

TEORIA DYSKÓW ANALITYCZNYCH

ARMEN EDIGARIAN

Celem tej notki jest przedstawienie metody konstruowania ekstremalnych funkcji plurisubharmonicznych za pomocą dysków analitycznych.

Zacznijmy od definicji funkcji plurisubharmonicznej. Niech D będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$ oraz niech $\mathbb{D}$ oznacza koło jednostkowe w $\mathbb{C}$. Mówimy, że funkcja

$$u : D \longrightarrow [-\infty, +\infty)$$

jest plurisubharmoniczna jeśli:

1. u jest półciągłą z góry;
2. dla dowolnego odwzorowania holomorficznego $f : \mathbb{D} \longrightarrow D$ z pewnego otoczenia domknięcia $\mathbb{D}$ w obszar D (zbiór takich odwzorowań oznaczamy $\mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$) zachodzi nierówność:

$$(1) \quad u(f(0)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(f(e^{i\theta})) d\theta.$$

Powyższa definicja nie jest standardowa i w wielu podręcznikach jest podawana w formie twierdzenia (patrz np. [Kli 1991]). Jednak zaletą tej definicji jest to, że bezproblemowo przenosi się do rozmaitości zespolonych.

Zbiór funkcji plurisubharmonicznych na D oznaczamy $\text{PSH}(D)$. Klasyczną metodą konstrukcji (ekstremalnych) funkcji plurisubharmonicznych jest następująca metoda Perrona-Bremermanna. Niech $\mathcal{U} \subset \text{PSH}(D)$ będzie dowolnym podzbiorem oraz niech

$$P_{\mathcal{U}}(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{U}\}, \quad z \in D.$$

Załóżmy, że rodzina funkcji plurisubharmonicznych $\mathcal{U}$ jest lokalnie ograniczona z góry. Wtedy $P_{\mathcal{U}}^*$ jest plurisubharmoniczna na D , gdzie $v^*(z) = \limsup_{w \rightarrow z} v(w)$ oznacza górną regularyzację półciągłą funkcji v .

Przykładami takiej konstrukcji są następujące dwie funkcje, które odgrywają bardzo ważną rolę w teorii pluripotencjału (por. [Kli 1991]).

Niech $E \subset D$ będzie dowolnym podzbiorem. Przez relatywnie ekstremalną funkcję rozumiemy

$$\omega(z, E, D) = \sup\{u(z) : u \in \text{PSH}(D), u \leq -1 \text{ na } E, u \leq 0 \text{ na } D\}, \quad z \in D.$$

Jak już wspominałem $\omega^*(\cdot, E, D)$ jest funkcją plurisubharmoniczną.

Niech $p \in D$. Przez *zespoloną funkcję Greena* z biegunem w punkcie p rozumiemy funkcję

$$(2) \quad g_D(z, p) = \sup\{u(z) : u \in \text{PSH}(D), u \leq 0, u(w) \leq \ln \|w - p\| + C \\ \text{w pewnym otoczeniu } p\}, \quad z \in D.$$

Łatwo pokazać, że funkcja $g_D(\cdot, p)$ jest plurisubharmoniczna (patrz np. [Kli 1991]).

Pod koniec lat 80-tych E. Poletsky zaproponował inną metodę konstrukcji funkcji plurisubharmonicznych, w pewnym sensie, dualną do metody Perrona-Bremermanna.

Niech $H : \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ będzie dowolną funkcją oraz niech

$$E_H(z) = \inf\{H(f) : f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D), f(0) = z\}, \quad z \in D.$$

Będziemy mówili, że H jest funkcjonalem dysków oraz E_H jest otoczką funkcjonala H . Ogólna idea Poletsky'ego polega na pokazaniu, że przy pewnych założeniach na H otoczka E_H jest funkcją plurisubharmoniczną. Rozważmy teraz przykłady dla których wiadomo, że ich otoczki są plurisubharmoniczne (patrz np. [Pol 1993], [Edi 2002], [Lár-Sig 1998]).

Funkcjonał 1 (Poissona). Niech $\varphi : D \rightarrow [-\infty, +\infty]$ będzie funkcją półciągłą z góry. Wtedy definiujemy funkcjonal Poissona w następujący sposób:

$$\mathcal{F}_1^\varphi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(f(e^{i\theta})) d\theta, \quad f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D).$$

Zauważmy, że jeśli v jest funkcją plurisubharmoniczną na D taką, że $v \leq \varphi$ to dla dowolnego odwzorowania $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D)$ zachodzi nierówność $v(f(0)) \leq \mathcal{F}_1^\varphi(f)$ (wynika to z (1)) oraz

$$\sup\{v(z) : v \in \text{PSH}(D), v \leq \varphi\} \leq E_{\mathcal{F}_1^\varphi}(z) \leq \varphi(z)$$

(dla otrzymania prawej nierówności bierzemy stałe odwzorowanie równe z).

Zatem z plurisubharmoniczności $E_{\mathcal{F}^\varphi}$ wynika jedna z podstawowych równości w teorii E. Poletsky'ego

$$E_{\mathcal{F}_1^\varphi}(z) = \sup\{v(z) : v \in \text{PSH}(D), v \leq \varphi\}, \quad z \in D.$$

Dla zbioru otwartego $U \subset D$ z powyższej równości (biorąc jako $\varphi = -\chi_U$, gdzie χ_U jest funkcją charakterystyczną zbioru U) otrzymujemy następującą ważną charakteryzację relatywnej funkcji ekstremalnej

$$\omega(z, U, D) = -\frac{1}{2\pi} \sup\{\sigma(f^{-1}(U) \cap \partial\mathbb{D}) : f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}, D), f(0) = z\},$$

gdzie σ oznacza miarę Lebesgue'a na okręgu jednostkowym. Stosując ten wynik można pokazać, że relatywna funkcja ekstremalna ma następującą własność produktową (patrz [Edi-Pol 1997]).

Twierdzenie 1. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$, $G \subset \mathbb{C}^m$ będą obszarami. Jeśli $U \subset D$, $V \subset G$ są podzbiorami otwartymi, to

$$\omega((z, w), U \times V, D \times G) = \max\{\omega(z, U, D), \omega(w, V, G)\}, \quad (z, w) \in D \times G.$$

Funkcjonał 2 (Riesza). Niech v będzie funkcją plurisubharmoniczną na D oraz niech $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$. Jeśli $v \circ f \equiv -\infty$ to definiujemy $\mathcal{F}_2^v(f) = 0$. Natomiast jeśli $v \circ f \not\equiv -\infty$ to

$$\mathcal{F}_2^v(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} (\log |\cdot|) \Delta(v \circ f).$$

Funkcjonał ten jak dotychczas, właściwie, nie ma zastosowań w analizie zespolonej. Jediną ciekawostką jest już wspomniana własność, że jej otoczką jest plurisubharmoniczna.

Funkcjonał 3 (Greena). Niech $p \in D$ oraz niech

$$\mathcal{F}_3(f) = \sum_{\xi \in f^{-1}(p)} \log |\xi|, \quad f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D).$$

Korzystając z nierówności Schwarza (patrz np. [Jar-Pfl 1993]) łatwo pokazać, że dla dowolnego odwzorowania $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, D)$ takiego, że $f(0) = z$ zachodzi nierówność $g_D(z, p) \leq \mathcal{F}_3(f)$ oraz $g(\cdot, p) \leq E_{\mathcal{F}_3}$. Zauważmy, że dla ustalonego $p \in D$ istnieje stała $R > 0$ taka, że $\mathbb{B}(p, R) \Subset D$, gdzie $\mathbb{B}(p, R)$ oznacza kulę o środku p i promieni R . Niech $z \in \mathbb{B}(p, R)$. Rozważmy odwzorowanie $f(\lambda) = p + R \frac{\|z-p\| - R\lambda}{R - \|z-p\|\lambda} \cdot \frac{z-p}{\|z-p\|}$. Łatwo sprawdzić, że $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{B}(p, R)$, $f(0) = z$ oraz $f(\frac{\|z-p\|}{R}) = p$. Otrzymujemy stąd, że $E_{\mathcal{F}_3}(z) \leq \ln \left(\frac{\|z-p\|}{R} \right)$ dla $z \in \mathbb{B}(p, R)$. Z tych rozważań, z plurisubharmoniczności $E_{\mathcal{F}_3}$ oraz z definicji (2) wynika kolejna podstawowa równość w teorii E. Poletsky'ego

$$E_{\mathcal{F}_3}(z) = g_D(z, p), \quad z \in D.$$

Z tej równości, tak jak w przypadku funkcji relatywnie ekstremalnej, można pokazać następującą własność produktową (patrz np. [Edi 2002]).

Twierdzenie 2. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$, $G \subset \mathbb{C}^m$ będą obszarami. Jeśli $p \in D$, $q \in G$, to

$$g_{D \times G}((z, w), (p, q)) = \max \{g_D(z, p), g_G(w, q)\}, \quad (z, w) \in D \times G.$$

SPIS LITERATURY

- [Edi 1997] A. Edigarian, *On the product property of the pluricomplex Green function*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 2855–2858.
- [Edi 2002] A. Edigarian, *Analytic discs method in complex analysis*, Dissertationes Math. 402 (2002), 1–56.
- [Edi-Pol 1997] A. Edigarian & E. Poletsky, *Product property of the relative extremal function*, Bull. Sci. Acad. Pol. 45 (1997), 331–335.
- [Jar-Pfl 1993] M. Jarnicki & P. Pflug, *Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis*, Walter de Gruyter, 1993.
- [Kli 1991] M. Klimek, *Pluripotential Theory*, London Math. Soc. Monographs, 6, Clarendon Press, 1991.
- [Kra 1982] S. Krantz, *Function theory of several complex variables*, John Wiley & Sons, 1982.
- [Lár-Sig 1998] F. Lárusson & R. Sigurdsson, *Plurisubharmonic functions and analytic discs on manifolds*, J. Reine Angew. Math. 501 (1998), 1–39.
- [Pol 1993] E.A. Poletsky, *Holomorphic currents*, Indiana Univ. Math. J. 42 (1993), 85–144.

