia o odwzorowaniu widm dla całek spektralnych oraz charakteryzacji widma punktowego za pomocą miary spektralnej (por. [2, strona 158]). Stąd $f(C_1) \preceq f(C_2)$. Niech $\tilde{f}: [0, \eta] \rightarrow [0, \infty)$ będzie rozszerzeniem f takim, że $\tilde{f}(0) = 0$. Wówczas na mocy lematu 3.6.1 dostajemy, że

$$f(C_j) = \tilde{f}(C_j) = \tilde{f}(g(A_j)) = (\tilde{f} \circ g)(A_j) = A_j,$$

co oznacza, że $A_1 \preceq A_2$.

(i) \Rightarrow (iii) Wiemy już, że $A_1 \preceq A_2$ pociąga za sobą równość (3.6.1). Z implikacji (i) \Rightarrow (ii) wynika, że $g(A_2) \preceq g(A_1)$. Zatem (na mocy albo [21, twierdzenie 2] albo propozycji 3.4.2) otrzymujemy, że $g(A_2) \leq g(A_1)$.

(iii) \Rightarrow (ii) Rozważmy funkcję $h := -g: [0, \infty) \rightarrow [-\eta, 0)$. Z (iii) mamy, że $h(A_1) \leq h(A_2)$. Zauważmy, że dystrybuanty spektralne $F_{h(A_1)}$ i $F_{h(A_2)}$ są określone wzorem

$$(3.6.3) \quad F_{h(A_j)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\eta), \\ E_{A_j}([0, g^{-1}(-x)]), & x \in [-\eta, 0), \\ I, & x \in [0, \infty). \end{cases} \quad j = 1, 2,$$

co wynika z zależności

$$F_{h(A_j)}(x) = E_{A_j}(h^{-1}((-\infty, x])), \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2.$$

Skoro $F_{A_j}(y) = E_{A_j}([0, y])$ dla wszystkich $y \in [0, \infty)$ i $j = 1, 2$, to z równości (3.6.3) możemy wywnioskować, że $x \in \mathbb{R}$ operatory $F_{h(A_1)}(x)$ i $F_{h(A_2)}(x)$ są przemienne. Stosując [21, twierdzenie 2] do ograniczonych operatorów samosprzężonych $h(A_1)$ i $h(A_2)$ otrzymujemy, że $h(A_1) \preceq h(A_2)$. Stąd i z lematu 3.6.2 wynika, że $g(A_2) \preceq g(A_1)$, co kończy dowód. \square

Poniżej wyprowadzimy kilka ważnych wniosków z twierdzenia 3.6.5. Rozpocniemy od odpowiedzi na główne pytanie tego podrozdziału.

WNIOSEK 3.6.6. *Jeśli A i B są dodatnimi operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} i ε jest dodatnią liczbą rzeczywistą, to poniższe warunki są równoważne:*

- (i) $A \preceq B$,
- (ii) $(\varepsilon I + B)^{-1} \preceq (\varepsilon I + A)^{-1}$,
- (iii) $(\varepsilon I + B)^{-1} \leq (\varepsilon I + A)^{-1}$ oraz zachodzi (3.6.1),
- (iv) $A \leq B$ i zachodzi (3.6.1).

DOWÓD. Stosując twierdzenie 3.6.5 (z $\eta = \frac{1}{\varepsilon}$ i $g(x) = \frac{1}{\varepsilon+x}$ dla $x \in [0, \infty)$), widzimy, że warunki (i), (ii) oraz (iii) są równoważne. Implikacja (i) \Rightarrow (iv) wynika z propozycji 3.4.2. Ostatecznie, implikacja (iv) \Rightarrow (iii) jest bezpośrednią konsekwencją [11, twierdzenie 2.21, strona 330]. \square

WNIOSEK 3.6.7. *Jeśli A i B są operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} ograniczonymi z dołu i ε jest dodatnią liczbą rzeczywistą, to następujące warunki są równoważne:*

- (i) $A \preceq B$,
- (ii) $e^{-\varepsilon B} \preceq e^{-\varepsilon A}$,
- (iii) $e^{-\varepsilon B} \leq e^{-\varepsilon A}$ i zachodzi (3.6.1).

DOWÓD. Jeśli operatory A i B są dodatnie, to warunki (i), (ii) i (iii) są równoważne dzięki twierdzeniu 3.6.5 zastosowanemu do $\eta = 1$ i $g(x) = e^{-\varepsilon x}$, $x \in [0, \infty)$.

Przyjmijmy teraz, że A i B są operatorami samosprzężonymi ograniczonymi od dołu. Istnieje wówczas liczba rzeczywista a taka, że operatory $A_1 := A - aI_{\mathcal{H}}$ i $B_1 := B - aI_{\mathcal{H}}$ są samosprzężone oraz dodatnie. Na mocy propozycji 3.3.2, $A \preceq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1 \preceq B_1$. Jest

oczywistym, że $F_{C-aI_{\mathcal{H}}}(x) = F_C(x+a)$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $e^{-\varepsilon(C-aI_{\mathcal{H}})} = e^{\varepsilon a}e^{-\varepsilon C}$ dla dowolnego C operatora samosprzężonego w \mathcal{H} . Co więcej, jeśli D jest operatorem samosprzężonym, to $F_{rD}(x) = F_D(\frac{1}{r}x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i $r > 0$. To oznacza, że dowód redukuje się do przypadku dodatnich operatorów samosprzężonych A_1 i B_1 . \square

Przypomnijmy, że zgodnie z twierdzeniem Stone'a (por. [24, twierdzenie 13.37]) infinitezymalny generator C_0 -półgrupy ograniczonych operatorów samosprzężonych na \mathcal{H} jest zawsze samosprzężony.

WNIOSEK 3.6.8. *Niech $\{T_j(t)\}_{t \geq 0} \subseteq \mathbf{B}(\mathcal{H})$ będzie C_0 -półgrupą operatorów samosprzężonych i A_j będą ich infinitezymalnymi generatorami, $j = 1, 2$. Wówczas poniższe warunki są równoważne:*

- (i) $A_1 \preceq A_2$,
- (ii) $T_1(t) \preceq T_2(t)$ dla pewnego $t > 0$,
- (iii) $T_1(t) \preceq T_2(t)$ dla każdego $t > 0$,
- (iv) $T_1(t) \leq T_2(t)$ dla pewnego $t > 0$, i zachodzi równość (3.6.1),
- (v) $T_1(nt) \leq T_2(nt)$ dla pewnego $t > 0$ i dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$,
- (vi) $T_1(t) \leq T_2(t)$ dla każdego $t > 0$.

DOWÓD. Z twierdzenia Stone'a wynika, że operatory samosprzężone $-A_1$ i $-A_2$ są ograniczone od dołu oraz $T_j(t) = e^{-t(-A_j)}$ dla wszystkich $t \geq 0$. Korzystając z lematu 3.6.2 i wniosku 3.6.7 otrzymujemy, że warunki (i)-(iv) są równoważne.

(iii) \Rightarrow (vi) Wystarczy skorzystać z propozycji 3.4.2.

(vi) \Rightarrow (v) To jest oczywiste.

(v) \Rightarrow (ii) Zauważmy, że $T_j(nt) = T_j(t)^n$ oraz zastosujmy wniosek 3.4.8. To kończy dowód. \square

Charakteryzację (iii) porządku spektralnego, która pojawiła się we wniosku 3.6.6 można sformułować również dla operatorów samosprzężonych, które są ograniczone od dołu. Zauważmy, że w tej bardziej ogólnej sytuacji część wniosku 3.6.6 (iv), która posługuje się porządkiem „ \leq ” traci sens.

WNIOSEK 3.6.9. *Jeśli A i B są samosprzężonymi operatorami w \mathcal{H} ograniczonymi od dołu przez $a \in \mathbb{R}$, to dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > -a$ następujące warunki są równoważne:*

- (i) $A \preceq B$,
- (ii) $(\varepsilon I + B)^{-1} \preceq (\varepsilon I + A)^{-1}$,
- (iii) $(\varepsilon I + B)^{-1} \leq (\varepsilon I + A)^{-1}$ i zachodzi (3.6.1).

DOWÓD. Rozumujemy analogicznie jak w dowodzie wniosku 3.6.7 i stosujemy wniosek 3.6.6 do dodatnich operatorów samosprzężonych $A_a := A - aI_{\mathcal{H}}$ i $B_a := B - aI_{\mathcal{H}}$. \square

UWAGA 3.6.10. Twierdzenie 3.6.5 może sugerować, że przy badaniu porządku spektralnego można się ograniczyć do rozważania operatorów

ograniczonych, jednakże nie jest to prawdą. Chcąc być bardziej precyzyjnym rozważmy funkcję borelowską $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, która jest rozwiązaniem równania funkcyjnego $\phi \circ g = g \circ \phi$, gdzie g jest taka jak w twierdzeniu 3.6.5. Gdybyśmy wiedzieli, że

$$(3.6.4) \quad A \preceq B \implies \phi(A) \preceq \phi(B)$$

dla dowolnych dodatnich i ograniczonych operatorów A i B , to wówczas na mocy twierdzenia 3.6.5 implikacja (3.6.4) zachodziłaby dla wszystkich dodatnich operatorów samosprzężonych A i B . Należy zauważyć jednak, że ważny przypadek funkcji $\phi_s(x) = x^s$, $s > 0$ nie podpada pod powyższy schemat. Jest to konsekwencją faktu, że żadna z wymienionych przed chwilą funkcji nie spełnia równania funkcyjnego $\phi \circ g = g \circ \phi$.

3.7. Związki z istotną samosprzężonością

Podrozdział ten zaczniemy od przypomnienia fundamentalnej własności porządku spektralnego (por. propozycja 3.4.2):

jeśli A i B są dodatnimi operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} takimi, że $A \preceq B$, to $\mathcal{D}(B^n) \subseteq \mathcal{D}(A^n)$ i

$$(3.7.1) \quad \langle A^n h, h \rangle \leq \langle B^n h, h \rangle \text{ dla wszystkich } h \in \mathcal{D}(B^n) \text{ oraz } n \in \mathbb{N}.$$

W szczególności, nierówność (3.7.1) zachodzi dla wszystkich wektorów ograniczonych B , które tworzą gęsty podzbiór \mathcal{H} . W tym podrozdziale będziemy dyskutowali o kwestii implikacji odwrotnej nie zakładając przy tym, że operatory, którymi się zajmujemy, są samosprzężone. Na wstępie pokażemy, że dodatnie operatory symetryczne A i B spełniające słabą wersję wniosku 3.4.7 (iv) (analogiczną do nierówności (3.7.1)) na gęstym zbiorze wektorów ograniczonych B są istotnie samosprzężone i ich domknięcia są porównywalne względem porządku „ \preceq ”.

TWIERDZENIE 3.7.1. *Niech A i B będą symetrycznymi operatorami dodatnimi w \mathcal{H} i niech $\{k_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}_*$ oraz $\{r_n\}_{n=1}^\infty \subseteq [0, \infty)$ będą ciągami takimi, że:*

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$,
- (b) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k_n]{r_n} \leq 1$,
- (c) $\mathcal{B}(B)$ jest gęsty w \mathcal{H} ,
- (d) $\mathcal{B}(B) \subseteq \mathcal{D}^\infty(A)$,
- (e) $\langle A^{2k_n} h, h \rangle \leq r_n \langle B^{2k_n} h, h \rangle$ dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ i dla każdego $h \in \mathcal{B}(B)$.

Wówczas \bar{A} i \bar{B} są samosprzężone oraz $\bar{A} \preceq \bar{B}$.

DOWÓD. Na wstępie pokażemy, że \bar{A} i \bar{B} są samosprzężone. Ustalmy rzeczywistą liczbę $a > 0$ i weźmy $h \in \mathcal{B}_a(B)$. Z [30, lemat 8(a)] wynika, że dla dowolnego operatora samosprzężonego C w \mathcal{H} granica

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|C^n g\|}$ istnieje w $[0, \infty]$ dla wszystkich $g \in \mathcal{D}^\infty(C)$. Stąd otrzymamy, że¹⁰

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n h\|} &\stackrel{(a)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k_n]{\|A^{k_n} h\|} \stackrel{(d)\&(e)}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2^{k_n}]{r_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k_n]{\|B^{k_n} h\|} \\ &\stackrel{(b)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k_n]{\|B^{k_n} h\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|B^n h\|}. \end{aligned}$$

Stosując [30, lemat 8 (b)] wnioskujemy z powyższego, że $h \in \mathcal{B}_a(A)$. Zatem $\mathcal{B}_a(B) \subseteq \mathcal{B}_a(A)$, co implikuje, że $\mathcal{B}(B) \subseteq \mathcal{B}(A)$. Z założenia (c) i z ostatniej inkluzji wynika, że oba operatory A i B są istotnie samosprężone (por. propozycja 2.1.2).

Zapiszmy (e) w następujący sposób

$$(3.7.2) \quad \|A^{k_n} h\|^2 \leq r_n \|B^{k_n} h\|^2, \quad h \in \mathcal{B}(B), \quad n \geq 1.$$

Z (c) i z propozycji 2.1.2, $\mathcal{B}(B)$ jest rdzeniem \bar{B}^{k_n} . Weźmy $f \in \mathcal{D}(\bar{B}^{k_n})$. Wówczas istnieje ciąg $\{h_m\}_{m=1}^\infty \subseteq \mathcal{B}(B)$ taki, że $h_m \rightarrow f$ i $B^{k_n} h_m \rightarrow \bar{B}^{k_n} f$, gdy $m \rightarrow \infty$. Na mocy (3.7.2), ciąg $\{A^{k_n} h_m\}_{m=1}^\infty$ jest zbieżny w \mathcal{H} . Zatem $f \in \mathcal{D}(\bar{A}^{k_n})$ i $\bar{A}^{k_n} f = \lim_{m \rightarrow \infty} A^{k_n} h_m$. Równocześnie $\mathcal{B}(A)$ jest gęsty w \mathcal{H} dzięki (c) oraz inkluzji $\mathcal{B}(B) \subseteq \mathcal{B}(A)$. Stąd oraz z z propozycji 2.1.2 wnioskujemy, że $\bar{A}^{k_n} = \bar{A}^{k_n}$ i w związku z tym $f \in \mathcal{D}(\bar{A}^{k_n})$. Podstawiając $h = h_m$ w nierówności (3.7.2) i przechodząc z m do nieskończoności otrzymujemy, że $\|\bar{A}^{k_n} f\|^2 \leq r_n \|\bar{B}^{k_n} f\|^2$. Korzystając równocześnie z powyższych faktów i z założenia (a) widzimy, że $\mathcal{D}^\infty(\bar{B}) \subseteq \mathcal{D}^\infty(\bar{A})$ oraz $\langle \bar{A}^{2k_n} f, f \rangle \leq r_n \langle \bar{B}^{2k_n} f, f \rangle$ dla wszystkich $f \in \mathcal{D}^\infty(\bar{B})$ i $n \geq 1$. Stąd i z warunku (b) dzięki zastosowaniu twierdzenia 3.4.5 (ii) do dodatnich operatorów samosprężonych dostajemy, że $\bar{A} \preceq \bar{B}$. To kończy dowód. \square

WNIOSEK 3.7.2. *Niech A i B będą domkniętymi symetrycznymi operatorami w \mathcal{H} i niech $\{k_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}_*$ i $\{r_n\}_{n=1}^\infty \subseteq [0, \infty)$ będą ciągami takimi, że:*

- (a) $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ jest ciągiem różnowartościowym i $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} < \infty$,
- (b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k_n]{r_n} \leq 1$,
- (c) liniowe rozpięcie $\mathcal{S}(B)$ jest gęste w \mathcal{H} ,
- (d) $\mathcal{S}(B) \subseteq \mathcal{D}^\infty(A)$,
- (e) $\langle A^{2k_n} h, h \rangle \leq r_n \langle B^{2k_n} h, h \rangle$ dla każdego $n \geq 1$ i $h \in \mathcal{S}(B)$.

Wówczas A i B są samosprężone oraz $A \preceq B$.

Do dowodu powyższego wniosku będziemy potrzebowali następującego twierdzenia Nussbauma w wersji dla operatorów ograniczonych od dołu (zob. [20, twierdzenie 1.]), które przytoczymy poniżej bez dowodu.

¹⁰ Porównać z podobnym rozumowaniem zastosowanym w (3.4.2).

TWIERDZENIE 3.7.3. *Niech A będzie domkniętym operatorem symetrycznym ograniczonym od dołu w \mathcal{H} . Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- (i) A jest samosprzężony,
- (ii) liniowe rozpięcie $\mathcal{S}(A)$ jest gęste w \mathcal{H} .

DOWÓD wniosku 3.7.2. Na wstępie pokażemy, że $\mathcal{S}(B) \subseteq \mathcal{S}(A)$. Weźmy $h \in \mathcal{S}(B)$. Bez straty dla ogólności możemy założyć, że $\|h\| = 1$. Z symetrii operatora B wynika, że ciąg $\{\|B^n h\|^{-\frac{1}{n}}\}_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący (zobacz np., [33, nierówność (4)]). Na mocy (a), istnieje $s \in \mathbb{N}_*$ takie, że $k_n \leq sn$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_*$. Stąd otrzymamy, że

$$(3.7.3) \quad \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|B^{sn} h\|^{\frac{1}{2sn}}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|B^{k_n} h\|^{\frac{1}{2k_n}}}$$

(pierwszy z szeregów w (3.7.3) jest rozbieżny gdyż ciąg $\{\|B^n h\|^{-\frac{1}{2n}}\}_{n=1}^{\infty}$ jest malejący i $\sum_{n=1}^{\infty} \|B^n h\|^{-\frac{1}{2n}} = \infty$; zobacz [29, podrozdział 1]). Na mocy (b) znajdziemy liczbę rzeczywistą $t \geq 1$ taką, że $\sqrt[k_n]{r_n} \leq t^4$ dla wszystkich $n \geq 1$. To wraz z (3.7.3) implikuje, że

$$\begin{aligned} \infty &= \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|B^{k_n} h\|^{\frac{1}{2k_n}}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k_n} \sqrt[k_n]{r_n} \|B^{k_n} h\|^{\frac{1}{2k_n}}} \\ &\stackrel{(e)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|A^{k_n} h\|^{\frac{1}{2k_n}}} \stackrel{(a)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|A^n h\|^{\frac{1}{2n}}}, \end{aligned}$$

co oznacza, że $h \in \mathcal{S}(A)$.

Na mocy (c) i poprzedniego paragrafu wynika, że liniowe rozpięcia zbiorów $\mathcal{S}(A)$ i $\mathcal{S}(B)$ są gęste w \mathcal{H} . W konsekwencji z twierdzenia 3.7.3 operatory A i B są samosprzężone i zbiór $\mathcal{B}(B) (\subseteq \mathcal{S}(B))$ jest gęsty w \mathcal{H} . Zastosowanie twierdzenia 3.7.1 kończy dowód. \square

Wielowymiarowy porządek spektralny

4.1. Zbiory ćwiartkowe i funkcje oddzielnie rosnące

Rozważania dotyczące wielowymiarowego porządku spektralnego poprzedzimy zebraniem i uporządkowaniem wiadomości na temat funkcji oddzielnie rosnących i zbiorów ćwiartkowych.

Niech κ będzie dowolną liczbą naturalną różną od zera. Na zbiorze \mathbb{R}^κ rozważamy topologię zadaną przez metrykę euklidesową. Niech $a, b \in \overline{\mathbb{R}^\kappa}$. Piszemy, że $a \leq b$ (odpowiednio $a < b$), jeśli $a_j \leq b_j$ (odpowiednio $a_j < b_j$), dla każdego $j = 1, \dots, \kappa$, gdzie $a = (a_1, \dots, a_\kappa)$ i $b = (b_1, \dots, b_\kappa)$. Przez przedział $(a, b]$ (odpowiednio $[a, b]$) rozumiemy zbiór $\{x \in \overline{\mathbb{R}^\kappa} : a < x \leq b\}$ (odpowiednio $\{x \in \overline{\mathbb{R}^\kappa} : a \leq x \leq b\}$). Dla uproszczenia notacji będziemy używać oznaczenia ∞ zamiast $(\underbrace{\infty, \dots, \infty}_\kappa)$. W szczególności,

jeśli $x \in \mathbb{R}^\kappa$, to $(-\infty, x] = \{y \in \mathbb{R}^\kappa : y \leq x\} = (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_\kappa]$, gdzie $x = (x_1, \dots, x_\kappa)$.

DEFINICJA 4.1.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^\kappa$. Mówimy, że zbiór Ω jest zbiorem ćwiartkowym, gdy dla dowolnego $x \in \Omega$ zachodzi inkluzja $(-\infty, x] \subset \Omega$.

OBSERWACJA 4.1.2. Niech Γ będzie rodziną ćwiartkowych podzbiorów \mathbb{R}^κ . Wówczas $\bigcap \Gamma$ jest zbiorem ćwiartkowym.

Dla $\Omega \subset \mathbb{R}^\kappa$ zdefiniujemy zbiór

$$\Omega^\neg := \bigcap \{W \subset \mathbb{R}^\kappa : W \text{ jest ćwiartkowy i } \Omega \subset W\}.$$

Na mocy obserwacji 4.1.2 Ω^\neg jest najmniejszym zbiorem ćwiartkowym zawierającym zbiór Ω .

OBSERWACJA 4.1.3. Niech $\Omega, \Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^\kappa$. Wówczas

- (i) $\Omega^\neg = \bigcup_{x \in \Omega} (-\infty, x]$,
- (ii) jeśli $\Omega_1 \subset \Omega_2$, to $\Omega_1^\neg \subset \Omega_2^\neg$,
- (iii) jeśli Ω jest zbiorem zwartym, to Ω^\neg jest zbiorem domkniętym.

DOWÓD. (i) (\supset) wynika wprost z definicji zbioru Ω^\neg .

(\subset) Wystarczy zauważyć, że $\bigcup_{x \in \Omega} (-\infty, x]$ jest zbiorem ćwiartkowym zawierającym Ω .

(ii) To jest oczywiste.

(iii) Ustalmy $x \in \overline{\Omega^\neg}$. Istnieje wówczas ciąg $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega^\neg$ taki, że $x_n \rightarrow x$, gdy $n \rightarrow \infty$. Na mocy (i) znajdziemy ciąg $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega$

spełniający warunek $x_n \leq y_n$ dla $n = 1, 2, \dots$. Dzięki zwartości Ω z ciągu $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega$ możemy wybrać podciąg $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ zbieżny do pewnego $y \in \Omega$. W szczególności $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y$. Stąd i z (i) wynika, że $x \in \Omega^\neg$. \square

Nawiązując do obserwacji 4.1.3 (iii) warto zwrócić uwagę, że w przypadku, gdy $\kappa \geq 2$, domkniętość zbioru Ω nie gwarantuje, że Ω^\neg jest domknięty. Sytuację tą obrazuje następujący przykład.

PRZYKŁAD 4.1.4. Niech $\Omega = \{(-\frac{1}{n}, n) : n \in \mathbb{N}_*\}$. Oczywiście Ω jest domknięty. Z drugiej strony na mocy obserwacji 4.1.3 (i) otrzymujemy, że $\Omega^\neg = \bigcup_{n=1}^\infty (-\infty, (-\frac{1}{n}, n)] = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$. Tym samym Ω^\neg nie jest domknięty.

DEFINICJA 4.1.5. Niech $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{N}_*$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{\kappa_1}$ oraz $\varphi : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^{\kappa_2}$. Powiemy, że φ jest funkcją oddzielnie rosnącą jeśli

$$x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y),$$

dla dowolnych $x, y \in \Omega$.

Wprost z definicji funkcji oddzielnie rosnącej wynika następująca własność

OBSERWACJA 4.1.6. Niech $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{N}_*$ i $\Omega \subset \mathbb{R}^{\kappa_1}$. Wówczas $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{\kappa_2}) : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^{\kappa_2}$ jest funkcją oddzielnie rosnącą wtedy i tylko wtedy, gdy φ_j jest funkcją oddzielnie rosnącą dla każdego $j = 1, \dots, \kappa_2$.

Następne stwierdzenie łączy pojęcia zbioru ćwiartkowego i funkcji oddzielnie rosnącej.

STWIERDZENIE 4.1.7. Niech $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{N}_*$. Wówczas $\varphi : \mathbb{R}^{\kappa_1} \rightarrow \mathbb{R}^{\kappa_2}$ (odpowiednio $\varphi : \mathbb{R}^{\kappa_1} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^{\kappa_2}$) jest funkcją oddzielnie rosnącą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in \mathbb{R}^{\kappa_2}$ zbiór $\varphi^{-1}((-\infty, x])$ jest ćwiartkowy (odpowiednio dla każdego $x \in \overline{\mathbb{R}}^{\kappa_2}$ zbiór $\varphi^{-1}([-\infty, x])$ jest ćwiartkowy).

DOWÓD. Dowód przeprowadzimy tylko dla funkcji $\varphi : \mathbb{R}^{\kappa_1} \rightarrow \mathbb{R}^{\kappa_2}$, ponieważ drugi z przypadków dowodzi się analogicznie.

(\Rightarrow) Wynika wprost z definicji funkcji oddzielnie rosnącej.

(\Leftarrow) Ustalmy $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{\kappa_1}$ takie, że $x_1 \leq x_2$. Zauważmy, że $x_1 \in \Omega := \varphi^{-1}((-\infty, \varphi(x_2)])$, ponieważ Ω jest ćwiartkowy i $x_2 \in \Omega$. Stąd wynika, że $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$. \square

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^\kappa$ oraz niech będzie dana liczba rzeczywista $\epsilon > 0$. Jeśli $\|\cdot\|$ jest normą na \mathbb{R}^κ , to definiujemy następujący zbiór¹

$$(4.1.1) \quad \Omega^{(\epsilon)} := \{x \in \mathbb{R}^\kappa : \inf_{y \in \Omega} \|x - y\| \leq \epsilon\}.$$

¹Przyjmujemy z definicji, że $\inf \emptyset = \infty$.

STWIERDZENIE 4.1.8. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^\kappa$ będzie zbiorem ćwiartkowym oraz niech $\|\cdot\|$ będącą dowolną normą na \mathbb{R}^κ . Wówczas

- (i) funkcja odległości od zbioru Ω jest funkcją oddzielnie rosnącą²,
- (ii) $\Omega^{(\epsilon)}$ jest zbiorem ćwiartkowym dla dowolnego $\epsilon > 0$.

DOWÓD. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\Omega \neq \emptyset$.

(i) Niech $x, y \in \mathbb{R}^\kappa$ będą takie, że $x \leq y$. Wykażemy, że $d_\Omega(x) \leq d_\Omega(y)$. Ustalmy liczbę rzeczywistą $\epsilon > 0$. Ponieważ $\Omega \neq \emptyset$, to istnieje $y_\epsilon \in \Omega$ takie, że $\|y - y_\epsilon\| < d_\Omega(y) + \epsilon$. Ponieważ $x \leq y$, to $x_\epsilon := y_\epsilon + x - y \leq y_\epsilon$. Stąd oraz tego, że Ω jest ćwiartkowy wynika, że $x_\epsilon \in \Omega$. Oczywiście $\|x - x_\epsilon\| = \|y - y_\epsilon\| < d_\Omega(y) + \epsilon$. Stąd wnioskujemy, że $d_\Omega(x) \leq d_\Omega(y) + \epsilon$. Przechodząc z ϵ do 0 otrzymamy żadaną nierówność.

(ii) Wystarczy zauważyć, że $\Omega^{(\epsilon)} = d_\Omega^{-1}((-\infty, \epsilon])$ oraz skorzystać z (i) oraz ze stwierdzenia 4.1.7. \square

Na zakończenie tego podrozdziału odnotujmy, że nie każda funkcja oddzielnie rosnąca $f: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ musi być borelowska. Uwaga ta nie dotyczy jedynie przypadku $\kappa = 1$, w którym monotoniczność funkcji gwarantuje jej borelowskość (zob. lemat 3.3.1).

PRZYKŁAD 4.1.9. Niech $V \subset [0, 1]$ będzie zbiorem Vitaliego (por. [14, str. 118]). Niech $S_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y < 0\}$, $S_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 0 \text{ i } x \in V\}$ oraz $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 0\}$. Wówczas funkcja $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $\varphi := \chi_{\mathbb{R}^2 \setminus (S_1 \cup S_2)}$ jest funkcją oddzielnie rosnącą. Z drugiej strony zauważmy, że funkcja φ nie jest funkcją borelowską. Gdyby φ była funkcją borelowską, to zbiór $\varphi^{-1}((-\infty, \frac{1}{2}]) = S_1 \cup S_2$ byłby zbiorem borelowskim w \mathbb{R}^2 . Stąd oraz z tego, że zbiór S_1 jest otwarty w \mathbb{R}^2 wynika, że zbiór $S_2 = (S_1 \cup S_2) \setminus S_1$ jest zbiorem borelowskim w \mathbb{R}^2 . Jeśli na S wprowadzimy topologię indukowaną z \mathbb{R}^2 , to na mocy równości (2.1.1) otrzymamy, że $S_2 \in \mathfrak{B}(S)$. Ponieważ $\pi: S \ni (x, y) \rightarrow x \in \mathbb{R}$ jest homeomorfizmem, to zbiór $V = \pi(S_2) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Otrzymujemy sprzeczność, wobec tego φ nie jest funkcją borelowską.

4.2. Regularność miar spektralnych

W tym podrozdziale przypomnimy kilka faktów dotyczących regularności miar. Zaczniemy od następującego twierdzenia (zob. [1, twierdzenie 4.3.8.]).

TWIERDZENIE 4.2.1. Jeśli X jest ośrodkową i zupełną przestrzenią metryczną oraz μ jest miarą skończoną na $\mathfrak{B}(X)$, to

$$\mu(\sigma) = \sup\{\mu(K): K \text{ zwarty podzbiór } \sigma\},$$

dla każdego $\sigma \in \mathfrak{B}(X)$.

²Z definicji $d_\Omega(x) := \inf\{\|x - y\|: y \in \Omega\}$ dla $x \in \mathbb{R}^\kappa$.

WNIOSEK 4.2.2. Niech X będzie ośrodkową i zupełną przestrzenią metryczną oraz niech E będzie miarą spektralną na $\mathfrak{B}(X)$. Jeśli $\sigma \in \mathfrak{B}(X)$, to

$$E(\sigma) = \bigvee \{E(K) : K \text{ zwarty podzbiór } \sigma\}.$$

DOWÓD. Niech $E_0(\sigma) := \bigvee \{E(\tau) : \tau \text{ zwarty podzbiór } \sigma\}$. Przypuśćmy nie wprost, że $E(\sigma) \neq E_0(\sigma)$. Ponieważ $E_0(\delta) \leq E(\delta)$ dla każdego $\delta \in \mathfrak{B}(X)$, to istnieje $h \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ takie, że $h = E(\sigma)h$ oraz $E(\tau)h = 0$ dla każdego zbioru zwartego $\tau \subset \sigma$. W szczególności

$$(4.2.1) \quad \mu_h(\tau) := \langle E(\tau)h, h \rangle = 0, \text{ dla każdego zbioru zwartego } \tau \subset \sigma.$$

Oczywiście μ_h jest skończoną miarą na $\mathfrak{B}(X)$. Stąd na mocy twierdzenia 4.2.1 oraz równości (4.2.1) otrzymujemy, że $\mu_h(\sigma) = 0$. Z drugiej strony ponieważ $h \neq 0$, to

$$0 < \|h\|^2 = \langle E(\sigma)h, h \rangle = \mu_h(\sigma).$$

Otrzymujemy sprzeczność, co kończy dowód. \square

Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz niech E będzie miarą spektralną na $\mathfrak{B}(X)$. Zbiór $Y \subset X$ nazywamy nośnikiem miary spektralnej E , gdy Y jest najmniejszym (w sensie inkluzji) podzbiorem domkniętym X takim, że $E(X \setminus Y) = 0$. Nośnik miary spektralnej E oznaczamy przez $\text{supp } E$. Nietrudno pokazać, że punkt $x \in \text{supp } E$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego U otoczenia x mamy $E(U) \neq 0$. Wiadomo również, że dla każdej miary spektralnej E na $\mathfrak{B}(X)$, gdzie X jest ośrodkową i zupełną przestrzenią metryczną, nośnik istnieje (por. [2, strona 129]). Własność tę można łatwo wydedukować także z wniosku 4.2.2.

Na koniec przypomnijmy, że jeśli A jest operatorem samosprężonym w \mathcal{H} , to $\text{supp } E_A = \sigma(A)$, gdzie $\sigma(A)$ oznacza widmo operatora A . W szczególności operator samosprężony A jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{supp } E_A \subset [0, \infty)$ (por. [2, 24]).

4.3. Nierówności całkowe na \mathbb{R}^k

Zajmiemy się teraz nierównościami całkowymi na \mathbb{R}^k . Sformułujemy i udowodnimy twierdzenie 4.3.2, które będzie zwieńczeniem rozważań prowadzonych w podrozdziałach 2.2 i 2.3.

Do dowodu wspomnianego przed chwilą twierdzenia będziemy potrzebowali poniższego lematu

LEMAT 4.3.1. Niech μ będzie skończoną miarą borelowską na \mathbb{R}^k . Wówczas dla dowolnego zbioru ćwiartkowego $\Omega \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$ zachodzi równość

$$\mu(\Omega) = \sup \{ \mu(D) : D \subset \Omega, D = \overline{D} = D^- \}.$$

DOWÓD. Ustalmy zbiór ćwiartkowy $\Omega \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\kappa)$. Stosując twierdzenie 4.2.1 oraz obserwację 4.1.3 otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \mu(\Omega) &\stackrel{4.2.1}{=} \sup\{\mu(K) : K \subset \Omega, K - \text{zwarty}\} \\ &\leq \sup\{\mu(K^-) : K \subset \Omega, K - \text{zwarty}\} \\ &\stackrel{4.1.3}{\leq} \sup\{\mu(D) : D \subset \Omega, D = \overline{D} = D^-\} \leq \mu(\Omega). \end{aligned}$$

W szczególności $\mu(\Omega) = \sup\{\mu(D) : D \subset \Omega, D = \overline{D} = D^-\}$. \square

Po zakończeniu przygotowań możemy przejść do sformułowania i udowodnienia twierdzenia o nierównościach na \mathbb{R}^κ , gdzie κ jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Twierdzenie to jest uogólnieniem twierdzeń 2.2.1 i 2.3.1.

TWIERDZENIE 4.3.2. *Niech μ_1 i μ_2 będą skończonymi nieujemnymi miarami borelowskimi na \mathbb{R}^κ . Rozważmy następujące pięć warunków:*

- (i) $\mu_2(\Omega) \leq \mu_1(\Omega)$ dla każdego zbioru ćwiartkowego $\Omega \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\kappa)$,
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^\kappa} f d\mu_1 \leq \int_{\mathbb{R}^\kappa} f d\mu_2$ dla każdej funkcji borelowskiej oddzielnie rosnącej $f : \mathbb{R}^\kappa \rightarrow [0, \infty)$,
- (iii) $\int_{\mathbb{R}^\kappa} f d\mu_1 \leq \int_{\mathbb{R}^\kappa} f d\mu_2$ dla każdej funkcji borelowskiej oddzielnie rosnącej $f : \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że $\int_{\mathbb{R}^\kappa} |f| d\mu_2 < \infty$ (całka $\int_{\mathbb{R}^\kappa} f d\mu_1$ może być równa $-\infty$),
- (iv) $\int_{\mathbb{R}^\kappa} f d\mu_1 \leq \int_{\mathbb{R}^\kappa} f d\mu_2$ dla każdej ograniczonej oddzielnie rosnącej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$,
- (v) $\int_{\mathbb{R}^\kappa} f d\mu_1 \leq \int_{\mathbb{R}^\kappa} f d\mu_2$ dla każdej ograniczonej oddzielnie rosnącej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R}^\kappa \rightarrow [0, \infty)$.

Wówczas warunek (i) (odpowiednio : (ii), (iii)) implikuje, że $\mu_2(\mathbb{R}^\kappa) \leq \mu_1(\mathbb{R}^\kappa)$ (odpowiednio: $\mu_1(\mathbb{R}^\kappa) \leq \mu_2(\mathbb{R}^\kappa)$, $\mu_1(\mathbb{R}^\kappa) = \mu_2(\mathbb{R}^\kappa)$). Z nierówności $\mu_1(\mathbb{R}^\kappa) \leq \mu_2(\mathbb{R}^\kappa)$ oraz (i) wynika, że $\mu_1(\mathbb{R}^\kappa) = \mu_2(\mathbb{R}^\kappa)$. Jeśli $\mu_1(\mathbb{R}^\kappa) = \mu_2(\mathbb{R}^\kappa)$, to wszystkie warunki (i)-(v) są równoważne.

DOWÓD. Załóżmy, że $\mu_1(\mathbb{R}^\kappa) = \mu_2(\mathbb{R}^\kappa)$ (pozostałe fragmenty tezy są oczywiste).

(i) \Rightarrow (iii) Niech $f : \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją borelowską oddzielnie rosnącą taką, że $\int_{\mathbb{R}^\kappa} |f| d\mu_2 < \infty$. Połóżmy $\nu_j(\sigma) := \mu_j(f^{-1}(\sigma))$ dla każdego $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ i $j = 1, 2$. Oczywiście ν_1 i ν_2 są skończonymi nieujemnymi miarami borelowskimi na \mathbb{R} . Ze stwierdzenia 4.1.7 wynika, że zbiór $f^{-1}((-\infty, x])$ jest zbiorem ćwiartkowym. Stąd i z założenia otrzymujemy, że

$$\nu_2((-\infty, x]) = \mu_2(f^{-1}((-\infty, x])) \leq \mu_1(f^{-1}((-\infty, x])) = \nu_1((-\infty, x])$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Równocześnie

$$\nu_1(\mathbb{R}) = \mu_1(\mathbb{R}^\kappa) = \mu_2(\mathbb{R}^\kappa) = \nu_2(\mathbb{R}).$$

Z twierdzenia o transporcie miary wynika, że

$$\int_{\mathbb{R}^k} |x| d\nu_2(x) = \int_{\mathbb{R}^k} |f| d\mu_2 < \infty.$$

Ostatecznie korzystając z twierdzenia o transporcie miary i twierdzenia 2.3.1 dostaniemy, że

$$\int_{\mathbb{R}^k} f d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}^k} x d\nu_1(x) \leq \int_{\mathbb{R}^k} x d\nu_2(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f d\mu_2.$$

(iii) \Rightarrow (ii) To jest oczywiste.

(ii) \Rightarrow (i) Niech $\Omega \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$ będzie zbiorem ćwiartkowym. Wówczas funkcja $f = \chi_{\mathbb{R}^k \setminus \Omega}$ jest oddzielnie rosnącą funkcją borelowską. Stąd i z założenia wynika, że

$$\mu_1(\mathbb{R}^k) - \mu_1(\Omega) = \mu_1(\mathbb{R}^k \setminus \Omega) \stackrel{(ii)}{\leq} \mu_2(\mathbb{R}^k \setminus \Omega) = \mu_2(\mathbb{R}^k) - \mu_2(\Omega),$$

co wraz z równością $\mu_1(\mathbb{R}^k) = \mu_2(\mathbb{R}^k)$ oznacza, że $\mu_2(\Omega) \leq \mu_1(\Omega)$.

Implikacje (iii) \Rightarrow (iv) i (iv) \Rightarrow (v) są oczywiste.

(v) \Rightarrow (i) Na mocy lematu 4.3.1 dowód redukuje się do wykazania, że

$$(4.3.1) \quad \mu_2(D) \leq \mu_1(D),$$

dla każdego domkniętego zbioru ćwiartkowego $D \subset \mathbb{R}^k$.

Przejdźmy do dowodu nierówności (4.3.1). Ustalmy domknięty zbiór ćwiartkowy $D \subset \mathbb{R}^k$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}_*$ zdefiniujmy funkcję $f_n: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $f_n(x) := \min\{1, nd_D(x)\}$, gdzie $x \in \mathbb{R}^k$. Oczywiście $0 \leq f_n(x) \leq 1$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \chi_{\mathbb{R}^k \setminus D}(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^k$. Funkcje f_n są ciągłe oraz oddzielnie rosnące, bo d_D jest funkcją ciągłą i oddzielnie rosnącą (por. obserwacja 4.1.7). Korzystając z założenia oraz twierdzenia Lebesgue'a o monotonicznym przejściu do granicy pod znakiem całki wywnioskujemy, że

$$\mu_1(\mathbb{R}^k) - \mu_1(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} f_n d\mu_1 \stackrel{(v)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} f_n d\mu_2 = \mu_2(\mathbb{R}^k) - \mu_2(D).$$

Ponieważ $\mu_1(\mathbb{R}^k) = \mu_2(\mathbb{R}^k)$, to $\mu_2(D) \leq \mu_1(D)$, co kończy dowód. \square

UWAGA 4.3.3. Jeśli μ_1 i μ_2 są skończonymi nieujemnymi miarami borelowskimi na \mathbb{R}^k takimi, że $\mu_1(\mathbb{R}^k) = \mu_2(\mathbb{R}^k)$, to warunek

$$(4.3.2) \quad \mu_2((-\infty, x]) \leq \mu_1((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}^k,$$

nie musi implikować warunków (i)-(v) w twierdzeniu 4.3.2. Rzeczywiście zdefiniujmy dwie miary borelowskie μ_1 i μ_2 na \mathbb{R}^2 w następujący sposób

$$\mu_1 := \delta_{(0,0)} + \delta_{(1,1)} \quad \text{i} \quad \mu_2 := \delta_{(0,1)} + \delta_{(1,0)},$$

gdzie $\delta_{(0,0)}$, $\delta_{(0,1)}$, $\delta_{(1,0)}$ i $\delta_{(1,1)}$ są miarami Diraca określonymi na $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$. Oczywiście $\mu_1(\mathbb{R}^2) = \mu_2(\mathbb{R}^2) = 2$ oraz $\mu_2((-\infty, x]) \leq \mu_1((-\infty, x])$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^2$. Z drugiej strony $\mu_1(S) < \mu_2(S)$, gdzie $S = \{(x_1, x_2) \in$

$\mathbb{R}^2: x_1 + x_2 \leq 1\}$. Tym samym nie jest spełniony warunek (i) z twierdzenia 4.3.2, co pociąga za sobą, że miary μ_1 i μ_2 nie spełniają żadnego z warunków (i)-(v).

4.4. Wielowymiarowy porządek spektralny

W niniejszym podrozdziale zajmiemy się problemem przeniesienia porządku spektralnego z przypadku pojedynczych operatorów samosprzężonych na przypadek skończonych układów spektralnie przemiennych operatorów samosprzężonych. Jednak zanim podamy odpowiednią definicję i zbadamy własności tego porządku przypomnimy kilka podstawowych wiadomości na temat miar spektralnych na $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\kappa)$ i dystrybuant spektralnych na \mathbb{R}^κ .

Mówimy, że układ $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} jest spektralnie przemienny jeśli operatory A_i i A_j są spektralnie przemienne dla dowolnych $i, j \in \{1, \dots, \kappa\}$.

Niech E będzie borelowską miarą spektralną na \mathbb{R}^κ o wartościach w $\mathbf{B}(\mathcal{H})$. Powiemy, że E jest wspólną miarą spektralną spektralnie przemiennego układu $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} jeśli

$$(4.4.1) \quad E_{A_j}(\sigma) = E(\pi_j^{-1}(\sigma)), \quad \sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}), j = 1, \dots, \kappa,$$

gdzie $\pi_j: \mathbb{R}^\kappa \ni (x_1, \dots, x_\kappa) \rightarrow x_j \in \mathbb{R}$. Twierdzenie 5.2.6. w [2] gwarantuje, że dla każdego spektralnie przemiennego układu operatorów samosprzężonych \mathbf{A} istnieje dokładnie jedna miara spektralna spełniająca równanie (4.4.1). W dalszym ciągu wspólną miarą spektralną układu \mathbf{A} będziemy oznaczać przez $E_{\mathbf{A}}$. Poniższe twierdzenie przedstawia jedną z najważniejszych własności wspólnych miar spektralnych (por. [2, twierdzenie 6.5.1.]

TWIERDZENIE 4.4.1. *Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ będzie spektralnie przemiennym układem operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} oraz niech E będzie miarą spektralną na $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\kappa)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- (i) $A_j = \int_{\mathbb{R}^\kappa} x_j E(dx)$ dla każdego $j = 1, \dots, \kappa$,
- (ii) zachodzi równość $E = E_{\mathbf{A}}$.

Przypomnijmy w tym miejscu jeszcze jedną własność wspólnej miary spektralnej.

OBSERWACJA 4.4.2. *Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ będzie układem spektralnie przemiennych operatorów samosprzężonych. Jeśli $\sigma_1, \dots, \sigma_\kappa \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, to*

$$(4.4.2) \quad E_{\mathbf{A}}(\sigma_1 \times \dots \times \sigma_\kappa) = E_{A_1}(\sigma_1) \dots E_{A_\kappa}(\sigma_\kappa).$$

DOWÓD. Niech $\sigma_1, \dots, \sigma_\kappa \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Wówczas na mocy tego, że $E_{\mathbf{A}}$ jest rozwiązaniem równania (4.4.1) otrzymamy następujące równości

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}}(\sigma_1 \times \dots \times \sigma_\kappa) &= E_{\mathbf{A}}\left(\bigcap_{j=1}^{\kappa} (\mathbb{R} \times \dots \times \underbrace{\sigma_j}_{j} \times \dots \times \mathbb{R})\right) \\ &= \prod_{j=1}^{\kappa} E_{\mathbf{A}}(\mathbb{R} \times \dots \times \underbrace{\sigma_j}_{j} \times \dots \times \mathbb{R}) \stackrel{(4.4.1)}{=} \prod_{j=1}^{\kappa} E_{A_j}(\sigma_j). \end{aligned}$$

To kończy dowód. \square

Poniższa obserwacja opisuje związki pomiędzy nośnikiem wspólnej miary spektralnej układu operatorów a nośnikami miar spektralnych poszczególnych operatorów tego układu (por. [2, strona 155]).

OBSERWACJA 4.4.3. *Jeżeli $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ jest układem spektralnie przemiennych operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} , to*

$$(4.4.3) \quad \text{supp } E_{\mathbf{A}} \subset \text{supp } E_{A_1} \times \dots \times \text{supp } E_{A_\kappa}.$$

DOWÓD. Niech $\sigma_j := \text{supp } E_{A_j}$ dla $j = 1, \dots, \kappa$. Z definicji nośnika miary spektralnej wiemy, że $E_{A_j}(\mathbb{R} \setminus \sigma_j) = 0$ dla $j = 1, \dots, \kappa$. Stąd i z równości (4.4.2) dostaniemy, że

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A}}(\mathbb{R}^\kappa \setminus (\sigma_1 \times \dots \times \sigma_\kappa)) &= E_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j=1}^{\kappa} \mathbb{R} \times \dots \times \underbrace{\mathbb{R} \setminus \sigma_j}_{j} \times \dots \times \mathbb{R}\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\kappa} E_{\mathbf{A}}(\mathbb{R} \times \dots \times \underbrace{\mathbb{R} \setminus \sigma_j}_{j} \times \dots \times \mathbb{R}) \stackrel{(4.4.2)}{=} \sum_{j=1}^{\kappa} E_{A_j}(\mathbb{R} \setminus \sigma_j) = 0. \end{aligned}$$

Stąd i z definicji nośnika wynika, że $\text{supp } E_{\mathbf{A}} \subset \sigma_1 \times \dots \times \sigma_\kappa$, co kończy dowód. \square

Zdefiniujmy $F_{\mathbf{A}}(x) := E_{\mathbf{A}}((-\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}^\kappa$. Funkcję $F_{\mathbf{A}}$ będziemy nazywać wspólną dystrybuantą spektralną układu \mathbf{A} . Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym dystrybuanty spektralne można wprowadzić bez odwoływania się do pojęcia miar spektralnych. Dla pełności wyводу i wygody czytelnika przedstawiamy poniżej abstrakcyjną definicję dystrybuanty spektralnej w przypadku wielowymiarowym oraz szkic konstrukcji miary spektralnej zadającej daną dystrybuantę spektralną. Więcej na ten temat można znaleźć w [1] i [2].

Przez przedział prawostronnie domknięty w \mathbb{R}^κ rozumiemy zbiór postaci $(a, b] := \{x \in \mathbb{R}^\kappa : a < x \leq b\}$, gdzie $a, b \in \overline{\mathbb{R}^\kappa}$. Niech $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^\kappa)$ oznacza algebrę wszystkich skończonych sum parami rozłącznych przedziałów prawostronnie domkniętych w \mathbb{R}^κ .

Dla $c, d \in \mathbb{R}$ i $j \in \{1, \dots, \kappa\}$ definiujemy pomocniczo tzw. operator różnicowy $\Delta_{d,c}^{(j)}$. Jeśli $F: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H})$, to

$$\begin{aligned} & \Delta_{d,c}^{(j)} F((x_1, \dots, x_\kappa)) \\ & := F(x_1, \dots, x_{j-1}, d, x_{j+1}, \dots, x_\kappa) - F(x_1, \dots, x_{j-1}, c, x_{j+1}, \dots, x_\kappa) \end{aligned}$$

dla wszystkich $x_1, \dots, x_\kappa \in \mathbb{R}$. W szczególności dla $a, b \in \mathbb{R}^\kappa$ możemy zdefiniować przyrost funkcji F wzorem

$$F(a, b] := \Delta_{b_1, a_1}^{(1)} \cdots \Delta_{b_\kappa, a_\kappa}^{(\kappa)} F(x_1, \dots, x_\kappa),$$

gdzie $a = (a_1, \dots, a_\kappa)$ i $b = (b_1, \dots, b_\kappa)$.

Postępując podobnie jak w [1] wprowadzamy dystrybuanty spektralne na \mathbb{R}^κ , czyli funkcje $F: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{H})$ spełniające trzy warunki:

- (i) $F(a, b] \in \mathbf{P}(\mathcal{H})$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}^\kappa$ takich, że $a \leq b$,³
- (ii) $s - \lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = F(x_0)$ dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}^\kappa$ i dowolnego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^\kappa$ takiego, że $x_n \searrow x_0$,⁴
- (iii) $s - \lim_{x \searrow x_0} F(x) = F(x_0)$ dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}^\kappa$ (względem porządku „ \leq ” w \mathbb{R}^κ),
- (iv) $s - \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n, b_n] = I$ dla dowolnych ciągów $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^\kappa$ i $\{b_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^\kappa$ takich, że $a_n \searrow -\infty$ i $b_n \nearrow \infty$.

Analogicznie jak w przypadku skalarnym dowodzi się, że $F(a', b'] \leq F(a, b]$ dla dowolnych $a, a', b, b' \in \mathbb{R}^\kappa$ spełniających nierówności $a \leq a' \leq b' \leq b$.

Dla dowolnej miary spektralnej E na $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\kappa)$ funkcja $F: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{H})$ zadana wzorem $F(x) = E((-\infty, x])$, gdzie $x \in \mathbb{R}^\kappa$, jest dystrybuantą spektralną. Poniższe twierdzenie pokazuje, że każda dystrybuanta spektralna na \mathbb{R}^κ pochodzi od dokładnie jednej miary spektralnej na $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\kappa)$.

TWIERDZENIE 4.4.4. *Niech F będzie dystrybuantą spektralną na \mathbb{R}^κ . Wówczas istnieje dokładnie jedna miara spektralna na $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\kappa)$ taka, że*

$$(4.4.4) \quad E((a, b]) = F(a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}^\kappa, \quad a \leq b.$$

SZKIC DOWODU. *Jednoznaczność.* Jednoznaczność jest konsekwencją następującego lematu.

LEMAT 4.4.5. *Niech \mathcal{M} będzie σ -algebrą na zbiorze X a E_1 i E_2 będą miarami spektralnymi na \mathcal{M} o wartościach w $\mathbf{B}(\mathcal{H})$. Jeśli $\mathcal{N} := \{\tau \in \mathcal{M} : E_1(\tau) = E_2(\tau)\}$, to \mathcal{N} jest σ -algebrą na zbiorze X .*

Istnienie. Na wstępie definiujemy funkcję $E^0: \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^\kappa) \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{H})$ w kilku krokach:

³Funkcję $F(a, b]$, która jest stała, utożsamiamy z $F(a, b](0) \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$.

⁴Symbol $a_n \searrow a_0$ (odpowiednio $a_n \nearrow a_0$) oznacza, że ciąg $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^\kappa$ jest malejący (odpowiednio rosnący) względem porządku „ \leq ” w \mathbb{R}^κ oraz zbieżny do $a_0 \in \overline{\mathbb{R}^\kappa}$.

Krok 1. Dla $a, b \in \mathbb{R}^\kappa$ takich, że $a \leq b$, definiujemy $E^0((a, b]) := F(a, b]$.

Krok 2. Jeśli $a, b \in \overline{\mathbb{R}}^\kappa$ spełniają nierówność $a \leq b$, to przyjmujemy $E^0((a, b]) := s - \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n, b_n]$, gdzie $a_n, b_n \in \mathbb{R}^\kappa$ dla \mathbb{N}_* oraz $a_n \searrow a$ i $b_n \nearrow b$. Istnienie tej granicy wynika z uwagi przed twierdzeniem.

Krok 3. Dla $J = \bigcup_{j=1}^n J_j$, gdzie J_j są parami rozłącznymi przedziałami prawostronnie domkniętymi w \mathbb{R}^κ , przyjmujemy $E^0(J) := \sum_{j=1}^n E^0(J_j)$.

E^0 jest dobrze zdefiniowaną funkcją⁵. Dodatkowo E^0 jest addytywna i $E^0(\mathbb{R}^\kappa) = I$.

Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że E^0 jest σ -addytywna. Wówczas E^0 rozszerzy się do miary spektralnej na $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\kappa)$ spełniającej równość (4.4.4) (zob. [2, twierdzenie 5.2.3.]). W tym celu ustalmy $h \in \mathcal{H}$. Niech $\mu_h^0(J) := \langle E^0(J)h, h \rangle$ dla $J \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}^\kappa)$ oraz $F_h(x) := \langle F(x)h, h \rangle$ dla $x \in \mathbb{R}^\kappa$. Na mocy własności (i) i (ii) wynika, że F_h jest dystrybuantą na \mathbb{R}^κ . Z drugiej strony $\mu_h^0((a, b]) = F_h(a, b]$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}^\kappa$, $a \leq b$. Na mocy [1, twierdzenie 1.4.9.] istnieje μ_h miara borelowska taka, że $\mu_h((a, b]) = F_h(a, b]$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}^\kappa$, $a \leq b$. W szczególności $\mu_h|_{\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^\kappa)} = \mu_h^0$, co oznacza, że μ_h^0 jest σ -addytywna. Tym samym E^0 jest σ -addytywna. \square

Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ będzie układem operatorów spektralnie przemiennych. Dla funkcji borelowskiej $\varphi \in S(\mathbb{R}^\kappa, E_{\mathbf{A}})$ definiujemy operator $\varphi(\mathbf{A})$ wzorem⁶

$$\varphi(\mathbf{A}) = \int_{\mathbb{R}^\kappa} \varphi(x) E_{\mathbf{A}}(dx).$$

Operator $\varphi(\mathbf{A})$ jest samosprzężony. Dodatkowo, jeśli $\varphi \geq 0$, to $\varphi(\mathbf{A})$ jest dodatni.

Wracamy teraz do głównego zagadnienia tego podrozdziału, czyli do wielowymiarowego porządku spektralnego. Zaczniemy od zdefiniowania relacji \preceq , która jest naturalnym uogólnieniem jednowymiarowego porządku spektralnego.

DEFINICJA 4.4.6. Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ i $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_\kappa)$ będą spektralnie przemiennymi układami operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} . Wówczas $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$, gdy $F_{\mathbf{B}}(x) \leq F_{\mathbf{A}}(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^\kappa$.

Oczywiście relacja \preceq jest relacją porządku w zbiorze wszystkich spektralnie przemiennych układów κ operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} . W dalszym ciągu relację \preceq będziemy nazywać wielowymiarowym porządkiem spektralnym. Poniżej zbadamy jej podstawowe własności.

OBSERWACJA 4.4.7. Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ i $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_\kappa)$ będą spektralnie przemiennymi układami operatorów samosprzężonych w

⁵Zauważmy, że jeśli $(a, b] \cap (c, d] = \emptyset$, to $F(a, b]F(c, d] = 0$.

⁶W przypadku, gdy φ będzie wyrażona konkretnym wzorem, będziemy używać symbolu $\varphi(X)(\mathbf{A})$, gdzie $X = (X_1, \dots, X_\kappa)$.

\mathcal{H} . Wówczas $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A_j \preceq B_j$ dla każdego $j = 1, \dots, \kappa$.

DOWÓD. (\Rightarrow) Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy, że $j = 1$. Ustalmy $x \in \mathbb{R}$. Jeśli $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_\kappa)$ jest spektralnie przemianym układem operatorów samosprzężonych, to

$$\begin{aligned} F_{C_1}(x) &= E_{\mathbf{C}}((-\infty, x] \times \mathbb{R}^{\kappa-1}) \\ &= s - \lim_{n \rightarrow \infty} E_{\mathbf{C}}((-\infty, (x, n, \dots, n)]) = s - \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\mathbf{C}}((x, n, \dots, n)). \end{aligned}$$

Stąd oraz z tego, że $F_{\mathbf{B}}(y) \leq F_{\mathbf{A}}(y)$ dla każdego $y \in \mathbb{R}^\kappa$ wynika, że $F_{B_1}(x) \leq F_{A_1}(x)$.

(\Leftarrow) Z założenia wiemy, że $F_{B_j}(x) \leq F_{A_j}(x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ oraz dla każdego $j = 1, \dots, \kappa$. Dzięki temu oraz równości (4.4.2) otrzymamy

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{B}}(x_1, \dots, x_\kappa) &\stackrel{(4.4.2)}{=} F_{B_1}(x_1) \dots F_{B_\kappa}(x_\kappa) \\ &\leq F_{A_1}(x_1) \dots F_{A_\kappa}(x_\kappa) \stackrel{(4.4.2)}{=} F_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_\kappa), \end{aligned}$$

dla dowolnych $x_1, \dots, x_\kappa \in \mathbb{R}$. \square

Kolejna obserwacja oraz twierdzenie 4.4.10 wyznaczają klasę funkcji borelowskich, które zachowują wielowymiarowy porządek spektralny.

OBSERWACJA 4.4.8. Niech $\kappa \in \mathbb{N}_*$. Jeśli $\varphi: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją borelowską spełniającą warunek

$$(4.4.5) \quad \mathbf{A} \preceq \mathbf{B} \implies \varphi(\mathbf{A}) \preceq \varphi(\mathbf{B})$$

dla dowolnych \mathbf{A} i \mathbf{B} spektralnie przemianych układów κ operatorów samosprzężonych w przestrzeni \mathcal{H} o wymiarze $\dim \mathcal{H} \geq 1$, to φ jest oddzielnie rosnąca.

DOWÓD. Ustalmy $a = (a_1, \dots, a_\kappa) \in \mathbb{R}^\kappa$ i $b = (b_1, \dots, b_\kappa) \in \mathbb{R}^\kappa$ takie, że $a \leq b$. Zdefiniujmy $A_i = a_i I$ oraz $B_i = b_i I$, gdzie $i = 1, \dots, \kappa$. Nietrudno zauważyć, że jeśli $c \in \mathbb{R}$, to $E_{cI}(\sigma) = \delta_c(\sigma) I$ dla dowolnego $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, gdzie δ_c jest miarą Diraca zdefiniowaną na $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Dzięki temu z nierówności $a_i \leq b_i$ wynika, że $A_i \preceq B_i$ dla $i = 1, \dots, \kappa$. Stąd na mocy obserwacji 4.4.7 otrzymujemy, że $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$. Dzięki własności (4.4.5) dostajemy, że $\varphi(a)I = \varphi(\mathbf{A}) \preceq \varphi(\mathbf{B}) = \varphi(b)I$, co oznacza, że $\varphi(a) \leq \varphi(b)$, gdyż $\dim \mathcal{H} \geq 1$. \square

LEMAT 4.4.9. Niech \mathcal{M} będzie σ -algebrą na zbiorze X a E będzie miarą spektralną na \mathcal{M} . Jeśli $\{V_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}$, to

$$(4.4.6) \quad E\left(\bigcup_{n=1}^\infty V_n\right) = \bigvee_{n=1}^\infty E(V_n).$$

DOWÓD. Niech $V_\infty := \bigcup_{n=1}^\infty V_n$ oraz niech $M_k := E(V_k)\mathcal{H}$, gdzie $k \in \mathbb{N}_* \cup \{\infty\}$. Stąd i z równości (3.1.1) wynika, że $E(V_\infty) = P_{M_\infty}$ oraz $\bigvee_{n=1}^\infty E(V_n) = \bigvee_{n=1}^\infty P_{M_n} = P_{\bigvee_{n=1}^\infty M_n}$. Ponieważ $E(V_n) \leq E(V_\infty)$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_*$, to $\bigvee_{n=1}^{\infty} E(V_n) \leq E(V_{\infty})$. Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że $M_{\infty} \subset \bigvee_{n=1}^{\infty} M_n$. Niech $h \in M_{\infty}$. Zdefiniujemy zbiory W_n w następujący sposób

$$W_n := \begin{cases} V_1, & \text{dla } n = 1, \\ V_n \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{n-1}), & \text{dla } n > 1. \end{cases}$$

Oczywiście $V_{\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$ oraz $W_n \cap W_m = \emptyset$ dla $m \neq n$. Stąd wynika, że

$$h = E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n\right)h = \sum_{n=1}^{\infty} E(W_n)h.$$

Ponieważ $E(W_n)h \in M_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_*$, to powyższa równość oznacza, że $h \in \bigvee_{n=1}^{\infty} M_n$. To kończy dowód. \square

TWIERDZENIE 4.4.10. *Niech \mathbf{A} i \mathbf{B} będą spektralnie przemiennymi układami κ operatorów samosprzężonych takimi, że $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$. Jeśli $\varphi \in S(\mathbb{R}^{\kappa}, E_{\mathbf{A}}) \cap S(\mathbb{R}^{\kappa}, E_{\mathbf{B}})$ jest funkcją oddzielnie rosnącą, to $\varphi(\mathbf{A}) \preceq \varphi(\mathbf{B})$. W szczególności nierówność $\varphi(\mathbf{A}) \preceq \varphi(\mathbf{B})$ zachodzi dla każdej funkcji borelowskiej oddzielnie rosnącej $\varphi: \mathbb{R}^{\kappa} \rightarrow \mathbb{R}$.*

DOWÓD. Wystarczy udowodnić, że

$$(4.4.7) \quad E_{\mathbf{B}}(\Omega) \leq E_{\mathbf{A}}(\Omega)$$

dla dowolnego ćwiartkowego zbioru $\Omega \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\kappa})$. Istotnie, załóżmy, że zachodzi nierówność (4.4.7). Na mocy stwierdzenia 4.1.7 zbiór $\varphi^{-1}([-\infty, x])$ jest ćwiartkowy. Stąd dzięki nierówności (4.4.7), twierdzeniu o transporcie miary [2, twierdzenie 5.4.10.] oraz założeniu o funkcji φ dostaniemy, że

$$\begin{aligned} E_{\varphi(\mathbf{B})}((-\infty, x]) &= E_{\mathbf{B}}(\varphi^{-1}((-\infty, x])) \\ \stackrel{\varphi \in S(\mathbb{R}^{\kappa}, E_{\mathbf{B}})}{=} E_{\mathbf{B}}(\varphi^{-1}([-\infty, x])) &\stackrel{(4.4.7)}{\leq} E_{\mathbf{A}}(\varphi^{-1}([-\infty, x])) \\ \stackrel{\varphi \in S(\mathbb{R}^{\kappa}, E_{\mathbf{A}})}{=} E_{\mathbf{A}}(\varphi^{-1}((-\infty, x])) &= E_{\varphi(\mathbf{A})}((-\infty, x]) \end{aligned}$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}^{\kappa}$. Dowód nierówności (4.4.7) przeprowadzimy w kilku krokach.

Krok 1. Wykażemy, że jeśli $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]$, gdzie $x_n \in \mathbb{R}^{\kappa}$ dla $n \in \mathbb{N}_*$, to nierówność (4.4.7) jest spełniona.

Na mocy lematu 4.4.9 i założenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{B}}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]\right) &= \bigvee_{n=1}^{\infty} E_{\mathbf{B}}((-\infty, x_n]) \\ &\leq \bigvee_{n=1}^{\infty} E_{\mathbf{A}}((-\infty, x_n]) = E_{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]\right). \end{aligned}$$

Krok 2. Nierówność (4.4.7) zachodzi dla dowolnego domkniętego zbioru ćwiartkowego $\Omega \subset \mathbb{R}^\kappa$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\Omega \neq \emptyset$. Ustalmy normę⁷ $\|\cdot\|_\infty$ na \mathbb{R}^κ i rozważmy rodzinę zbiorów $\{Q_\epsilon\}_{\epsilon \in (0, \infty)}$, gdzie $Q_\epsilon := \mathbb{Q}^\kappa \cap \Omega^{(\epsilon)}$ (por. (4.1.1)). Łatwo zauważyć, że Q_ϵ jest zbiorem przeliczalnym. Stąd istnieje ciąg q_ϵ taki, że $Q_\epsilon = \{q_{\epsilon, n} : n \in \mathbb{N}_*\}$. Z obserwacji 4.1.3 (i) wynika, że $Q_\epsilon^- = \bigcup_{n=1}^\infty (-\infty, q_{\epsilon, n}]$. Stąd na mocy kroku 1. otrzymujemy, że

$$(4.4.8) \quad E_{\mathbf{B}}(Q_\epsilon^-) \leq E_{\mathbf{A}}(Q_\epsilon^-), \quad \epsilon \in (0, \infty).$$

Pokażemy teraz, że

$$(4.4.9) \quad \Omega = \bigcap_{\epsilon \in (0, \infty)} Q_\epsilon^-.$$

Ponieważ zbiór Ω jest domknięty, to $\Omega = \bigcap_{\epsilon \in (0, \infty)} \Omega^{(\epsilon)}$. Aby zakończyć dowód równości (4.4.9) wystarczy pokazać, że $\Omega \subset Q_\epsilon^- \subset \Omega^{(\epsilon)}$. Niech $x \in \Omega$. Z gęstości \mathbb{Q}^κ istnieje $q \in (x_1, x_1 + \epsilon) \times \dots \times (x_\kappa, x_\kappa + \epsilon) \cap \mathbb{Q}^\kappa \subset Q_\epsilon$. Ponieważ $x \leq q$, to $x \in Q_\epsilon^-$. Tym samym $\Omega \subset Q_\epsilon^-$. Wykażemy teraz drugą inkluzję. Ponieważ $Q_\epsilon \subset \Omega^{(\epsilon)}$, to na mocy obserwacji 4.1.3 (ii) oraz stwierdzenia 4.1.8 otrzymamy $Q_\epsilon^- \subset (\Omega^{(\epsilon)})^- = \Omega^{(\epsilon)}$.

Zauważmy również, że rodzina zbiorów $\{Q_\epsilon^-\}_{\epsilon \in (0, \infty)}$ jest rodziną rosnącą tzn. $Q_{\epsilon_1}^- \subset Q_{\epsilon_2}^-$, gdy $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$. Stąd na mocy równości (4.4.9), własności miary spektralnej oraz nierówności (4.4.8) dostaniemy, że

$$E_{\mathbf{B}}(\Omega) = s - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} E_{\mathbf{B}}(Q_\epsilon^-) \leq s - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} E_{\mathbf{A}}(Q_\epsilon^-) = E_{\mathbf{A}}(\Omega).$$

Krok 3. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^\kappa$ będzie dowolnym ćwiartkowym zbiorem borelowskim. Pokażemy, że dla dowolnej miary spektralnej E na \mathbb{R}^κ zachodzi zależność

$$(4.4.10) \quad E(\Omega) = E_1(\Omega) := \bigvee \{E(\delta) : \delta \subset \Omega, \delta = \bar{\delta} = \delta^-\}.$$

Oczywiście $E_1(\Omega) \leq E(\Omega)$. Z drugiej strony dla dowolnego zbioru zwanego $\tau \subset \Omega$ dzięki obserwacji 4.1.3 (iii) dostajemy

$$E(\tau) \leq E(\tau^-) \stackrel{4.1.3(iii)}{\leq} E_1(\Omega).$$

Stąd na mocy wniosku 4.2.2 otrzymujemy, że

$$E(\Omega) \stackrel{4.2.2}{=} \bigvee \{E(\tau) : \tau \subset \Omega, \tau \text{ - zwarty}\} \leq E_1(\Omega),$$

co dowodzi równości (4.4.10).

Z kroku 2. wynika, że jeśli $\delta \subset \mathbb{R}^\kappa$ jest zbiorem ćwiartkowym i domkniętym, to $E_{\mathbf{B}}(\delta) \leq E_{\mathbf{A}}(\delta)$. Stąd na mocy równości (4.4.10) otrzymujemy, że $E_{\mathbf{B}}(\Omega) \leq E_{\mathbf{A}}(\Omega)$. \square

⁷Przypominamy, że $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_\kappa|\}$, gdzie $x = (x_1, \dots, x_\kappa) \in \mathbb{R}^\kappa$.

Na zakończenie podrozdziału wyprowadzimy parę wniosków z twierdzenia 4.4.10. Poniżej podajemy charakteryzację wielowymiarowego porządku spektralnego za pomocą zwykłej nierówności pomiędzy całkami spektralnymi ograniczonych oddzielnie rosnących funkcji borelowskich.

WNIOSEK 4.4.11. *Niech \mathbf{A} i \mathbf{B} będą spektralnie przemiennymi układami κ operatorów samosprzężonych. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- (i) $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$,
- (ii) $\varphi(\mathbf{A}) \leq \varphi(\mathbf{B})$ dla dowolnej ograniczonej oddzielnie rosnącej funkcji ciągłej $\varphi: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$,
- (iii) $\varphi(\mathbf{A}) \leq \varphi(\mathbf{B})$ dla dowolnej ograniczonej oddzielnie rosnącej funkcji borelowskiej $\varphi: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$.

DOWÓD. (i) \Rightarrow (iii) Zauważmy, że $\varphi(\mathbf{A}), \varphi(\mathbf{B}) \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ dla dowolnej ograniczonej funkcji borelowskiej $\varphi: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ i zastosujmy twierdzenie 4.4.10 oraz propozycję 3.3.3.

(iii) \Rightarrow (ii) Oczywiście.

(ii) \Rightarrow (i) Na mocy obserwacji 4.4.7 wystarczy wykazać, że $A_j \preceq B_j$ dla $j = 1, \dots, \kappa$. Ustalmy $j \in \{1, \dots, \kappa\}$. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą i ograniczoną funkcją rosnącą. Zdefiniujmy $\varphi: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$(4.4.11) \quad \varphi(x_1, \dots, x_\kappa) := f(x_j).$$

Oczywiście φ jest ciągłą i ograniczoną funkcją oddzielnie rosnącą. Z [2, lemat 6.5.2.] otrzymujemy, że

$$f(A_j) = (f \circ \pi_j)(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{A}).$$

Analogicznie otrzymamy, że $f(B_j) = \varphi(\mathbf{B})$. Stąd i z założenia wynika, że $f(A_j) \leq f(B_j)$ dla każdej ciągłej i ograniczonej funkcji rosnącej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zatem na mocy twierdzenia 3.3.6 $A_j \preceq B_j$. \square

UWAGA 4.4.12. Dowód implikacji (ii) \Rightarrow (i) można przeprowadzić analogicznie tak jak dowód implikacji (ii) \Rightarrow (i) w twierdzeniu 3.3.6 stosując twierdzenie 4.3.2 w miejsce twierdzenia 2.3.1.

Poniższy wniosek jest próbą odpowiedzi na pytanie dotyczące stopnia „wektorowości” porządku spektralnego.

WNIOSEK 4.4.13. *Niech (A_1, A_2) i (B_1, B_2) będą parami spektralnie przemiennych operatorów samosprzężonych w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} . Załóżmy, że $A_1 \preceq B_1$ i $A_2 \preceq B_2$. Wówczas zachodzi poniższa nierówność⁸*

$$(4.4.12) \quad (X_1 + X_2)(A_1, A_2) \preceq (X_1 + X_2)(B_1, B_2).$$

Jeśli dodatkowo A_1 lub A_2 jest dodatni, to

$$(4.4.13) \quad (X_1 X_2)(A_1, A_2) \preceq (X_1 X_2)(B_1, B_2).$$

⁸Przypominamy w tym miejscu, że jeśli operatory A_1 i A_2 nie są ograniczone, to może się zdarzyć, że $A_1 + A_2 \not\subseteq (X_1 + X_2)(A_1, A_2)$.

DOWÓD. Z założenia i obserwacji 4.4.7 wynika, że $\mathbf{A} := (A_1, A_2) \preceq (B_1, B_2) =: \mathbf{B}$. Oczywiście funkcja $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $\varphi(x_1, x_2) := x_1 + x_2$ dla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jest oddzielnie rosnąca. Stąd na mocy twierdzenia 4.4.10 otrzymujemy (4.4.12).

Przejdźmy teraz do dowodu nierówności (4.4.13). Załóżmy, że A_1 jest dodatni. Na mocy obserwacji 3.4.1 wynika, że $0 \preceq A_1$. Stąd oraz z nierówności $A_1 \preceq B_1$ otrzymamy, że $0 \preceq B_1$. Tym samym B_1 jest dodatni. W szczególności $\text{supp } E_{A_1} \subset [0, \infty)$ oraz $\text{supp } E_{B_1} \subset [0, \infty)$. Stosując obserwację 4.4.3 dostaniemy, że $\text{supp } E_{\mathbf{A}} \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}$ oraz $\text{supp } E_{\mathbf{B}} \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}$. Stąd wynika, że $(X_1 X_2)(A_1, A_2) = \psi(A_1, A_2)$ oraz $(X_1 X_2)(B_1, B_2) = \psi(B_1, B_2)$, gdzie funkcja $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest zdefiniowana wzorem $\psi(x_1, x_2) := \chi_{[0, \infty)^2}(x) x_1 \cdot x_2$ dla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Aby zakończyć dowód wystarczy jeszcze zauważyć, że ψ jest funkcją oddzielnie rosnącą oraz skorzystać z twierdzenia 4.4.10. \square

Jeśli $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_{\kappa_1})$ jest spektralnie przemienным układem operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} i⁹ $\varphi \in S(\mathbb{R}^{\kappa_1}, E_{\mathbf{A}}; \overline{\mathbb{R}^{\kappa_2}})$ dla $j = 1, \dots, \kappa_1$, to przez $\varphi(\mathbf{A})$ oznaczamy układ operatorów $(\varphi_1(\mathbf{A}), \dots, \varphi_{\kappa_2}(\mathbf{A}))$. Oczywiście $\varphi(\mathbf{A})$ jest układem spektralnie przemiennych operatorów w \mathcal{H} .

WNIOSEK 4.4.14. *Niech $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{N}_*$. Załóżmy, że $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_{\kappa_1})$ i $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_{\kappa_1})$ są układami spektralnie przemiennych operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} spełniających relację $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$. Jeśli*

$$\varphi \in S(\mathbb{R}^{\kappa_1}, E_{\mathbf{A}}; \overline{\mathbb{R}^{\kappa_2}}) \cap S(\mathbb{R}^{\kappa_1}, E_{\mathbf{B}}; \overline{\mathbb{R}^{\kappa_2}})$$

jest oddzielnie rosnąca, to $\varphi(\mathbf{A}) \preceq \varphi(\mathbf{B})$.

DOWÓD. Z założenia i obserwacji 4.1.6 funkcje φ_j są oddzielnie rosnące dla $j = 1, \dots, \kappa_2$, gdzie $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{\kappa_2})$. Stąd oraz relacji $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ na mocy twierdzenia 4.4.10 wynika, że $\varphi_j(\mathbf{A}) \preceq \varphi_j(\mathbf{B})$, dla $j = 1, \dots, \kappa_2$. Stąd oraz z obserwacji 4.4.7 dostaniemy, że $\varphi(\mathbf{A}) \preceq \varphi(\mathbf{B})$. \square

4.5. Jednomiany a wielowymiarowy porządek spektralny

Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_{\kappa})$ i $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_{\kappa})$ będą spektralnie przemiennymi układami operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} spełniającymi warunek $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$. W dalszym ciągu będziemy rozważać zależności pomiędzy dziedzinami operatorów postaci¹⁰ $X^{\alpha}(\mathbf{A})$ i $X^{\alpha}(\mathbf{B})$, gdzie $\alpha \in \mathbb{N}^{\kappa}$. Jednak zanim przejdziemy do twierdzenia będącego rozwiązaniem tego problemu wprowadzimy kilka użytecznych oznaczeń i przedstawimy kilka pomocniczych faktów.

⁹Przyjmujemy, że $S(\mathbb{R}^{\kappa}, E; \overline{\mathbb{R}^{\iota}}) := \{\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{\iota}) : \varphi_j \in S(\mathbb{R}^{\kappa}, E) \text{ dla } j = 1, \dots, \iota\}$, gdzie $\kappa, \iota \in \mathbb{N}_*$.

¹⁰Dla $x = (x_1, \dots, x_{\kappa}) \in \mathbb{R}^{\kappa}$ i $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa}) \in \mathbb{N}^{\kappa}$ definiujemy $x^{\alpha} := x_1^{\alpha_1} \dots x_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}}$ (stosujemy konwencję, że $0^0 = 1$).

Niech A będzie operatorem samosprzężonym w \mathcal{H} . Zdefiniujemy domknięte podprzestrzenie wektorowe $\mathcal{H}_- := E_A((-\infty, 0))\mathcal{H}$ oraz $\mathcal{H}_+ := E_A([0, \infty))\mathcal{H}$. Połóżmy

$$(4.5.1) \quad A_+ := 0|_{\mathcal{H}_-} \oplus A|_{\mathcal{H}_+}$$

oraz

$$(4.5.2) \quad A_- := A|_{\mathcal{H}_-} \oplus 0|_{\mathcal{H}_+}.$$

Nietrudno zauważyć, że operatory A_+ i A_- są samosprzężone. Dodatkowo operator A_+ jest dodatni. Prawdziwy jest następujący lemat.

LEMAT 4.5.1. *Jeśli A i B są operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} takimi, że $A \preceq B$, to $A_+ \preceq B_+$ i $A_- \preceq B_-$.*

DOWÓD. Na wstępie pokażemy, że jeśli C jest operatorem samosprzężonym w \mathcal{H} , to

$$(4.5.3) \quad C_{\pm} = f_{\pm}(C),$$

gdzie funkcje $f_{\pm}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dane są wzorem

$$(4.5.4) \quad f_{\pm}(x) := \frac{1}{2}(x \pm |x|), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Niech $h \in \mathcal{H}$. Połóżmy $h_+ := E_C([0, \infty))h$ oraz $h_- := E_C((-\infty, 0))h$. Wówczas $\text{supp}\langle E_C(\cdot)h_+, h_+ \rangle \subset [0, \infty)$ i $\text{supp}\langle E_C(\cdot)h_-, h_- \rangle \subset (-\infty, 0]$, co pociąga za sobą, że

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (x \pm |x|)^2 \langle E_C(dx)h, h \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x \pm |x|)^2 \langle E_C(dx)h_+, h_+ \rangle + \int_{\mathbb{R}} (x \pm |x|)^2 \langle E_C(dx)h_-, h_- \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} 4x^2 \langle E_C(dx)h_{\pm}, h_{\pm} \rangle. \end{aligned}$$

Powyższa równość oznacza, że dla każdego $h \in \mathcal{H}$ zachodzi warunek

$$h \in \mathcal{D}(f_{\pm}(C)) \Leftrightarrow h_{\pm} \in \mathcal{D}(C).$$

Stąd i z definicji C_{\pm} otrzymujemy, że $\mathcal{D}(f_{\pm}(C)) = \mathcal{D}(C_{\pm})$. Równocześnie jeśli $h \in \mathcal{D}(f_{\pm}(C))$ oraz $\tilde{h} \in \mathcal{H}$, to

$$\begin{aligned} \langle f_{\pm}(C)h, \tilde{h} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x \pm |x|}{2} \langle E_C(dx)h, \tilde{h} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x \pm |x|}{2} \langle E_C(dx)h_+, \tilde{h} \rangle + \int_{\mathbb{R}} \frac{x \pm |x|}{2} \langle E_C(dx)h_-, \tilde{h} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} x \langle E_C(dx)h_{\pm}, \tilde{h} \rangle = \langle Ch_{\pm}, \tilde{h} \rangle = \langle C_{\pm}h, \tilde{h} \rangle. \end{aligned}$$

Zatem $f_{\pm}(C)h = C_{\pm}h$ dla wszystkich $h \in \mathcal{D}(f_{\pm}(C))$, co kończy dowód równości (4.5.3).

Zauważmy, że funkcje f_+ i f_- są rosnące. Stąd na mocy równości (4.5.3) oraz propozycji 3.3.2 otrzymujemy, że $A_+ \preccurlyeq B_+$ i $A_- \preccurlyeq B_-$. \square

Niech $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_\kappa) \in \{-, +\}^\kappa$. Zdefiniujmy funkcję $f_\epsilon := f_{\epsilon_1} \times \dots \times f_{\epsilon_\kappa} : \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie funkcje f_\pm są zdefiniowane równościami (4.5.4). W szczególności mamy, że

$$(4.5.5) \quad \pi_j \circ f_\epsilon = f_{\epsilon_j} \circ \pi_j, \quad \epsilon \in \{-, +\}^\kappa, \quad j = 1, \dots, \kappa.$$

Zdefiniujmy w tym miejscu $\dagger = (\dagger_1, \dots, \dagger_\kappa) \in \{-, +\}^\kappa$ wzorem $\dagger_j = +$ dla $j = 1, \dots, \kappa$. Jeśli $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_\kappa)$ jest spektralnie przemiennym układem operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} , to przez \mathbf{C}_ϵ będziemy rozumieć układ operatorów zdefiniowany w następujący sposób

$$(4.5.6) \quad \mathbf{C}_\epsilon := (f_{\epsilon_1}(C_1), \dots, f_{\epsilon_\kappa}(C_\kappa))$$

(por. (4.5.1), (4.5.2)). Z równości (4.5.5) i [2, lemat 6.5.2.] wynika, że

$$f_\epsilon(\mathbf{C}) = ((\pi_j \circ f_\epsilon)(\mathbf{C}))_{j=1}^\kappa \stackrel{(4.5.5)}{=} ((f_{\epsilon_j} \circ \pi_j)(\mathbf{C}))_{j=1}^\kappa \stackrel{\text{lemat 6.5.2.}}{=} (f_{\epsilon_j}(C_j))_{j=1}^\kappa.$$

Stąd i z definicji \mathbf{C}_ϵ dostajemy, że

$$(4.5.7) \quad f_\epsilon(\mathbf{C}) = \mathbf{C}_\epsilon.$$

Równocześnie

$$(4.5.8) \quad E_{\mathbf{C}_\epsilon} = E_{\mathbf{C}} \circ f_\epsilon^{-1}.$$

Istotnie z równości $f_{\epsilon_j}(C_j) = (\pi_j \circ f_\epsilon)(\mathbf{C})$ i twierdzenia o transporcie miary otrzymujemy, że

$$f_{\epsilon_j}(C_j) = \int_{\mathbb{R}^\kappa} x_j E_{\mathbf{C}} \circ f_\epsilon^{-1}(dx), \quad j = 1, \dots, \kappa.$$

Stąd i z twierdzenia 4.4.1 wynika równość (4.5.8).

Po przygotowaniu możemy sformułować i udowodnić główny rezultat tego podrozdziału. Poniższe twierdzenie jest uogólnieniem drugiej części propozycji 3.3.3.

TWIERDZENIE 4.5.2. *Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ i $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_\kappa)$ będą spektralnie przemiennymi układami operatorów samosprzężonych takimi, że $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$ oraz niech $\alpha \in \mathbb{N}^\kappa$. Załóżmy dodatkowo, że*

$$(4.5.9) \quad X^\alpha(\mathbf{A}_\epsilon) \in \mathbf{B}(\mathcal{H}), \quad \epsilon \in \{-, +\}^\kappa \setminus \{\dagger\}.$$

Wówczas

$$(4.5.10) \quad \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{B})) \subset \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A})).$$

DOWÓD. Niech $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ oraz $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$. Przyjmijmy z definicji, że $\mathbb{R}_\epsilon^\kappa := \mathbb{R}_{\epsilon_1} \times \dots \times \mathbb{R}_{\epsilon_\kappa}$, gdzie $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_\kappa) \in \{-, +\}^\kappa$. Na wstępie pokażemy, że dla dowolnego $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_\kappa)$ spektralnie przemiennego układu operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} mamy równość

$$(4.5.11) \quad \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{C})) = \bigcap_{\epsilon \in \{-, +\}^\kappa} \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{C}_\epsilon)).$$

(C) Niech $h \in \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{C}))$. Wtedy dla dowolnego $\epsilon \in \{-, +\}^\kappa$ na mocy równości (4.5.8) dostaniemy

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^\kappa} |x^\alpha|^2 \langle E_{\mathbf{C}}(dx)h, h \rangle \geq \int_{\mathbb{R}^\kappa_\epsilon} |x^\alpha|^2 \langle E_{\mathbf{C}}(dx)h, h \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^\kappa} |f_\epsilon(x)^\alpha|^2 \langle E_{\mathbf{C}}(dx)h, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^\kappa} |x^\alpha|^2 \langle E_{\mathbf{C}} \circ f_\epsilon^{-1}(dx)h, h \rangle \\ & \stackrel{(4.5.8)}{=} \int_{\mathbb{R}^\kappa} |x^\alpha|^2 \langle E_{\mathbf{C}_\epsilon}(dx)h, h \rangle. \end{aligned}$$

Jeśli $h \in \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{C}))$, to na mocy powyższej nierówności otrzymamy, że $h \in \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{C}_\epsilon))$. (D) Załóżmy teraz, że $h \in \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{C}_\epsilon))$ dla każdego $\epsilon \in \{-, +\}^\kappa$. Stąd i z równości (4.5.8) otrzymamy, że

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\kappa} |x^\alpha|^2 \langle E_{\mathbf{C}}(dx)h, h \rangle &\leq \sum_{\epsilon \in \{-, +\}^\kappa} \int_{\mathbb{R}^\kappa_\epsilon} |x^\alpha|^2 \langle E_{\mathbf{C}}(dx)h, h \rangle \\ &= \sum_{\epsilon \in \{-, +\}^\kappa} \int_{\mathbb{R}^\kappa} |x^\alpha|^2 \langle E_{\mathbf{C}_\epsilon}(dx)h, h \rangle < \infty. \end{aligned}$$

Zatem $\bigcap_{\epsilon \in \{-, +\}^\kappa} \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{C}_\epsilon)) \subset \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{C}))$, co kończy dowód równości (4.5.11).

Zauważmy, że $\mathbf{A}_\epsilon \preceq \mathbf{B}_\epsilon$. Istotnie ponieważ funkcje f_\pm są rosnące, to funkcja f_ϵ jest oddzielnie rosnąca. Stąd na mocy wniosku 4.4.14 i założenia otrzymujemy, że $f_\epsilon(\mathbf{A}) \preceq f_\epsilon(\mathbf{B})$. Zatem dzięki równości (4.5.7) dostaniemy, że $\mathbf{A}_\epsilon \preceq \mathbf{B}_\epsilon$.

Przejdźmy teraz do dowodu inkluzji (4.5.10). Z założenia twierdzenia mamy, że $\mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A}_\epsilon)) = \mathcal{H}$ dla wszystkich $\epsilon \neq \dagger$. Tym samym dzięki równości (4.5.11) wynika, że

$$(4.5.12) \quad \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A})) = \bigcap_{\epsilon \in \{-, +\}^\kappa} \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A}_\epsilon)) = \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A}_\dagger)).$$

Ponieważ A_+ i B_+ są operatorami dodatnimi, to na mocy (4.4.3) otrzymujemy, że $\text{supp } E_{\mathbf{A}_\dagger} \subset [0, \infty)^\kappa$ oraz $\text{supp } E_{\mathbf{B}_\dagger} \subset [0, \infty)^\kappa$. W szczególności $X^\alpha(\mathbf{A}_\dagger) = \varphi(\mathbf{A}_\dagger)$ oraz $X^\alpha(\mathbf{B}_\dagger) = \varphi(\mathbf{B}_\dagger)$, gdzie $\varphi: \mathbb{R}^\kappa \ni x \rightarrow \chi_{\mathbb{R}_+^\kappa}(x) \cdot x^\alpha \in \mathbb{R}$. Oczywiście φ jest funkcją oddzielnie rosnącą. Stąd na mocy twierdzenia 4.4.10 wnioskujemy, że $X^\alpha(\mathbf{A}_\dagger) \preceq X^\alpha(\mathbf{B}_\dagger)$. Dodatkowo operatory $X^\alpha(\mathbf{A}_\dagger)$ i $X^\alpha(\mathbf{B}_\dagger)$ są dodatnie. Stąd i z propozycji 3.3.3 otrzymujemy inkluzję $\mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{B}_\dagger)) \subset \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A}_\dagger))$. Dzięki temu oraz

równościom (4.5.11) i (4.5.12) wynika, że

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{B})) &\stackrel{(4.5.11)}{=} \bigcap_{\epsilon \in \{-,+\}^\kappa} \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{B}_\epsilon)) \subset \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{B}_\dagger)) \\ &\subset \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A}_\dagger)) \stackrel{(4.5.12)}{=} \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A})), \end{aligned}$$

co kończy dowód. \square

UWAGA 4.5.3. Przyjrzyjmy się bliżej twierdzeniu 4.5.2 w przypadku $\kappa = 1$. Niech $\alpha = \alpha_1 = 1$. W tym wypadku założenie (4.5.9) redukuje się do żądania, aby $A_- \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$. Warunek ten z kolei jest równoważny temu, że operator A jest ograniczony od dołu.

W przykładzie, który podamy za chwilę, pokażemy, że osłabiona wersja założenia (4.5.9) nie musi zapewniać inkluzji (4.5.10). Sytuacja ta może mieć miejsce nawet wówczas, gdy warunek (4.5.9) nie jest spełniony tylko dla jednego $\epsilon \in \{-,+\}^\kappa \setminus \{\dagger\}$.

Jeśli $\varphi: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją borelowską, to przez M_φ oznaczamy operator w $L^2(\mathbb{R}^\kappa)$ zdefiniowany następująco

$$\mathcal{D}(M_\varphi) := \{h \in L^2(\mathbb{R}^\kappa) : \int_{\mathbb{R}^\kappa} |\varphi h|^2 dx < \infty\}$$

oraz

$$M_\varphi h := \varphi h, \quad h \in \mathcal{D}(M_\varphi).$$

Wiadomo, że operator M_φ jest operatorem samosprzężonym w $L^2(\mathbb{R}^\kappa)$ (zob. [2]).

OBSERWACJA 4.5.4. *Jeżeli $\varphi, \psi: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami borelowskimi, to operatory M_φ i M_ψ są spektralnie przemienne.*

DOWÓD. Niech $E: \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\kappa) \rightarrow \mathbf{B}(L^2(\mathbb{R}^\kappa))$ będzie miarą spektralną daną wzorem

$$E(\tau)h = \chi_\tau h, \quad h \in L^2(\mathbb{R}^\kappa) \text{ oraz } \tau \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\kappa).$$

Wówczas dla dowolnej funkcji borelowskiej $f: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ miara spektralna E_{M_f} wyraża się wzorem

$$(4.5.13) \quad E_{M_f}(\sigma) = E(f^{-1}(\sigma)), \quad \sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Tym samym

$$\begin{aligned} E_{M_\varphi}(\sigma)E_{M_\psi}(\tau) &= E(\varphi^{-1}(\sigma))E(\psi^{-1}(\tau)) \\ &= E(\psi^{-1}(\tau))E(\varphi^{-1}(\sigma)) = E_{M_\psi}(\tau)E_{M_\varphi}(\sigma) \end{aligned}$$

dla dowolnych $\sigma, \tau \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. To kończy dowód spektralnej przemienności M_φ i M_ψ . \square

LEMAT 4.5.5. *Niech $\varphi_j: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami borelowskimi dla wszystkich $j = 1, \dots, \kappa$ i niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ będzie układem operatorów, gdzie $A_j := M_{\varphi_j}$. Wtedy*

(i) \mathbf{A} jest spektralnie przemiennym układem operatorów samosprzężonych,

(ii) miara spektralna \mathbf{A} wyraża się wzorem

$$(4.5.14) \quad E_{\mathbf{A}} = E \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_{\kappa})^{-1},$$

(iii) dla dowolnej funkcji borelowskiej $f: \mathbb{R}^{\kappa} \rightarrow \mathbb{R}$ prawdziwa jest następująca równość

$$(4.5.15) \quad f(\mathbf{A}) = M_{f \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_{\kappa})}.$$

DOWÓD. (i) Wynika z obserwacji 4.5.4.

(ii) Niech $j \in \{1, \dots, \kappa\}$. Wówczas dla każdego $h_1 \in \mathcal{D}(M_{\varphi_j})$ oraz $h_2 \in L^2(\mathbb{R}^{\kappa})$ mamy

$$\begin{aligned} \langle M_{\varphi_j} h_1, h_2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^{\kappa}} \varphi_j h_1 \overline{h_2} dx = \int_{\mathbb{R}^{\kappa}} \varphi_j \langle E(dx) h_1, h_2 \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^{\kappa}} x_j \langle E \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_{\kappa})^{-1}(dx) h_1, h_2 \rangle. \end{aligned}$$

Z powyższej równości oraz z twierdzenia 4.4.1 wnioskujemy że $E_{\mathbf{A}} = E \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_{\kappa})^{-1}$.

(iii) Z twierdzenia o transporcie miary oraz równości (4.5.14) wynika, że

$$\begin{aligned} E_{f(\mathbf{A})} &= E_{\mathbf{A}} \circ f^{-1} \stackrel{(4.5.14)}{=} (E \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_{\kappa})^{-1}) \circ f^{-1} \\ &= E \circ (f \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_{\kappa}))^{-1} \stackrel{(4.5.14)}{=} E_{M_{f \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_{\kappa})}}. \end{aligned}$$

Stąd na mocy wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości pomiędzy miarami spektralnymi a operatorami samosprzężonymi otrzymujemy tezę. \square

PRZYKŁAD 4.5.6. Niech $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{\kappa})$ oraz niech $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{\kappa}) \in \{-, +\}^{\kappa} \setminus \{\dagger\}$. Ustalmy $j_0 \in \{1, \dots, \kappa\}$ takie, że $\epsilon_{j_0} = -$. Dla każdego $j = 1, \dots, \kappa$ rozważmy funkcje $\varphi_j, \psi_j: \mathbb{R}^{\kappa} \rightarrow \mathbb{R}$ określone poniższymi wzorami:¹¹

(4.5.16)

$$\varphi_j(x) = \psi_j(x) := \begin{cases} \epsilon_j 1, & \text{gdy } \epsilon_j x_j \geq 0, \\ 0, & \text{gdy } \epsilon_j x_j < 0 \end{cases}, \quad x = (x_1, \dots, x_{\kappa}) \in \mathbb{R}^{\kappa},$$

dla $j \neq j_0$ oraz

(4.5.17)

$$\varphi_{j_0}(x) := \begin{cases} -(x_{j_0}^2 + 1), & \text{gdy } \epsilon_{j_0} x_{j_0} \geq 0, \\ 0, & \text{gdy } \epsilon_{j_0} x_{j_0} < 0 \end{cases}, \quad x = (x_1, \dots, x_{\kappa}) \in \mathbb{R}^{\kappa},$$

¹¹Przyjmujemy z definicji, że

$$\epsilon x = \begin{cases} x & \text{gdy } \epsilon = +, \\ -x & \text{gdy } \epsilon = -, \end{cases}$$

gdzie $\epsilon \in \{-, +\}$ oraz $x \in \mathbb{R}$.

i

$$(4.5.18) \quad \psi_{j_0}(x) := \begin{cases} x_{j_0}, & \text{gdy } \epsilon_{j_0} x_{j_0} \geq 0, \\ 0, & \text{gdy } \epsilon_{j_0} x_{j_0} < 0 \end{cases}, \quad x = (x_1, \dots, x_\kappa) \in \mathbb{R}^\kappa.$$

Oczywiście φ_j i ψ_j są funkcjami borelowskimi dla każdego $j = 1, \dots, \kappa$. Niech $A_j := M_{\varphi_j}$ oraz $B_j := M_{\psi_j}$ dla $j = 1, \dots, \kappa$. Wówczas na podstawie lematu 4.5.5 $\mathbf{A} := (A_1, \dots, A_\kappa)$ i $\mathbf{B} := (B_1, \dots, B_\kappa)$ są układami operatorów samosprężonych spektralnie przemiennych.

Poniżej wykażemy, że układy operatorów \mathbf{A} i \mathbf{B} spełniają następujące warunki:

- (i) $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$,
- (ii) $X^\alpha(\mathbf{A}_\delta) \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ dla każdego $\delta \in \{-, +\}^\kappa \setminus \{\epsilon\}$ oraz dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{N}_*^\kappa$,
- (iii) $\mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{B})) \not\subset \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A}))$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{N}_*^\kappa$.

ad. (i) Ponieważ $A_j = B_j$, gdy $j \neq j_0$, to na mocy obserwacji 4.4.7 wystarczy udowodnić, że $A_{j_0} \preceq B_{j_0}$. Oczywiście $\varphi_{j_0}(x) \leq \psi_{j_0}(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^\kappa$. Stąd i z równości (4.5.13) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} F_{B_{j_0}}(x) &= E_{B_{j_0}}((-\infty, x]) = E(\psi_{j_0}^{-1}((-\infty, x])) \\ &\leq E(\varphi_{j_0}^{-1}((-\infty, x])) = E_{A_{j_0}}((-\infty, x]) = F_{A_{j_0}}(x) \end{aligned}$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Zatem $A_{j_0} \preceq B_{j_0}$.

ad. (ii) Ponieważ $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_\kappa) \neq \epsilon$, to znajdziemy $j_1 \in \{1, \dots, \kappa\}$ takie, że $\delta_{j_1} \neq \epsilon_{j_1}$. W szczególności jeśli $j_1 \neq j_0$, to

$$(4.5.19) \quad f_{\delta_{j_1}} \circ \varphi_{j_1}(x) = f_{\delta_{j_1}} \circ \psi_{j_1}(x) = \begin{cases} f_{\delta_{j_1}}(\epsilon_{j_1} 1), & \text{gdy } \epsilon_{j_1} x_{j_1} \geq 0, \\ f_{\delta_{j_1}}(0), & \text{gdy } \epsilon_{j_1} x_{j_1} < 0 \end{cases} = 0.$$

W przypadku, gdy $j_1 = j_0$, to $\delta_{j_1} = +$. Wówczas

$$(4.5.20) \quad f_{\delta_{j_0}} \circ \varphi_{j_0}(x) = \begin{cases} f_{\delta_{j_0}}(-(x_{j_0}^2 + 1)), & \text{gdy } \epsilon_{j_0} x_{j_0} \geq 0, \\ f_{\delta_{j_0}}(0), & \text{gdy } \epsilon_{j_0} x_{j_0} < 0, \end{cases} = 0.$$

Z definicji (4.5.6), lematu 4.5.5 (iii) oraz równości (4.5.19) i (4.5.20) otrzymamy, że

$$\begin{aligned} X^\alpha(\mathbf{A}_\delta) &= X^\alpha((f_{\delta_j}(M_{\varphi_j}))_{j=1}^\kappa) \\ &= X^\alpha((M_{f_{\delta_j} \circ \varphi_j})_{j=1}^\kappa) = M_{\prod_{j=1}^\kappa (f_{\delta_j} \circ \varphi_j)^{\alpha_j}} \stackrel{\alpha_{j_1} \neq 0}{=} 0. \end{aligned}$$

ad. (iii) Stosując lemat 4.5.5 (iii) dostaniemy, że

$$X^\alpha(\mathbf{A}) = X^\alpha((M_{\varphi_j})_{j=1}^\kappa) = M_{\prod_{j=1}^\kappa (\varphi_j)^{\alpha_j}}.$$

Analogicznie otrzymamy, że

$$X^\alpha(\mathbf{B}) = X^\alpha((M_{\psi_j})_{j=1}^\kappa) = M_{\prod_{j=1}^\kappa (\psi_j)^{\alpha_j}}.$$

Zdefiniujmy funkcję $h: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ następująco

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x_{j_0}^{\alpha_{j_0}+1}}, & \text{gd}y \epsilon_{j_0} x_{j_0} \geq 0 \text{ i } 1 \geq \epsilon_j x_j \geq 0 \text{ dla } j \neq j_0, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_\kappa) \in \mathbb{R}^\kappa$. Zauważmy, że $h \in \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{B})) \setminus \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A}))$. Istotnie z definicji funkcji h oraz twierdzenia Fubniego otrzymujemy¹²

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\kappa} \left| \prod_{j=1}^{\kappa} (\psi_j)^{\alpha_j} h \right|^2 dx &= \int_{[0, \epsilon_1] \times \dots \times \mathbb{R}_{\epsilon_{j_0}} \times \dots \times [0, \epsilon_\kappa]} \left| (x_{j_0})^{\alpha_{j_0}} \frac{1}{1+x_{j_0}^{\alpha_{j_0}+1}} \right|^2 dx \\ &= \int_{(-\infty, 0]} \left| \frac{(x_{j_0})^{\alpha_{j_0}}}{1+x_{j_0}^{\alpha_{j_0}+1}} \right|^2 dx_{j_0} < \infty. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $h \in \mathcal{D}(M_{\prod_{j=1}^{\kappa} (\psi_j)^{\alpha_j}})$. Równocześnie dzięki temu, że $\alpha_{j_0} \neq 0$ dostaniemy, że

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\kappa} \left| \prod_{j=1}^{\kappa} (\varphi_j)^{\alpha_j} h \right|^2 dx &= \int_{[0, \epsilon_1] \times \dots \times \mathbb{R}_{\epsilon_{j_0}} \times \dots \times [0, \epsilon_\kappa]} \left| (x_{j_0}^2 + 1)^{\alpha_{j_0}} \frac{1}{1+x_{j_0}^{\alpha_{j_0}+1}} \right|^2 dx \\ &= \int_{(-\infty, 0]} \left| \frac{(x_{j_0}^2 + 1)^{\alpha_{j_0}}}{1+x_{j_0}^{\alpha_{j_0}+1}} \right|^2 dx_{j_0} \stackrel{\alpha_{j_0} \neq 0}{=} \infty, \end{aligned}$$

co oznacza, że $h \notin \mathcal{D}(M_{\prod_{j=1}^{\kappa} (\varphi_j)^{\alpha_j}})$.

4.6. Wektory ograniczone układów operatorów

Celem niniejszego podrozdziału jest przygotowanie pojęć potrzebnych do zbadania wielowymiarowego porządku spektralnego w przypadku układu spektralnie przemiennych operatorów samosprzężonych dodatnich. Głównym wynikiem tej części jest stwierdzenie 4.6.4 charakteryzujące wektory ograniczone układu operatorów.

W dalszym ciągu niech $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_\kappa$ dla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\kappa) \in [0, \infty)^\kappa$. Jeśli $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ jest spektralnie przemiennym układem operatorów samosprzężonych dodatnich w \mathcal{H} i $\alpha \in [0, \infty)^\kappa$, to kładziemy $X^\alpha(\mathbf{A}) := \psi_\alpha(\mathbf{A})$, gdzie funkcja $\psi_\alpha: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $\psi_\alpha(y) := |y_1|^{\alpha_1} \dots |y_\kappa|^{\alpha_\kappa} \chi_{[0, \infty)^\kappa}(y)$ dla $y \in \mathbb{R}^\kappa$ (stosujemy konwencję, w której $0^0 = 1$). Jeśli $\alpha \in \mathbb{N}^\kappa$, to ta definicja pokrywa się z definicją postawioną na stronie 45.

¹²Dla $\epsilon \in \{-, +\}$ kładziemy

$$[0, \epsilon] = \begin{cases} [0, 1] & \text{gd}y \epsilon = +, \\ [-1, 0] & \text{gd}y \epsilon = -. \end{cases}$$

Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ będzie układem operatorów w \mathcal{H} . Zdefiniujemy następujące zbiory

$$\mathcal{D}^\infty(\mathbf{A}) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j_1=1}^{\kappa} \dots \bigcap_{j_n=1}^{\kappa} \mathcal{D}(A_{j_1} \dots A_{j_n})$$

oraz

$$\mathcal{B}_a(\mathbf{A}) := \bigcup_{\substack{c \in \mathbb{R} \\ c > 0}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j_1=1}^{\kappa} \dots \bigcap_{j_n=1}^{\kappa} \{h \in \mathcal{D}^\infty(\mathbf{A}) : \|A_{j_1} \dots A_{j_n} h\| \leq ca_{j_1} \dots a_{j_n}\}$$

dla $a = (a_1, \dots, a_\kappa) \in [0, \infty)^\kappa$. Powiemy, że $h \in \mathcal{H}$ jest wektorem ograniczonym¹³ dla układu operatorów \mathbf{A} jeśli $h \in \mathcal{B}(\mathbf{A}) := \bigcup_{a \in (0, \infty)^\kappa} \mathcal{B}_a(\mathbf{A})$. W dalszej części pracy będziemy używać symbolu $\mathcal{D}^\Lambda(\mathbf{A})$ na oznaczenie zbioru $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A}))$, gdzie $\Lambda \subset [0, \infty)^\kappa$.

Rozważania dotyczące wektorów ograniczonych poprzedzimy przypomnieniem kilku użytecznych faktów.

LEMAT 4.6.1. *Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ będzie spektralnie przemiennym układem operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} . Wówczas dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_*$ oraz dowolnych funkcji $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in S(\mathbb{R}^\kappa, E_{\mathbf{A}})$ mamy*

$$(4.6.1) \quad \mathcal{D}(\varphi_1(\mathbf{A}) \dots \varphi_n(\mathbf{A})) = \bigcap_{j=1}^n \mathcal{D}((\varphi_j \dots \varphi_n)(\mathbf{A}))$$

oraz

$$(4.6.2) \quad \varphi_1(\mathbf{A}) \dots \varphi_n(\mathbf{A}) \subset (\varphi_1 \dots \varphi_n)(\mathbf{A}).$$

DOWÓD. (4.6.1) i (4.6.2) wynikają bezpośrednio z [2, twierdzenie 5.4.4.] i zasady indukcji matematycznej. \square

WNIOSEK 4.6.2. *Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ będzie układem spektralnie przemiennych operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} . Wówczas*

(a)

$$(4.6.3) \quad \mathcal{D}^\infty(\mathbf{A}) = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}^\kappa} \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A})).$$

(b) *Dla każdego $n \in \mathbb{N}_*$ oraz dla dowolnych $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, \kappa\}$ zachodzi równość¹⁴*

$$(4.6.4) \quad A_{j_1} \dots A_{j_n} |_{\mathcal{D}^\infty(\mathbf{A})} = X^\beta(\mathbf{A}) |_{\mathcal{D}^\infty(\mathbf{A})}, \text{ gdzie } \beta = e_{j_1} + \dots + e_{j_n}.$$

¹³Definicję wektorów ograniczonych dla układu spektralnie przemiennych operatorów samosprzężonych można znaleźć np. w [27].

¹⁴Przyjmujemy, że $e_j := (0, \dots, \underbrace{1}_j, \dots, 0) \in \mathbb{R}^\kappa$ dla $j = 1, \dots, \kappa$.

(c) Jeśli dodatkowo \mathbf{A} jest dodatni, to¹⁵

$$(4.6.5) \quad \mathcal{D}^\infty(\mathbf{A}) = \bigcap_{j=1}^{\kappa} \mathcal{D}^\infty(A_j) = \bigcap_{\alpha \in [0, \infty)^\kappa} \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A})).$$

DOWÓD. ad. (a) (c) Niech $h \in \mathcal{D}^\infty(\mathbf{A})$. Musimy wykazać, że $h \in \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A}))$ dla każdego $\alpha \in \mathbb{N}^\kappa$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\alpha \neq 0$. Rozważmy funkcje $\varphi_j: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ określone wzorem

$$\varphi_j := \pi_l, \text{ gdzie } l = \min\{k \in \{1, \dots, \kappa\} : j \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_k\}$$

dla $j = 1, \dots, |\alpha|$. Na podstawie twierdzenia 4.4.1 oraz lematu 4.6.1 otrzymujemy, że

$$h \in \mathcal{D}(\varphi_1(\mathbf{A}) \dots \varphi_{|\alpha|}(\mathbf{A})) \stackrel{(4.6.1)}{\subset} \mathcal{D}((\varphi_1 \dots \varphi_{|\alpha|})(\mathbf{A})) = \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A})).$$

(d) Załóżmy, że $h \in \bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}^\kappa} \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A}))$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}_*$ oraz $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, \kappa\}$. Podstawiając $\varphi_k = \pi_{j_k}$ dla $j = 1, \dots, n$ w równości (4.6.1) dostaniemy, że

$$\bigcap_{k=1}^n \mathcal{D}(X^{\alpha(k)}(\mathbf{A})) = \mathcal{D}(A_{j_1} \dots A_{j_n}),$$

gdzie $\alpha(k) := e_{j_k} + \dots + e_{j_n}$ dla $k = 1, \dots, n$. Z założenia wiemy, że $h \in \mathcal{D}(X^{\alpha(k)}(\mathbf{A}))$ dla każdego $k = 1, \dots, n$. Stąd i z powyższej równości wynika, że $h \in \mathcal{D}(A_{j_1} \dots A_{j_n})$. To kończy dowód równości (4.6.1).

ad. (b) Równość (4.6.4) jest bezpośrednią konsekwencją równości (4.6.3) i inkluzji (4.6.2) zastosowanej do funkcji $\varphi_k := \pi_{j_k}$ dla $k = 1, \dots, n$.

ad. (c) Niech $D_1 := \bigcap_{j=1}^{\kappa} \mathcal{D}^\infty(A_j)$ oraz $D_2 := \bigcap_{\alpha \in [0, \infty)^\kappa} \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A}))$. In-

kluzja $\mathcal{D}^\infty(\mathbf{A}) \subset D_1$ jest oczywista. Równocześnie na mocy równości (4.6.3) $D_2 \subset \mathcal{D}^\infty(\mathbf{A})$. Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że $D_1 \subset D_2$.

Niech $h \in D_1$. Zdefiniujmy miarę μ na $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\kappa)$ wzorem $\mu(\sigma) := \langle E_{\mathbf{A}}(\sigma)h, h \rangle$, gdzie $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\kappa)$. Z założenia o h wynika, że $\psi_{\alpha_j e_j} \in L^{2\kappa}(\mathbb{R}^\kappa, \mu)$ dla $j = 1, \dots, \kappa$ oraz $\alpha \in [0, \infty)^\kappa$. Stąd oraz z uogólnionej nierówności Höldera otrzymujemy, że $\psi_\alpha = \prod_{j=1}^{\kappa} \psi_{\alpha_j e_j} \in L^2(\mathbb{R}^\kappa, \mu)$ dla każdego $\alpha \in [0, \infty)^\kappa$. To jest równoznaczne z tym, że $h \in D_2$, co kończy dowód. \square

OBSERWACJA 4.6.3. Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ będzie spektralnie przemennym układem operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} . Wówczas następujące warunki są równoważne

¹⁵Przypominamy, że jeśli C jest dodatnim operatorem samosprzężonym w \mathcal{H} , to $\mathcal{D}^\infty(C) = \bigcap_{s \in [0, \infty)} \mathcal{D}(C^s)$.

- (i) A_j jest operatorem dodatnim dla $j = 1, \dots, \kappa$,
- (ii) $\text{supp } E_{\mathbf{A}} \subset [0, \infty)^\kappa$.

DOWÓD. (i) \Rightarrow (ii) Ponieważ operatory A_j są dodatnie, to $\text{supp } E_{A_j} \subset [0, \infty)$ dla $j = 1, \dots, \kappa$. Stąd na mocy obserwacji 4.4.3 dostaniemy, że $\text{supp } E_{\mathbf{A}} \subset [0, \infty)^\kappa$.

(ii) \Rightarrow (i) Z równości (4.4.1) oraz założenia otrzymujemy

$$E_{A_j}((-\infty, 0)) = E_{\mathbf{A}}(\mathbb{R} \times \dots \times \underbrace{(-\infty, 0)}_j \times \dots \times \mathbb{R}) \stackrel{(ii)}{=} 0.$$

Stąd wynika, że $\text{supp } E_{A_j} \subset [0, \infty)$, co oznacza, że A_j jest dodatni dla $j = 1, \dots, \kappa$. \square

Jeśli spełnione są założenia obserwacji 4.6.3 oraz zachodzi warunek (i) lub (ii), to mówimy, że układ \mathbf{A} jest dodatni.

Zajmiemy się teraz charakteryzacją zbioru wektorów ograniczonych układu operatorów.

STWIERDZENIE 4.6.4. *Załóżmy, że $h \in \mathcal{H}$ i $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ jest spektralnie przemiennym układem operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} . Niech $a \in [0, \infty)^\kappa$ oraz niech $\Lambda \subset [0, \infty)^\kappa$ spełnia warunek*

$$(4.6.6) \quad \sup_{\alpha \in \Lambda} \frac{\alpha_j}{1 + |\alpha| - \alpha_j} = \infty, \quad j = 1, \dots, \kappa.$$

Rozważmy następujące warunki

- (i) $h \in \mathcal{B}_a(\mathbf{A})$,
- (ii) istnieje liczba rzeczywista $c > 0$ taka, że

$$h \in \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A})) \text{ oraz } \|X^\alpha(\mathbf{A})h\| \leq ca^\alpha, \text{ dla wszystkich } \alpha \in \mathbb{N}^\kappa,$$

- (iii) $h \in \mathcal{R}(F_{\mathbf{A}}(a))$.

Wówczas

- (a) warunek (i) jest prawdziwy wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (ii),
- (b) jeśli \mathbf{A} jest dodatni, to warunki (i), (ii) i (iii) są równoważne oraz z każdego z nich wynika warunek
- (iv) istnieje liczba rzeczywista $c > 0$ taka, że

$$(4.6.7) \quad h \in \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A})) \text{ oraz } \|X^\alpha(\mathbf{A})h\| \leq ca^\alpha, \text{ dla wszystkich } \alpha \in \Lambda.$$

- (c) jeśli \mathbf{A} jest dodatni oraz $h \perp \bigcup_{j=1}^\kappa \mathcal{N}(A_j)$, to wszystkie warunki (i), (ii), (iii) i (iv) są równoważne.

DOWÓD. ad. (a) Równoważność (i) \Leftrightarrow (ii) wynika natychmiast z wniosku 4.6.2.

Przejdźmy teraz do dowodu części (b). Załóżmy, że \mathbf{A} jest dodatni. Niech $\mu_h(\sigma) := \langle E_{\mathbf{A}}(\sigma)h, h \rangle$ dla każdego $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\kappa)$.

(ii) \Rightarrow (iii) Oczywiście $\mathcal{D}^\infty(\mathbf{A}) \subset \mathcal{D}^\infty(A_j)$ dla każdego $j = 1, \dots, \kappa$. Równocześnie $\|A_j^n h\| \leq ca_j^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, co oznacza, że $h \in$

$\mathcal{B}_{a_j}(A_j)$. Stąd i z równości (3.2.2) wynika, że $h \in \mathcal{R}(F_{A_j}(a_j))$ dla każdego $j = 1, \dots, \kappa$. Ponieważ $F_{\mathbf{A}}(a) = F_{A_1}(a_1) \dots F_{A_\kappa}(a_\kappa)$, to $h \in \mathcal{R}(F_{\mathbf{A}}(a))$.

(iii) \Rightarrow (ii) Niech $\alpha \in \mathbb{N}^\kappa$. Z założenia $\text{supp } \mu_h \subset (-\infty, a]$. Stąd na mocy dodatniości \mathbf{A} otrzymujemy, że

$$\int_{\mathbb{R}^\kappa} |x^\alpha|^2 d\mu_h(x) = \int_{[0, a_1] \times \dots \times [0, a_\kappa]} |x^\alpha|^2 d\mu_h(x) \leq (a^\alpha)^2 \|h\|^2 < \infty.$$

Tym samym $h \in \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A}))$ i

$$\|X^\alpha(\mathbf{A})h\| = \left(\int_{\mathbb{R}^\kappa} |x^\alpha|^2 d\mu_h(x) \right)^{\frac{1}{2}} \leq a^\alpha \|h\|.$$

(iii) \Rightarrow (iv) Dowodzi się podobnie jak implikację (iii) \Rightarrow (ii).

ad. (c) Zakładamy, że \mathbf{A} jest dodatni oraz $h \perp \bigcup_{j=1}^\kappa \mathcal{N}(A_j)$. Do zakończenia dowodu wystarczy wykazać, że (iv) implikuje (iii).

(iv) \Rightarrow (iii) Przypuśćmy, że $h \notin \mathcal{R}(F_{\mathbf{A}}(a))$. W szczególności

$$(4.6.8) \quad \mu_h(\mathbb{R}^\kappa \setminus (-\infty, a]) > 0.$$

Dla dowolnego samosprzężonego operatora C w \mathcal{H} prawdziwa jest równość $\mathcal{N}(C) = \mathcal{R}(E_C(\{0\}))$, która jest konsekwencją charakteryzacji widma punktowego operatorów samosprzężonych (por. [2, twierdzenie 6.1.3]). Stąd i z założenia wynika, że $E_{A_j}(\{0\})h = 0$ dla każdego $j = 1, \dots, \kappa$. Dzięki założeniu, że \mathbf{A} jest dodatni otrzymujemy, że $E_{\mathbf{A}}(\mathbb{R}^\kappa \setminus [0, \infty)^\kappa)h = 0$. Zatem

$$(4.6.9) \quad \mu_h((0, \infty)^\kappa \setminus [0, a_1] \times \dots \times [0, a_\kappa]) = \mu_h(\mathbb{R}^\kappa \setminus (-\infty, a]) > 0.$$

Niech $D_{j,n} := \underbrace{(\frac{1}{n}, \infty) \times \dots \times (a_j + \frac{1}{n}, \infty)}_j \times \dots \times (\frac{1}{n}, \infty)$ dla $j \in \{1, \dots, \kappa\}$

oraz $n \in \mathbb{N}_*$. Na mocy nierówności (4.6.9) oraz równości

$$(0, \infty)^\kappa \setminus [0, a_1] \times \dots \times [0, a_\kappa] = \bigcup_{j=1}^\kappa \bigcup_{n=1}^\infty D_{j,n},$$

możemy wybrać $j \in \{1, \dots, \kappa\}$ oraz $n \in \mathbb{N}_*$ takie, że

$$(4.6.10) \quad \gamma := \mu_h(D_{j,n}) > 0.$$

Ustalmy $\alpha \in \Lambda$. Wówczas z nierówności (4.6.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \gamma \left(\frac{1}{n}\right)^{2(|\alpha| - \alpha_j)} \left(a_j + \frac{1}{n}\right)^{2\alpha_j} &\leq \int_{D_{j,n}} |x^\alpha|^2 d\mu_h(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^\kappa} |x^\alpha|^2 d\mu_h(x) = \|x^\alpha(\mathbf{A})h\|^2 \stackrel{(4.6.7)}{\leq} c^2 (a^\alpha)^2. \end{aligned}$$

Zatem

$$(4.6.11) \quad (\sqrt{\gamma})^{\frac{1}{|\alpha|}} \left(\frac{1}{n}\right)^{(1 - \frac{\alpha_j}{|\alpha|})} \left(a_j + \frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha_j}{|\alpha|}} \leq c^{\frac{1}{|\alpha|}} a^{\frac{\alpha}{|\alpha|}}, \text{ dla każdego } \alpha \in \Lambda.$$

Korzystając z warunku (4.6.6) znajdziemy ciąg $\{\alpha(m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \Lambda$ taki, że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\alpha(m)| = \infty \text{ i } \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\alpha_j(m)}{|\alpha(m)|} = 1,$$

gdzie $\alpha(m) = (\alpha_1(m), \dots, \alpha_{\kappa}(m))$. W szczególności

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\sqrt{\gamma})^{\frac{1}{|\alpha(m)|}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\left(1 - \frac{\alpha_j(m)}{|\alpha(m)|}\right)} \left(a_j + \frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha_j(m)}{|\alpha(m)|}} = a_j + \frac{1}{n}.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} c^{\frac{1}{|\alpha(m)|}} a^{\frac{\alpha(m)}{|\alpha(m)|}} &= \limsup_{m \rightarrow \infty} a^{\frac{\alpha(m)}{|\alpha(m)|}} \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} a_j^{\frac{\alpha_j(m)}{|\alpha(m)|}} = a_j. \end{aligned}$$

Zatem na mocy nierówności (4.6.11) otrzymujemy, że $a_j + \frac{1}{n} \leq a_j$, co jest sprzeczne. \square

Podrozdział zakończymy dwoma uwagami do przedstawionego powyżej stwierdzenia 4.6.4.

UWAGA 4.6.5. Warunek (4.6.6) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup_{\alpha \in \Lambda} \alpha_j = \infty$$

oraz

$$\forall_{c \in (0,1)} \exists_{\alpha \in \Lambda} \alpha_j \geq c|\alpha|$$

dla wszystkich $j = 1, \dots, \kappa$.

UWAGA 4.6.6. Nawiązując do wniosku 4.6.2 i stwierdzenia 4.6.4 warto zwrócić uwagę na to, że równość (4.6.5) nie zachodzi dla dowolnego zbioru $\Lambda \subset [0, \infty)^{\kappa}$ spełniającego warunek (4.6.6). Poniżej podajemy przykład zbioru $\Lambda \subset [0, \infty)^{\kappa}$ spełniającego warunek (4.6.6) oraz układu $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_{\kappa})$ spektralnie przemiennych operatorów samosprzężonych dodatnich w \mathcal{H} takie, że

$$(4.6.12) \quad \mathcal{D}^{\infty}(\mathbf{A}) \subsetneq \mathcal{D}^{\Lambda}(\mathbf{A}).$$

Rozważmy dwie funkcje $\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $\varphi_1(x) = |x|$ oraz $\varphi_2(x) = e^{-|x|}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Niech $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ oraz $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$, gdzie $A_j := M_{\varphi_j}$, dla $j = 1, 2$. Na mocy obserwacji 4.5.4 operatory A_1 i A_2 są spektralnie przemienne. Ponieważ $\varphi_j(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $j = 1, 2$, to A_1 i A_2 są operatorami dodatnimi. Połóżmy $\Lambda := [0, \infty) \times (0, \infty)$ oraz $h(x) := \frac{1}{|x|+1}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Oczywiście $h \in \mathcal{H}$ oraz zbiór Λ spełnia warunek (4.6.6).

Pokażemy, że $h \in \mathcal{D}^{\Lambda}(\mathbf{A}) \setminus \mathcal{D}^{\infty}(\mathbf{A})$. Jeśli $\alpha \in \Lambda$, to $\alpha_2 > 0$. Stąd wnioskujemy, że

$$\int_{\mathbb{R}} |(\varphi_1(x))^{\alpha_1} (\varphi_2(x))^{\alpha_2} h(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^{2\alpha_1}}{(|x|+1)^2} e^{-2\alpha_2|x|} dx < \infty.$$

W szczególności wynika stąd, że $h \in \mathcal{D}(M_{\varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2}})$. Na mocy lematu 4.5.5 (iii) $X^\alpha(\mathbf{A}) = M_{\varphi_1^{\alpha_1} \varphi_2^{\alpha_2}}$, co oznacza, że $h \in \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A}))$. Równocześnie

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)\varphi_1(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^2}{(|x|+1)^2} dx = \infty.$$

Zatem $h \notin \mathcal{D}(A_1) \supset \mathcal{D}^\infty(\mathbf{A})$. Z drugiej strony inkluzja $\mathcal{D}^\infty(\mathbf{A}) \subset \mathcal{D}^\Lambda(\mathbf{A})$ jest następstwem wniosku 4.6.2 (c). Tym samym zakończyliśmy dowód (4.6.12).

UWAGA 4.6.7. Poprzednia uwaga nie odnosi się do przypadku, gdy $\kappa = 1$. Jeśli $\kappa = 1$, to warunek (4.6.6) redukuje się do żądania, aby zbiór Λ był nieograniczony. Wówczas dla dowolnego dodatniego operatora samosprzężonego A w \mathcal{H} zachodzi równość $\mathcal{D}^\infty(A) = \mathcal{D}^\Lambda(\mathbf{A})$.

4.7. Wielowymiarowy porządek spektralny dla spektralnie przemiennych układów operatorów samosprzężonych dodatnich

Badanie własności wielowymiarowego porządku spektralnego w przypadku spektralnie przemiennych układów operatorów samosprzężonych dodatnich zaczniemy od następującego stwierdzenia

STWIERDZENIE 4.7.1. *Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ i $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_\kappa)$ będą spektralnie przemiennymi układami operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} . Załóżmy, że \mathbf{A} i \mathbf{B} są dodatnie oraz, że $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$. Wówczas dla wszystkich $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\kappa) \in [0, \infty)^\kappa$ zachodzą następujące warunki:*

- (i) $X^\alpha(\mathbf{A}) \preceq X^\alpha(\mathbf{B})$,
- (ii) $\mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{B})) \subset \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{A}))$,
- (iii) $\|X^\alpha(\mathbf{A})h\| \leq \|X^\alpha(\mathbf{B})h\|$ dla każdego $h \in \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{B}))$,
- (iv) $\langle X^\alpha(\mathbf{A})h, h \rangle \leq \langle X^\alpha(\mathbf{B})h, h \rangle$ dla każdego $h \in \mathcal{D}(X^\alpha(\mathbf{B}))$,
- (v) $X^\alpha(\mathbf{A}) \leq X^\alpha(\mathbf{B})$.

Co więcej $\mathcal{D}^\infty(\mathbf{B}) \subset \mathcal{D}^\infty(\mathbf{A})$ oraz $\mathcal{B}(\mathbf{B}) \subset \mathcal{B}(\mathbf{A})$.

DOWÓD. (i) Żądaną relację otrzymamy dzięki zastosowaniu twierdzenia 4.4.10 do funkcji ψ_α , która jest oddzielnie rosnąca.

(ii), (iii), (iv) i (v) wynikają z (i) oraz z punktów (ii), (iii), (iv) oraz (v) propozycji 3.4.2 dla $s = 1$ i operatorów $X^\alpha(\mathbf{A})$ oraz $X^\alpha(\mathbf{B})$, które są dodatnie.

Dla dowodu drugiej części twierdzenia należy zauważyć, że inkluzja $\mathcal{D}^\infty(\mathbf{B}) \subset \mathcal{D}^\infty(\mathbf{A})$ wynika z (ii) oraz z wniosku 4.6.2. Jeśli $h \in \mathcal{B}_a(\mathbf{B})$ dla pewnego $a \in (0, \infty)^\kappa$, to na mocy stwierdzenia 4.6.4 (ii) oraz (iii) punktu dowodzonego twierdzenia znajdziemy liczbę rzeczywistą $c > 0$ taką, że

$$\|X^\alpha(\mathbf{A})h\| \leq \|X^\alpha(\mathbf{B})h\| \leq ca^\alpha, \text{ dla wszystkich } \alpha \in \mathbb{N}^\kappa,$$

Korzystając ponownie ze stwierdzenia 4.6.4 otrzymamy, że $h \in \mathcal{B}_a(\mathbf{A})$, co daje nam drugą z inkluzji. \square

Poniższe twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia 3.4.5.

TWIERDZENIE 4.7.2. *Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ i $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_\kappa)$ będą układami spektralnie przemiennych operatorów samosprzężonych dodatnich w \mathcal{H} . Załóżmy, że $\mathcal{N}(A_j) = \{0\}$ dla $j = 1, \dots, \kappa$. Niech $\Lambda \subset [0, \infty)^\kappa$ spełnia warunek (4.6.6). Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- (i) $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$,
- (ii) $\mathcal{D}^\infty(\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{D}^\infty(\mathbf{A})$ i $\bar{L}_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}(h) \leq 1$ dla każdego $h \in \mathcal{D}^\infty(\mathbf{B})$,
- (iii) $\mathcal{D}^\infty(\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\Lambda}(\mathbf{A})$ i $\bar{L}_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}^\Lambda(h) \leq 1$ dla każdego $h \in \mathcal{D}^\infty(\mathbf{B})$,
- (iv) $\mathcal{B}(\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{D}^\infty(\mathbf{A})$ i $\bar{L}_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}(h) \leq 1$ dla każdego $h \in \mathcal{B}(\mathbf{B})$,
- (v) $\mathcal{B}(\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\Lambda}(\mathbf{A})$ i $\bar{L}_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}^\Lambda(h) \leq 1$ dla każdego $h \in \mathcal{B}(\mathbf{B})$,
- (vi) $\mathcal{B}(\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{A})$ i $\bar{L}_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}(h) \leq 1$ dla każdego $h \in \mathcal{B}(\mathbf{B})$,
- (vii) $\mathcal{B}(\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{A})$ i $\bar{L}_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}^\Lambda(h) \leq 1$ dla każdego $h \in \mathcal{B}(\mathbf{B})$,

gdzie

$$\bar{L}_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}^\Lambda(h) := \limsup_{\substack{|\alpha| \rightarrow \infty \\ \alpha \in \Lambda}} \sqrt[|\alpha|]{\|X^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{A})h\| / \|X^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{B})h\|}, \quad h \in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\Lambda}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\Lambda}(\mathbf{B})$$

oraz

$$\bar{L}_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}(h) := \bar{L}_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}^{[0, \infty)^\kappa}(h), \quad h \in \mathcal{D}^\infty(\mathbf{A}) \cap \mathcal{D}^\infty(\mathbf{B}).$$

DOWÓD. (i) \Rightarrow (ii) Teza wynika bezpośrednio ze stwierdzenia 4.7.1.

Implikację (ii) \Rightarrow (iii) można wyprowadzić z wniosku 4.6.2 (c).

(iii) \Rightarrow (v) To jest oczywiste.

(v) \Rightarrow (i) Musimy pokazać, że $F_{\mathbf{B}}(a) \leq F_{\mathbf{A}}(a)$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}^\kappa$. Ponieważ układy \mathbf{A} i \mathbf{B} są dodatnie, to $F_{\mathbf{A}}(a) = F_{\mathbf{B}}(a) = 0$ dla $a \in \mathbb{R}^\kappa \setminus [0, \infty)^\kappa$. Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że $F_{\mathbf{B}}(a) \leq F_{\mathbf{A}}(a)$ dla każdego $a \in [0, \infty)^\kappa$.

Niech $a \in [0, \infty)^\kappa$ i $h \in \mathcal{B}(F_{\mathbf{B}}(a))$. Na mocy stwierdzenia 4.6.4 wiemy, że $h \in \mathcal{B}(\mathbf{B})$ oraz

$$(4.7.1) \quad \|X^{\frac{1}{2}\alpha}(\mathbf{B})h\| \leq ca^{\frac{1}{2}\alpha}$$

dla pewnej liczby rzeczywistej $c > 0$. Stąd i z założenia wynika, że

$$(4.7.2) \quad h \in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\Lambda}(\mathbf{A}).$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje liczba rzeczywista $M > 0$ taka, że

$$\sqrt[|\alpha|]{r_\alpha(h)} < 1 + \varepsilon, \quad \text{dla każdego } \alpha \in \Lambda_M := \Lambda \cap \{\beta \in [0, \infty)^\kappa : |\beta| > M\},$$

gdzie $r_\alpha(h) := \|X^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{A})h\| / \|X^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{B})h\|$. W szczególności

$$(4.7.3) \quad \begin{aligned} \|X^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{A})h\| &= r_\alpha(h) \|X^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{B})h\| \\ &\leq (1 + \varepsilon)^{|\alpha|} \|X^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{B})h\| \\ &\leq c(1 + \varepsilon)^{|\alpha|} a^{\frac{\alpha}{2}} = c[(1 + \varepsilon)^2 a]^{\frac{\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

dla dowolnego $\alpha \in \Lambda_M$. Z założenia wiemy, że $h \perp \bigcup_{j=1}^{\kappa} \mathcal{N}(A_j)$. Dzięki temu, warunkowi (4.7.2), nierówności (4.7.3) oraz stwierdzeniu 4.6.4 (c) wnioskujemy, że $h \in \mathcal{R}(F_{\mathbf{A}}((1+\varepsilon)^2 a))$. Przechodząc z $\varepsilon \rightarrow 0^+$ otrzymujemy, że $h \in \mathcal{R}(F_{\mathbf{A}}(a))$.

(i) \Rightarrow (vi) Wynika z implikacji (i) \Rightarrow (ii) oraz stwierdzenia 4.7.1.

Wynikanie (vi) \Rightarrow (vii) jest oczywiste.

Implikacja (vii) \Rightarrow (v) jest bezpośrednią konsekwencją wniosku 4.6.2 (c), gdyż $\mathcal{B}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{D}^\infty(\mathbf{A})$.

(ii) \Rightarrow (iv) To jest oczywiste.

(iv) \Rightarrow (v) Można wywnioskować za pomocą wniosku 4.6.2 (c). \square

UWAGA 4.7.3. Należy w tym miejscu zaznaczyć, że prawdziwa jest także druga wersja twierdzenia 4.7.2, gdzie w miejsce $\bar{L}_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}^\Lambda(h)$ podstawimy $\tilde{L}_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}^\Lambda(h) := \limsup_{\substack{|\alpha| \rightarrow \infty \\ \alpha \in \Lambda}} \sqrt{|\langle X^\alpha(\mathbf{A})h, h \rangle| / \langle X^\alpha(\mathbf{B})h, h \rangle}$ a $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}\Lambda}(\mathbf{A})$ (od-

powiednio $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}\Lambda}(\mathbf{B})$) zastąpimy przez $\mathcal{D}^\Lambda(\mathbf{A})$ (odpowiednio $\mathcal{D}^\Lambda(\mathbf{B})$). Należy podkreślić, że z obu wariantów tego twierdzenia wynika twierdzenie 3.4.5. Jednakże ze względu na dalsze zastosowania oraz uwagę 4.6.6 ograniczyliśmy się do sformułowania i udowodnienia tylko jednej z nich.

WNIOSEK 4.7.4. Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_\kappa)$ i $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_\kappa)$ będą układami spektralnie przemiennych operatorów samosprzężonych dodatnich w \mathcal{H} . Załóżmy, że $\mathcal{N}(A_j) = \{0\}$ dla $j = 1, \dots, \kappa$. Niech $\Lambda \subset [0, \infty)^\kappa$ będzie zbiorem spełniającym warunek (4.6.6). Załóżmy, że $\{r_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset [1, \infty)$ jest rodziną spełniającą warunek

$$\limsup_{\substack{|\alpha| \rightarrow \infty \\ \alpha \in \Lambda}} \sqrt{r_\alpha} \leq 1.$$

Wtedy poniższe warunki są równoważne:

- (i) $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$,
- (ii) $X^\alpha(\mathbf{A}) \preceq X^\alpha(\mathbf{B})$ dla każdego $\alpha \in [0, \infty)^\kappa$,
- (iii) $X^\alpha(\mathbf{A}) \leq X^\alpha(\mathbf{B})$ dla każdego $\alpha \in [0, \infty)^\kappa$,
- (iv) $X^\alpha(\mathbf{A}) \leq r_\alpha X^\alpha(\mathbf{B})$ dla każdego $\alpha \in \Lambda$.

DOWÓD. Implikacja (i) \Rightarrow (ii) jest konsekwencją stwierdzenia 4.7.1.

(ii) \Rightarrow (iii) wynika z propozycji 3.4.2.

Implikacja (iii) \Rightarrow (iv) jest oczywista.

(iv) \Rightarrow (i) Niech $h \in \mathcal{B}(\mathbf{B})$. Z założenia wynika, że zachodzi inkluzja $\mathcal{D}(X^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{B})) \subset \mathcal{D}(X^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{A}))$ i spełniona jest nierówność

$$(4.7.4) \quad \|X^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{A})h\|^2 = \|(X^\alpha(\mathbf{A}))^{\frac{1}{2}}h\|^2 \leq r_\alpha \|(X^\alpha(\mathbf{B}))^{\frac{1}{2}}h\|^2 = \|X^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbf{B})h\|^2, \alpha \in \Lambda.$$

Stąd oraz z wniosku 4.6.2 otrzymujemy, że $h \in \mathcal{D}^{\frac{1}{2}\Lambda}(\mathbf{A})$. Z nierówności (4.7.4) oraz założenia dostaniemy, że

$$\bar{L}_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}^{\Lambda}(h) \leq \limsup_{\substack{|\alpha| \rightarrow \infty \\ \alpha \in \Lambda}} \sqrt[|\alpha|]{r_{\alpha}} \leq 1.$$

Zastosowanie twierdzenia 4.7.2 (v) kończy dowód. \square

Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_{\kappa})$ i $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_{\kappa})$ będą układami spektralnie przemiennych operatorów samosprzężonych dodatnich w \mathcal{H} . Zdefiniujemy następujący zbiór

$$\Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := \{\alpha \in [0, \infty)^{\kappa} : X^{\alpha}(\mathbf{A}) \leq X^{\alpha}(\mathbf{B})\}.$$

Dzięki stwierdzeniu 4.7.1 wiemy, że relacja $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ implikuje równość $\Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [0, \infty)^{\kappa}$. W nawiązaniu do podrozdziału 3.4 postaramy się odpowiedzieć na pytanie jak „duży” powinien być zbiór $\Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, aby $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$. Przy braku dodatkowych założeń o \mathbf{A} i \mathbf{B} prawdziwa jest następująca propozycja

PROPOZYCJA 4.7.5. *Jeśli $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_{\kappa})$ i $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_{\kappa})$ są spektralnie przemiennymi układami dodatnich operatorów samosprzężonych w \mathcal{H} , to następujące warunki są równoważne*

- (i) $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$,
- (ii) dla każdego $j = 1, \dots, \kappa$ zbiór $\Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cap \{se_j : s \in [0, \infty)\}$ jest nieograniczony.

DOWÓD. (i) \Rightarrow (ii) To wynika ze stwierdzenia 4.7.1.

(ii) \Rightarrow (i) Dla dowolnego dodatniego układu operatorów samosprzężonych spektralnie przemiennych \mathbf{C} prawdziwa jest równość $\psi_{se_j} = \varphi_s \circ \pi_j$ $E_{\mathbf{C}}$ -prawie wszędzie dla każdego $s \in [0, \infty)$ i $j = 1, \dots, \kappa$. Stąd oraz z [2, lemat 6.5.2] mamy, że $C_j^s = X^{se_j}(\mathbf{C})$ dla dowolnego $s \in [0, \infty)$ i $j = 1, \dots, \kappa$. To wraz z wnioskiem 3.4.8 implikuje, że $A_j \preceq B_j$ dla każdego $j = 1, \dots, \kappa$. Korzystając z obserwacji 4.4.7 wnioskujemy, że $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$. \square

Rozważmy teraz sytuację, w której $\mathcal{N}(A_j) = \{0\}$ dla każdego $j = 1, \dots, \kappa$. Wówczas możemy zrezygnować z warunku (ii) w powyższej propozycji zadając jedynie, aby zbiór $\Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ spełniał (4.6.6).

TWIERDZENIE 4.7.6. *Niech $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_{\kappa})$ i $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_{\kappa})$ będą spektralnie przemiennymi układami dodatnich operatorów samosprzężonych, przy czym $\mathcal{N}(A_j) = \{0\}$ dla $j = 1, \dots, \kappa$. Jeśli $\Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ spełnia warunek (4.6.6), to $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$.*

DOWÓD. Nierówność $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ jest bezpośrednią konsekwencją wniosku 4.7.4 zastosowanego do zbioru $\Lambda = \Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ oraz rodziny $\{r_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$, gdzie $r_{\alpha} = 1$ dla każdego $\alpha \in \Lambda$. \square

Podrozdział zakończymy dwoma przykładami ilustrującymi przedstawione przed chwilą twierdzenia. Pierwszy z nich ukazuje istotność warunku (4.6.6) w twierdzeniu 4.7.6 na to, aby $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$.

PRZYKŁAD 4.7.7. Niech κ będzie liczbą całkowitą większą lub równą 2. Połóżmy $\mathcal{H} = \mathbb{C}$. Możemy utożsamić $\mathbf{B}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$. Rozważmy następujące dwa układy κ operatorów na \mathbb{C} :

$$(4.7.5) \quad \mathbf{A} = (1, \dots, 1) \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \left(\frac{1}{2}, 2, \dots, 2\right).$$

Jak łatwo zauważyć warunek $X^\alpha(\mathbf{A}) \leq X^\alpha(\mathbf{B})$ jest równoważny nierówności $1 \leq 2^{|\alpha| - 2\alpha_1}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{N}^\kappa$. Zatem $\alpha \in \Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_1 \leq |\alpha| - \alpha_1$. Stąd

$$\sup_{\alpha \in \Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B})} \frac{\alpha_1}{1 + |\alpha| - \alpha_1} \leq \sup_{\alpha \in \Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B})} \frac{|\alpha| - \alpha_1}{1 + |\alpha| - \alpha_1} = 1.$$

Mimo tego, że $\mathcal{N}(A_j) = \{0\}$ dla $j = 1, \dots, \kappa$, $\mathbf{A} \not\preceq \mathbf{B}$, co wynika z obserwacji 4.4.7 oraz tego, że $A_1 = 1 \not\leq B_1 = \frac{1}{2}$.

Jeśli wśród operatorów układu \mathbf{A} znajdują się operatory, które mają niezerowe jądra, to spełnienie warunku (4.6.6) nie gwarantuje, że $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$. Co więcej, w tej sytuacji warunek (ii) z propozycji 4.7.5 nie może być zastąpiony żadnym innym warunkiem. Mówiąc dokładniej znajdziemy dwa układy \mathbf{A} i \mathbf{B} operatorów spektralnie przemiennych takie, że zbiór $\Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cap \{se_j : s \in [0, \infty)\}$ jest ograniczony oraz $\Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ zawiera zbiór $[0, \infty)^\kappa \setminus \{se_j : s \in [0, \infty)\}$ dla pewnego $j \in \{1, \dots, \kappa\}$. Poniżej podajemy przykład, który ilustruje tę sytuację odsłaniając jednocześnie różnice pomiędzy przypadkiem jednowymiarowym i wielowymiarowym. Podczas gdy założenie o zerowaniu się jąder odgrywa kluczowe znaczenie w przypadku układów operatorów, to w sytuacji pojedynczych operatorów jest ono zbędne (por. twierdzenie 3.4.5, 4.7.2, 4.7.6 oraz wniosek 3.4.8).

PRZYKŁAD 4.7.8. Niech $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ będzie przestrzenią Hilberta z bazą ortonormalną $\{(1, 0), (0, 1)\}$ a A i B_θ , gdzie $\theta \in [1, \infty)$, będą macierzami dwa na dwa określonymi równościami (3.5.1). Rozważmy następujące układy operatorów na \mathcal{H} : $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ i $\mathbf{B}_\theta = (B_{\theta,1}, B_{\theta,2})$, gdzie $A_1 = A$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B_{\theta,1} = B_\theta$ oraz $B_{\theta,2} = 2I_{\mathcal{H}}$. Oczywiście wszystkie wymienione operatory A_1 , A_2 , $B_{\theta,1}$ i $B_{\theta,2}$ są samosprężone. Na mocy propozycji 3.5.3 dla każdej liczby całkowitej dodatniej k znajdziemy $\theta_k \in (2, \infty)$ takie, że $A_1^s \leq B_{\theta,1}^s$ dla każdego $\theta \in [\theta_k, \infty)$ oraz $s = 0, \dots, k$. Poniżej wykażemy, że układy \mathbf{A} i \mathbf{B}_θ spełniają następujące warunki:

- (i) $\mathcal{N}(A_1) \neq \{0\}$ i $\mathcal{N}(A_2) \neq \{0\}$,
- (ii) \mathbf{A} i \mathbf{B}_θ są układami operatorów spektralnie przemiennych,
- (iii) dla każdej liczby całkowitej dodatniej k zbiór $\Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B}_\theta)$ zawiera $(0, \infty) \times [0, \infty) \cup \{0, \dots, k\} \times \{0\}$, jeśli tylko $\theta \in [\theta_k, \infty)$,
- (iv) $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}_\theta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta = 2$.

Niech $\alpha_{j,1}, \alpha_{j,2}$, gdzie $\alpha_{j,1} \leq \alpha_{j,2}$, oznaczają wartości własne macierzy A_j dla $j = 1, 2$. Zanim przejdziemy do dowodu (i), (ii), (iii) i (iv) zauważmy, że $\alpha_{1,1} = \alpha_{2,1} = 0$ i $\alpha_{1,2} = \alpha_{2,2} = 2$. Jak łatwo sprawdzić wartościami własnymi $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{1,2}$ i $\alpha_{2,2}$ odpowiadają odpowiednio wektory własne h_1, h_2, h_2 i h_1 , gdzie $h_1 = (1, -1)$ oraz $h_2 = (1, 1)$. W szczególności macierze A_1 i A_2 możemy przedstawić w następujący sposób:

$$(4.7.6) \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

oraz

$$(4.7.7) \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Równocześnie ponieważ $\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2} \leq 2$, to na mocy lematu 3.5.1 $A_2 \preceq B_{\theta,2}$.

ad. (i) Z rozważań powyżej wynika, że¹⁶ $\mathcal{N}(A_1) = \mathbb{C}h_1$ i $\mathcal{N}(A_2) = \mathbb{C}h_2$.

ad. (ii) Elementarne rachunki pokazują, że każdy z układów \mathbf{A} oraz \mathbf{B}_θ , gdzie $\theta \in [1, \infty)$, są układami macierzy przemiennej.

ad. (iii) Zacznijmy od wykazania, że $(0, \infty) \times [0, \infty) \subset \Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B}_\theta)$ dla każdego $\theta \in [1, \infty)$. Z równości (4.7.6) i (4.7.7) wynika, że

$$(4.7.8) \quad A_1^s = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^s & 0 \\ 0 & 0^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^s + 0^s & 2^s - 0^s \\ 2^s - 0^s & 2^s + 0^s \end{bmatrix}$$

i

$$(4.7.9) \quad A_2^s = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^s & 0 \\ 0 & 2^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0^s + 2^s & 0^s - 2^s \\ 0^s - 2^s & 0^s + 2^s \end{bmatrix}$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej $s \geq 0$. Jeśli $s, t \in (0, \infty)$, to $A_1^s A_2^t = 0$ oraz $B_{\theta,1}^s B_{\theta,2}^t = 2^t B_{\theta,1}^s \geq 0$. W szczególności $(0, \infty) \times (0, \infty) \subset \Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B}_\theta)$. Równocześnie $A_2^s \leq B_{\theta,2}^s$ dla każdego $s \in [0, \infty)$, gdyż $A_2 \preceq B_{\theta,2}$. Stąd i z definicji θ_k wynika, że $(0, \infty) \times [0, \infty) \cup \{0, \dots, k\} \times \{0\} \subset \Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B}_\theta)$ dla dowolnego $\theta \in [\theta_k, \infty)$.

ad. (iv) Dzięki obserwacji 4.4.7 oraz temu, że $A_2 \preceq B_{\theta,2}$ dla każdego $\theta \in [1, \infty)$ otrzymujemy, że nierówność $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}_\theta$ jest równoważna nierówności $A_1 \preceq B_{\theta,1}$. To z kolei na mocy lematu 3.5.2 zachodzi tylko, gdy $\theta = 2$.

Biorąc pod uwagę punkty (ii) i (iii) otrzymujemy, że zbiór $\Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B}_\theta)$ spełnia warunek (4.6.6) oraz $\mathbf{A} \not\preceq \mathbf{B}_\theta$ dla dowolnego $\theta \geq \theta_k$.

¹⁶Z definicji $\mathbb{C}h := \{\lambda h : \lambda \in \mathbb{C}\}$ dla dowolnego $h \in \mathcal{H}$.

ROZDZIAŁ 5

Aneks

5.1. Granica

Na zakończenie pracy rozważymy zagadnienie istnienia granicy w (3.4.1). W tych rozważaniach będziemy potrzebowali następującego faktu (por. [23, Ćwiczenia 4. i 5., str. 73])

STWIERDZENIE 5.1.1. *Niech X będzie przestrzenią mierzalną a μ nieujemną miarą skończoną na X . Jeśli $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją mierzalną, to $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty \in [0, \infty]$, gdzie*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \text{ dla } p \in [1, \infty) \text{ oraz } \|f\|_\infty = \text{ess sup}|f|.$$

Jeśli dodatkowo $\mu(X) = 1$, to funkcja $\varphi: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty]$, gdzie $\varphi(p) = \|f\|_p$ dla $p \in [1, \infty)$, jest rosnąca.

PROPOZYCJA 5.1.2. *Jeśli A i B są dodatnimi operatorami samosprzężonymi w \mathcal{H} , to dla każdego wektora h należącego do $\mathcal{X} := (\mathcal{B}(A) \cap \mathcal{D}^\infty(B)) \cup (\mathcal{D}^\infty(A) \cap \mathcal{B}(B))$ istnieje granica $\lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt[s]{\langle A^s h, h \rangle / \langle B^s h, h \rangle} \in [0, \infty]$.*

DOWÓD. Dowód rozbijemy na kilka kroków.

Krok 1. Jeśli C jest dodatnim operatorem samosprzężonym w \mathcal{H} i $h \in \mathcal{D}^\infty(C)$, to następujące warunki są równoważne¹:

- (a) $h \in \mathcal{N}(C)$,
- (b) dla każdej liczby rzeczywistej $s \geq 1$, $\langle C^s h, h \rangle = 0$,
- (c) istnieje liczba rzeczywista $t \geq 1$ taka, że $\langle C^t h, h \rangle = 0$,
- (d) $L_C(h) := \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt[s]{\langle C^s h, h \rangle} = 0$.

Implikacje (a) \Rightarrow (b) i (b) \Rightarrow (c) są oczywiste. Dla dowodu (c) \Rightarrow (d), zauważmy, że równość $\int_{[0, \infty)} x^t \langle E_C(dx)h, h \rangle = \langle C^t h, h \rangle = 0$ oznacza, że miara $\langle E_C(\cdot)h, h \rangle$ jest skupiona w zbiorze $\{0\}$. Tym samym $\langle C^s h, h \rangle = 0$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $s \geq 1$, co daje (d). Implikację (d) \Rightarrow (a) można łatwo wywnioskować z faktu², że funkcja $[1, \infty) \ni s \rightarrow \sqrt[s]{\langle C^s h, h \rangle} \in [0, \infty]$ jest rosnąca dla każdego wektora $h \in \mathcal{D}^\infty(C)$ o normie równej 1 (zob. n.p., [33]).

¹ Istnienie granicy w (d) było już dyskutowane w dowodzie lematu 3.4.4.

²Do dowodu faktu wystarczy zastosować rozumowanie analogiczne jak w dowodzie lematu 3.4.4 i skorzystać z równości $\mu_h([0, \infty)) = \|h\|^2 = 1$.

Krok 2. Granica $\lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt[s]{\langle A^s h, h \rangle / \langle B^s h, h \rangle}$ istnieje dla wszystkich $h \in \mathcal{D}^\infty(A) \cap \mathcal{N}(B)$.

Rzeczywiście z kroku 1. granica równa się 0, gdy $h \in \mathcal{N}(A)$ i ∞ w przeciwnym razie.

Krok 3. Granica $\lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt[s]{\langle A^s h, h \rangle / \langle B^s h, h \rangle}$ istnieje dla każdego $h \in \mathcal{X}$.

Istotnie, ze względu na krok 1. i 2. możemy założyć, że $L_B(h) > 0$. Wiemy już, że obie granice $L_A(h)$ i $L_B(h)$ istnieją i należą do przedziału $[0, \infty]$. Z naszych założeń o h wynika, że jedna z tych granic jest skończona. Stąd już łatwo wywnioskować, że granica $\lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt[s]{\langle A^s h, h \rangle / \langle B^s h, h \rangle}$ istnieje i jest równa $L_A(h)/L_B(h)$. \square

Indeks

- $\mathcal{B}_S(\mathcal{H})$ -zbiór wszystkich ograniczonych operatorów samosprzężonych na przestrzeni Hilberta \mathcal{H} 3
 \mathbb{N} -zbiór liczb całkowitych nieujemnych 5
 \mathbb{N}_* -zbiór liczb całkowitych dodatnich 5
 \mathbb{Z} -zbiór liczb całkowitych 5
 \mathbb{Q} -ciało liczb wymiernych 5
 \mathbb{R} -ciało liczb rzeczywistych 5
 \mathbb{C} -ciało liczb zespolonych 5
 χ_σ -funkcja charakterystyczna zbioru σ 5
 $\mathfrak{B}(X)$ - σ -algebra wszystkich podzbiorów borelowskich przestrzeni topologicznej X 5
 $\mathcal{D}(A)$ -dziedzina operatora A 6
 $\mathcal{N}(A)$ -jądro A 6
 $\mathcal{R}(A)$ -obraz A 6
 \bar{A} -domknięcie operatora A 6
 $\mathcal{D}^\infty(A) = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{D}(A^n)$ 6
 $\mathcal{B}_a(A)$ 6
 $\mathcal{B}(A)$ -zbiór wektorów ograniczonych A 6
 $\mathcal{A}(A)$ -zbiór wektorów analitycznych A 6
 $\mathcal{Q}(A)$ -zbiór wektorów quasi-analitycznych A 6
 $\mathcal{S}(A)$ -zbiór wektorów stieltjesowskich A 6
 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ - C^* -algebra wszystkich ograniczonych operatorów A na \mathcal{H} 7
 $I = I_{\mathcal{H}}$ -operator identycznościowy na \mathcal{H} 7
 $S(X, E)$ 8
 $\varphi(A)$ 8
 A^s 8
 $\text{supp } \mu$ -domknięty nośnik miary μ 8
 δ_a -miara Diraca a 10
 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ -zbiór wszystkich rzutów ortogonalnych na \mathcal{H} 14
 $\bigvee \mathcal{A}$ 14
 $\bigwedge \mathcal{A}$ 14
 E_A 15
 F_A 15
 $L^p(\mathbb{R}^\kappa, \mu)$ 20
 $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ 20
 Ω^- 36
 (g_1, \dots, g_κ) -zestawienie funkcji g_1, \dots, g_κ 37
 $\Omega^{(\epsilon)}$ 37
 $\text{supp } E$ -nośnik miary spektralnej E 39
 π_j 42
 $E_{\mathbf{A}}$ 42
 $F_{\mathbf{A}}$ 43
 $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^\kappa)$ 43
 $\varphi(\mathbf{A})$ 45
 $\varphi(X)(\mathbf{A})$ 45
 $X^\alpha(\mathbf{A})$ 50
 x^α 50
 $g_1 \times \dots \times g_\kappa$ -iloczyn kartezjański funkcji g_1, \dots, g_κ 52
 $\dagger = (\dagger_1, \dots, \dagger_\kappa) \in \{-, +\}^\kappa$ 52
 $|\alpha|$ 57
 $\mathcal{D}^\infty(\mathbf{A})$ 58
 $\mathcal{B}_a(\mathbf{A})$ 58
 $\mathcal{B}(\mathbf{A})$ 58
 e_j 58
 $\text{ess sup } g$ -istotny kres górny funkcji mierzalnej $g: X \rightarrow [0, \infty]$ 69

Bibliografia

- [1] R. B. Ash, *Real Analysis and Probability*, Academic Press, Inc., New York, San Francisco, London, **1972**.
- [2] M. Sh. Birman, M. Z. Solomjak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
- [3] H. Comman, *Upper regularization for extended selfadjoint operators*, J. of Operator theory **55** (2006), 91-116.
- [4] W. G. Faris, *Selfadjoint operators*, Lecture Notes in Math., vol. 433, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, **1975**.
- [5] S. Gudder, An order for quantum observables, *Math. Slovaca* **56** (2006), 573-589.
- [6] P. R. Halmos, Commutativity and spectral properties of normal operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **12** (1950), 153-156.
- [7] P. R. Halmos, *Measure theory*, van Nostrand, Princeton 1956.
- [8] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, London, New York, 1934.
- [9] R. V. Kadison, Order properties of bounded self-adjoint operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* **2** (1951), 505-510.
- [10] T. Kato, Spectral order and a matrix limit theorem, *Linear and Multilinear Algebra* **8** (1979/80), 15-19.
- [11] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin **1980**.
- [12] H. Leinfelder, A geometric proof of the spectral theorem for unbounded selfadjoint operators, *Math. Ann.* **242** (1979), 85-96.
- [13] B. A. Lengyel, M. H. Stone, Elementary proof of the spectral theorem, *Ann. of Math.* **37** (1936), 853-864.
- [14] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1973.
- [15] S. Miyajima, I. Saito, ∞ -hyponormal operators and their spectral properties, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **67** (2001), 357-371.
- [16] W. Mlak, *Hilbert spaces and operator theory*, PWN-Polish Scientific Publishers and Kluwer Academic Publishers, Warszawa, Dordrecht, 1991.
- [17] E. Nelson, Analytic vectors, *Ann. Math.* **70** (1959), 572-615.
- [18] J. von Neumann, Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **161** (1929), 208 - 236.
- [19] A. E. Nussbaum, Quasi-analytic vectors, *Ark. Math.* **6** (1965), 179-191.
- [20] A. E. Nussbaum, A note on quasi-analytic vectors, *Studia Math.* **33** (1969), 305-309.
- [21] M. P. Olson, The selfadjoint operators of a von Neumann algebra form a conditionally complete lattice, *Proc. Amer. Math. Soc.* **28** (1971), 537-544.
- [22] A. Płaneta, J. Stochel, Spectral order for unbounded operators.
- [23] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1974.
- [24] W. Rudin, *Analiza funkcyjonalna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2002.
- [25] J. Rusinek, p -analytic and p -quasi-analytic vectors, *Studia Math.* **127** (1998), 233-250.

- [26] J. Rusinek, Non-linearity of the set of p -quasi-analytic vectors for some essentially self-adjoint operators, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* **48** (2000), 287-292.
- [27] Y. S. Samoilenko, *Spectral theory of families of self-adjoint operators*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991. (1951), 227-232.
- [28] S. Sherman, Order in operator algebras, *Amer. J. Math.* **73** (1951), 227-232.
- [29] J. Stochel and F. H. Szafraniec, On normal extensions of unbounded operators. I, *J. Operator Theory* **14** (1985), 31-55.
- [30] J. Stochel and F. H. Szafraniec, C^∞ -vectors and boundedness, *Ann. Polon. Math.* **66** (1997), 223-238.
- [31] J. Stochel and F. H. Szafraniec, Domination of unbounded operators and commutativity, *J. Math. Soc. Japan* **55** (2003), 405-437.
- [32] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 15, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. **1932**.
- [33] F. H. Szafraniec, Kato-Protter type inequalities, bounded vectors and the exponential function, *Ann. Polon. Math.* **51** (1990), 303-312.
- [34] D. M. Topping, *Lectures on von Neumann algebras*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1971.
- [35] J. Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces*, Springer-Verlag, New York, 1980.