

**Wpływ opóźnień inwestycyjnych
na długookresową równowagę
w zagregowanych modelach
wzrostu gospodarczego**

Adam Krawiec

**Wpływ opóźnień inwestycyjnych
na długookresową równowagę
w zagregowanych modelach
wzrostu gospodarczego**

Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa
Wyższego w latach 2006–2007 jako projekt badawczy nr N111 003 31

RECENZENCI

dr hab. Krzysztof Malaga, prof. nadzw. UEP
prof. dr hab. Krzysztof Grysa

PROJEKT OKŁADKI

Katarzyna Zalewska / Pracownia Register
Na okładce użyto fotografii autorstwa: Scriblr / Fotolia,
Tamara Kulikova / Fotolia

Copyright by Adam Krawiec & Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego
Wydanie I, Kraków 2013
All rights reserved

Niniejszy utwór ani żaden jego fragment nie może być reprodukowany,
przetwarzany i rozpowszechniany w jakikolwiek sposób za pomocą urzą-
dzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych
oraz nie może być przechowywany w żadnym systemie informatycznym bez
uprzedniej pisemnej zgody Wydawcy.

ISBN 978-83-233-3498-9



www.wuj.pl

Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego
Redakcja: ul. Michałowskiego 9/2, 31-126 Kraków
tel. 12-631-18-80, tel./fax 12-631-18-83
Dystrybucja: tel. 12-631-01-97, tel./fax 12-631-01-98
tel. kom. 506-006-674, e-mail: sprzedaz@wuj.pl
Konto: PEKAO SA, nr 80 1240 4722 1111 0000 4856 3325

Spis treści

Wstęp	7
Rozdział 1. Rola opóźnienia w ekonomii	15
1.1. Wprowadzenie	15
1.2. Opóźnienie w modelach ekonomicznych	16
1.3. Empiryczna ocena czasu opóźnienia	17
1.4. Podsumowanie	19
Rozdział 2. Modele cyklu koniunkturalnego z opóźnieniem inwestycyjnym	21
2.1. Wprowadzenie	21
2.2. Model cyklu koniunkturalnego Kaleckiego	23
2.3. Model cyklu koniunkturalnego Kaldora	26
2.4. Model cyklu koniunkturalnego Kaldora-Kaleckiego	29
2.5. Model wzrostu Kaldora-Kaleckiego	34
2.6. Podsumowanie	45
Rozdział 3. Model Solowa i opóźnienie inwestycyjne	47
3.1. Wprowadzenie	47
3.2. Model Solowa	50
3.3. Opóźnienie inwestycyjne w modelu Solowa	55
3.4. Podsumowanie	76
Rozdział 4. Opóźnienie inwestycyjne w wybranych modelach wzrostu	79
4.1. Wprowadzenie	79
4.2. Model AK z opóźnieniem	80
4.3. Model wzrostu Mankiwa-Romera-Weila z opóźnieniem	85
4.4. Model Ramseya-Cassa-Koopmansa z opóźnieniem	91
4.5. Podsumowanie	96

Rozdział 5. Opóźnienie inwestycyjne i publiczny kapitał	
rzeczowy	99
5.1. Wprowadzenie	99
5.2. Model ze stałą stopą wzrostu publicznego kapitału rzeczowego	102
5.3. Model ze stałą stopą podatkową	109
5.4. Podsumowanie	117
Zakończenie	121
Dodatek A. Równania różniczkowe	125
A.1. Równania różniczkowe zwyczajne	125
A.2. Równania różniczkowe z opóźnionym argumentem	131
A.3. Bifurkacja Hopfa	136
Dodatek B. Programy komputerowe	139
Bibliografia	141

Wstęp

Niniejsza praca poświęcona jest zbadaniu wpływu opóźnień inwestycyjnych na dynamikę zagregowanych modeli wzrostu gospodarczego. Temat ten jest częścią szerszego nurtu analizy prostych modeli ekonomicznych posiadających złożoną dynamikę, która nie ma charakteru stochastycznego. Wydaje się, że jest to interesujący i obiecujący kierunek badań. W pracy, która ma charakter teoretyczny, koncentruję się przede wszystkim na analizie dynamiki prostych modeli wzrostu gospodarczego, a nie na empirycznej weryfikacji ich wyników.

Problem opóźnień inwestycyjnych był znany w ekonomii od dawna. Już w chwili narodzin ekonomii jako nowoczesnej nauki Adam Smith w *Badaniach nad naturą i przyczynami bogactwa narodów* (1954) zwrócił na niego uwagę, rozważając kwestię podziału pracy, który

„jest ograniczony przez akumulację kapitału, ponieważ proces produkcji wymaga czasu; istnieje bowiem opóźnienie w czasie między zapoczątkowaniem produkcji i końcową sprzedażą głównego produktu. W prostej gospodarce, w której każde gospodarstwo domowe wytwarza wszystko, co mu jest potrzebne w zakresie konsumpcji, a podział pracy jest znikomy, nie potrzeba dużo kapitału, żeby utrzymać pracowników (żywność, odzież, mieszkanie) w czasie trwania procesu produkcyjnego. Gdy nastąpi podział pracy, pracownicy nie wytwarzają już dóbr tylko dla swojej własnej konsumpcji i musi istnieć pewien zapas dóbr konsumpcyjnych na utrzymanie pracowników w toku tego wymagającego czasu procesu. Zapas tych dóbr pochodzi z oszczędności i w tym kontekście jest tym, co Smith nazwał kapitałem. Ważną funkcją kapitalisty jest zapewnienie środków na pokrycie luki w czasie między rozpoczęciem produkcji a sprzedażą gotowego produktu.

Wraz ze wzrostem podziału pracy pracownicy wytwarzają coraz mniej dóbr dla swojej własnej konsumpcji i producent musi posiadać oszczędności (kapitał), aby mógł utrzymać pracowników w trakcie wymagającego czasu procesu produkcji. Dlatego jedną z funkcji kapitalisty jest zapewnienie środków na stworzenie zapasu dóbr w czasie między rozpoczęciem produkcji i sprzedażą gotowego produktu” (Landreth i Colander, 1998, s. 127–128).

Ideę, że opóźnienia inwestycyjne mogą powodować cykliczne zjawiska w gospodarce, przypisujemy Aftalionowi (1927), który twierdził, że opóźnienia w procesie produkcji mogą powodować cykliczne zmiany wielkości produkcji. Aftalion (1927, s. 165) pisał, że „główną odpowiedzialność za cykliczne fluktuacje należy przypisać jednej z charakterystyk współczesnej techniki przemysłowej, tj. długiemu okresowi koniecznemu do wyprodukowania kapitału”.

Idea ta została po raz pierwszy uwzględniona w matematycznych modelach cyklu koniunkturalnego w latach 30. ubiegłego wieku. W tym celu wykorzystano równania różniczkowe z opóźnionym argumentem, w których zmiana stanu zależy nie tylko od bieżącego stanu, jak to ma miejsce w przypadku równań różniczkowych zwyczajnych, ale także od przeszłego stanu. W naturalny sposób tego typu rozważania pojawiły się w związku z badaniem koniunktury gospodarczej. W latach 30. ubiegłego wieku Tinbergen (1931) i Kalecki (1933) stworzyli pierwsze matematyczne modele, w których odstęp czasu między podjęciem decyzji inwestycyjnych i ich zrealizowaniem jest istotą mechanizmu odpowiedzialnego za cykliczny przebieg zjawiska.

Tinbergen (1931) stworzył prosty model, w którym decyzje o budowie nowych statków są zdeterminowane aktualnym zapotrzebowaniem na tonaż. Ponieważ nowe statki oddawane są po pewnym czasie, koniecznym do ich skonstruowania, w chwili ich wejścia do eksploatacji sytuacja na rynku przewozów jest inna i mamy nadprodukcję. W pewnym sensie, patrząc na indywidualne decyzje inwestycyjne stoczni, mamy do czynienia z „dylematem więźnia” (Malawski i inni, 2006). Gdy brakuje tonażu, wiele przedsiębiorstw inwestuje i po oddaniu tych inwestycji do użytku, mamy zbyt duże zdolności przewozowe w stosunku do popytu na tego rodzaju usługi. Wtedy też inwestycje są ograniczane, z czasem część starej floty wychodzi z użycia, co prowadzi do zmniejszenia podaży możliwości przewozowych. I cykl zaczyna się

od początku. Cykliczne zmiany mają charakter endogeniczny i nie są powodowane przez żadne zewnętrzne czynniki. Opóźnienie związane z czasem budowy statków jest czynnikiem odpowiedzialnym za fluktuacje podaży, ponieważ poziom inwestycji planowany jest na podstawie bieżącej sytuacji rynkowej i nie ma możliwości przewidzenia, jaki tonaż będzie dostępny w pewnej chwili w przyszłości, uwzględnivszy w międzyczasie wszystkie ukończone inwestycje i wycofane stare, zużyte jednostki.

Wzrost gospodarczy jest ważnym i jednocześnie bardzo złożonym procesem ekonomicznym. Wśród wielu czynników odpowiedzialnych za przebieg akumulacji kapitału rzeczowego charakterystyka procesu inwestycyjnego ma olbrzymie znaczenie. Jedną z najważniejszych kwestii jest uwzględnienie opóźnienia związanego z czasem realizacji inwestycji. W neoklasycznych modelach wzrostu gospodarczego (np. w modelu Solowa) przyjmuje się, że inwestycje mają natychmiastowy wpływ na zmiany wielkości trwałego majątku produkcyjnego, utożsamianego z kapitałem rzeczowym. Rozszerzenie analizy o czas budowy dóbr kapitałowych wydaje się interesującym kierunkiem badań wzrostu gospodarczego.

Badania prostych, nieliniowych modeli w fizyce i biologii wykazały, że możliwe jest odtworzenie złożonego, nieregularnego zachowania. W tym przypadku złożona dynamika nie jest wynikiem działania wielkiej liczby czynników, ale jest powodowana przez nieliniowe relacje między zmiennymi. Chociaż to zjawisko było znane od końca XIX wieku dzięki pionierskim pracom Poincarégo, zainteresowanie tego typu dynamiką w fizyce i biologii zaczęło się w latach 60. i 70. XX wieku. Duży wpływ na to miało znalezienie szczególnego typu złożonego zachowania zwanego chaosem deterministycznym. Także w ekonomii zainteresowano się złożonym zachowaniem w niskowymiarowych modelach deterministycznych (Lorenz, 1993; Medio, 1991).

Jednym z istotnych problemów w modelowaniu zjawisk ekonomicznych jest kwestia, jak długo dana przyczyna wpływa na przebieg zjawiska lub po jakim czasie ta przyczyna uwidoczni się w gospodarce. Zwykle przyjmujemy, że wszelkie oddziaływania są natychmiastowe. Jednakże w pewnych wypadkach uwzględnienie opóźnienia jest nieodzowne. Najpierw w latach 30. ubiegłego wieku, badając cykliczne zjawiska w gospodarce, Tinbergen (1931) i Kalecki (1933) stworzyli proste modele z opóźnieniem, które wiązało się z czasem realizacji za-

mówień inwestycyjnych. Później zainteresowanie tego typu modelami nie było zbyt duże i rzadko pojawiały się nowe ekonomiczne modele wykorzystujące opóźnienie w procesach gospodarczych. Od początku lat 80. XX wieku, w wyniku wzrostu zainteresowania złożoną, nieliniową dynamiką w fizyce i biologii, pojawiły się liczne modele ekonomiczne, wykorzystujące mechanizm opóźnienia. Wśród tych modeli szczególnie interesujące są modele wzrostu gospodarczego z opóźnieniem inwestycyjnym.

Zwykle matematyczne modele wzrostu gospodarczego mają postać równania różniczkowego zwyczajnego lub układu równań różniczkowych zwyczajnych. W celu uwzględnienia opóźnienia w modelu należy skorzystać z pewnego typu równań funkcjonalnych nazywanych równaniami różniczkowymi z odchylonym argumentem. Równania te, określane jako równania różnicowo-różniczkowe, pojawiły się w XVIII wieku. Jednakże gwałtowny rozwój teorii tych równań nastąpił w XX wieku, szczególnie po II wojnie światowej. Podstawowa teoria dotycząca stabilności układów opisywanych tego typu równaniami została rozwinięta przez Pontriagina. Następnie powstało wiele ważnych prac, które wniosły istotny wkład do zrozumienia dynamicznego zachowania w tego typu równaniach (Bellman i Cooke, 1963; Halanay, 1966; El'sgol'ts i Norkin, 1971; Mishkis, 1972; Hale i Verduyn Lunel, 1993; Kolmanovskii i Myshkis, 1999).

Niektóre liniowe równania różniczkowe oraz układy liniowych równań różniczkowych jest dość łatwo rozwiązać analitycznie. W przypadku równań nieliniowych sytuacja jest o wiele trudniejsza. Dokładne rozwiązania można uzyskać tylko dla pewnych szczególnych postaci funkcji, w ogólności jednak zagadnienie można rozwiązać tylko w przybliżeniu metodami numerycznymi. Tymczasem w całym szeregu zagadnień dokładność ilościowych obliczeń nie jest wcale potrzebna, wystarcza natomiast jakościowy obraz zjawisk, przy czym ważne jest przewidywanie charakteru przebiegu zjawiska w przypadku zmiany warunków, w jakich odbywa się badane zjawisko. Odnosi się to zwłaszcza do zagadnień z dziedziny ekonomii, gdzie ani wartości parametrów, ani warunki początkowe z reguły nie są znane dokładnie, a od analizy matematycznej problemu żąda się przede wszystkim opisu jakościowego istotnych charakterystyk procesu. Ważne np. bywa rozstrzygnięcie, czy dla danego układu istnieją stany stacjonarne, czy są one trwałe i jak zmienia się stabilność układu w wyniku zmiany

parametrów. Takie właśnie pytania są typowymi problemami jakościowej teorii równań różniczkowych. Dlatego też celem jakościowego badania układów dynamicznych jest wyznaczenie dla wszystkich dopuszczalnych warunków początkowych wszystkich możliwych typów rozwiązań bez ich jawnego podania.

Uzasadnienie wykorzystania równań różniczkowych z odchylnym argumentem (nazywane także równaniami mieszanymi różniczkowo-różnicowymi) w ekonomii najlepiej wyraził Giancarlo Gandolfo:

„Fundamentalnym powodem jest to, że sądzimy, iż mieszane różniczkowo-różnicowe równania są o wiele bardziej odpowiednie, niż tylko równania różniczkowe czy tylko równania różnicowe, do adekwatnego potraktowania dynamicznych procesów ekonomicznych. Sądzimy tak, ponieważ wydaje się nam, że rzeczywiste dynamiczne zjawiska ekonomiczne są w przybliżeniu zjawiskami ciągłymi, w których jednak obecne są w istotny sposób nieciągłości, opóźnienia, tak że mają wpływ na bieżącą wartość zmiennej wcześniejsze wartości tej samej zmiennej (o skończonym i nieinfinitymalnym odstępie czasowym) etc.” (Gandolfo, 1980, s. 527).

W niniejszej pracy ograniczę się tylko do jednego rodzaju opóźnień pojawiających się w gospodarce, związanych z czasem realizacji inwestycji. Przyjmuję, że wytwarzanie kapitału rzeczowego (zarówno prywatnego, jak i publicznego) oraz kapitału ludzkiego jest pewnym procesem, rozpoczynającym się od decyzji inwestycyjnych, potem przechodzącym w okres budowy dóbr inwestycyjnych, a kończącym się oddaniem ich do użytku. Decyzje inwestycyjne podejmowane są albo na podstawie aktualnego stanu gospodarki, albo prognoz gospodarczych. W jednym i w drugim przypadku w chwili ukończenia inwestycji wzrost mocy produkcyjnych nie musi być adekwatny do zmienionych warunków gospodarowania. Rozpoczynając inwestycje, możemy wykorzystać jedynie aktualne zasoby czynników wytwórczych, co oznacza, że kapitał rzeczowy oddany do użytku w chwili t został wytworzony za pomocą czynników wytwórczych dostępnych w chwili rozpoczęcia inwestycji (lub podjęcia decyzji inwestycyjnych) $t - \vartheta$. Parametr ϑ jest oznaczeniem okresu budowy dóbr inwestycyjnych. Dla uproszczenia zostanie uwzględnione tylko stałe opóźnienie, które odpowiada średniemu czasowi realizacji inwestycji w gospodarce. W różnych działach

gospodarki okres realizacji inwestycji jest różny, ale takie założenie upraszczające ma sens, gdy przede wszystkim chcemy zbadać, na ile opóźnienie jako takie ma wpływ na dynamikę wzrostu gospodarczego. Jest to uzasadnione poziomem uproszczenia w modelu Solowa, który będzie punktem odniesienia dla modeli z opóźnieniem inwestycyjnym. Z formalnego punktu widzenia opóźnienie to zostanie wpisane w funkcję produkcji w tym sensie, że aktualnie oddawany do użytku kapitał rzeczowy został wytworzony przy użyciu zasobów czynników wytwórczych dostępnych w chwili rozpoczęcia inwestycji.

Opóźnienie inwestycyjne może prowadzić do cyklicznych rozwiązań. Zamiast stanu stacjonarnego gospodarka w długim okresie osiąga stan, w którym wielkości makroekonomiczne, takie jak zasób kapitału rzeczowego *per capita*, produkt *per capita* i inne, podlegają fluktuacjom. Mają one charakter samopodtrzymujący i mogą posiadać stabilną amplitudę. Tego typu rozwiązanie może wskazywać na istnienie odchyień od długookresowego trendu wzrostowego, które nazywamy cyklami wzrostu. W latach 60. ubiegłego wieku powstał jeden z pierwszych modeli cykli wzrostu (Goodwin, 1967). Goodwin pokazał istnienie cykli wzrostu w jednosektorowym modelu wzrostu gospodarczego ze stałym współczynnikiem kapitałochłonności, klasyczną funkcją oszczędności i stałą stopą wzrostu populacji i produktywności pracy.

Teoretyczne wyjaśnienie źródła nierównomiernego wzrostu gospodarczego jest istotne, by zrozumieć jego naturę w dzisiejszym świecie. Wśród wielu możliwych przyczyn nieregularności wskazywane są inwestycje. Wiadomo, że w jednosektorowym modelu wzrostu gospodarczego Solowa nigdy nie występują cykle. W modelu osiągnana jest monotonicznie równowaga – stan stacjonarny. Jedynie w przypadku, gdy w gospodarce produkowanych jest trzy lub więcej dóbr, możliwe jest generowanie cykli (Benhabib i Nishimura, 1979). Jednym z podstawowych mechanizmów prowadzących do powstania cyklicznego zachowania w tego typu modelach są bifurkacje (w wyniku zmiany małej zmiany wartości parametru modelu zmieniają się własności modelu). Interesującą dyskusję nad ekonomicznym znaczeniem mechanizmu bifurkacji i przykład bifurkacji Hopfa w modelu ekonomicznym można znaleźć w pracy Kinda (1999).

Rozważając wybrane neoklasyczne modele wzrostu (oraz model AK), zbadam, jak opóźnienie inwestycyjne wpływa na dynamikę wzrostu gospodarczego. Czy opóźnienie ma wpływ na długookresową rów-

nowagę? Czy ma też wpływ na zachowanie dynamiczne w otoczeniu stanu stacjonarnego?

Praca poświęcona jest tylko zagadnieniom teoretycznym. Jej celem jest zbadanie wpływu opóźnienia inwestycyjnego w ramach neoklasycznej teorii wzrostu gospodarczego. Na przykładzie kilku wybranych modeli wzrostu zamierzałem wyjaśnić, czy opóźnienia inwestycyjne mają wpływ na długookresową równowagę i zachowanie w pobliżu stanu stacjonarnego. W ilościowej analizie modeli konieczne było przyjęcie konkretnych wartości liczbowych parametrów w celu stwierdzenia, czy rozwiązania są ekonomicznie sensowne. Jednakże w pracy całkowicie pominięta została kwestia statystycznej weryfikacji badanych modeli. Jest to temat, który zasługuje na odrębną monografię.

W rozdziale 1 omówiono problem opóźnienia inwestycyjnego z empirycznego punktu widzenia oraz przedstawiono krótki przegląd modeli ekonomicznych z opóźnieniem, innych niż rozważane szczegółowo w pracy modele z opóźnieniem inwestycyjnym. W rozdziale 2 zaprezentowano powstawanie cykli koniunkturalnych i cykli wzrostu w wyniku uwzględnienia czasu realizacji zamówień inwestycyjnych w modelach Kaleckiego i Kaldora-Kaleckiego. Rozdział 3 zawiera analizę modelu wzrostu gospodarczego Solowa oraz modeli Solowa, w których uwzględniono opóźnienie inwestycyjne. Z kolei rozdział 4 zawiera analizę trzech modeli: model AK, model z kapitałem ludzkim i model z optymalną konsumpcją, w których uwzględniono opóźnienie inwestycyjne. W rozdziale 5 przedstawiono modele wzrostu z publicznym kapitałem rzeczowym i opóźnieniem inwestycyjnym. W pierwszym dodatku zostały zaprezentowane podstawowe definicje i twierdzenia teorii równań różniczkowych z odchylnym argumentem. Drugi dodatek zawiera krótki przegląd programów komputerowych użytecznych w analizie numerycznej układów dynamicznych.

* * *

Autor dziękuje wszystkim, którzy podzielili się z nim swoimi uwagami i sugestiami w trakcie pracy nad tematyką opóźnień inwestycyjnych w modelach cyklu koniunkturalnego i wzrostu gospodarczego. Wyrazy podziękowania należą się: prof. dr. hab. Januszowi Beksiakowi, prof. dr. hab. Tomaszowi Tokarskiemu, prof. dr. hab. Honoracie Sosnowskiej, prof. dr. hab. Władysławowi Welfe, prof. dr. hab. Alek-

sandrowi Welfe, prof. dr. hab. Jackowi Osiewalskiemu, prof. dr. hab. Markowi Szydłowskiemu i recenzentom pracy habilitacyjnej dr. hab. Krzysztofowi Maladze i prof. dr. hab. Krzysztofowi Grysie. Przedstawione w pracy badania były realizowane w ramach projektów badawczych KBN nr 1 H02B 009 15 i nr 1 H02B 023 27 oraz projektu badawczego MNiSW nr N111 003 31.

Rozdział 1

Rola opóźnienia w ekonomii

1.1. Wprowadzenie

Ekonomia matematyczna stawia sobie za cel budowanie i analizę modeli zjawisk ekonomicznych (Panek, 2003). W szczególności do badania dynamiki procesów ekonomicznych użyteczne są modele opisane przez równania różniczkowe. Główne znaczenie mają nieliniowe równania różniczkowe (i ich układy), ponieważ w odróżnieniu od prostych liniowych równań różniczkowych ich rozwiązania odpowiadają złożonym zachowaniom dynamicznym. Odkrycie chaosu deterministycznego w latach 60. ubiegłego wieku¹ spowodowało, że zainteresowano się układami prostych, nieliniowych równań różniczkowych i znaleziono wiele przykładów złożonego zachowania nie tylko w fizyce, biologii, chemii, ale również ekonomii. Zainteresowanie złożoną dynamiką wśród ekonomistów pojawiło się pod koniec lat 70. Ze względu na to, że równania różniczkowe z opóźnionym argumentem również mogą służyć do opisu złożonej dynamiki zjawisk, w większym stopniu zajęto się modelowaniem zjawisk ekonomicznych przy ich użyciu. W okresie od lat 30. do końca lat 90. prace z modelami opisanymi przez równania z opóźnionym argumentem pojawiały się incydentalnie. W ostatnim okresie opublikowano kilkanaście prac, w których opóźnienie w różnych ekonomicznych kontekstach odgrywało istotną rolę.

Ze względu na trudności i złożoność analizy równań z opóźnionym argumentem wykorzystuje się najczęściej najprostsze równania różniczkowe z opóźnieniem, takie jak np.

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t - \vartheta), \quad (1.1)$$

¹ Należy zaznaczyć, że tego typu złożona dynamika, którą określamy jako chaos deterministyczny, była znana już w czasach Poincarégo.

gdzie α jest parametrem. To równanie opisuje zmianę wielkości x w chwili t pod wpływem wartości x w przeszłości $t - \vartheta$. Skutek, jakim jest zmiana x w chwili t , jest opóźniony w stosunku do przyczyny, która miała miejsce w chwili $t - \vartheta$. Takie równanie w kontekście ekonomicznym zostało po raz pierwszy użyte do opisu cyklicznych zmian tonażu statków (Tinbergen, 1931). Z kolei dla ujemnej wartości parametru α Kobrinskii i Kusmint (1981) użyli tego równania do modelowania wielkości wydobycia ropy oraz produkcji maszyn.

1.2. Opóźnienie w modelach ekonomicznych

Modele wykorzystujące równania różniczkowe z opóźnionym argumentem były używane w wielu dziedzinach ekonomii, wszędzie tam, gdzie pojawia się opóźnienie. Wśród problemów mikroekonomicznych w szczególności należy wspomnieć o badaniu dynamiki rynku. Mackey (1989) rozważał dynamikę cen rynkowych w modelu, w którym istniało opóźnienie związane z reakcją producentów na zmianę ceny rynkowej. Z kolei Bélair i Mackey (1989) badali model równowagi rynkowej, w którym decyzje producenta o zmianie wielkości produkcji z opóźnieniem przekładały się na zmianę podaży rynkowej. Howroyd i Russell (1984) analizowali natomiast wpływ opóźnienia w modelu oligopolu Cournota, w którym każda firma dostosowała produkcję w odpowiedzi na działania konkurenta z pewnym opóźnieniem. Opóźnienie było związane z czasem potrzebnym na uzyskanie i przetworzenie informacji. Innym podobnego typu problemem jest tzw. cykl świński, gdzie opóźnienie ma uwarunkowanie biologiczne. Wiąże się ono z czasem potrzebnym do utuczenia zwierząt. Larson (1964) stworzył model z opóźnieniem, w którym pojawiają się cykliczne zmiany w podaży trzody chlewnej.

Wśród modeli makroekonomicznych, oprócz modeli cyklu koniunkturalnego i wzrostu gospodarczego, które szczegółowo zostaną przedstawione w następnych rozdziałach, należy przede wszystkim wspomnieć o pracach, w których badano model IS-LM. De Cesare i Sportelli (2005) i Neamtu i inni (2007) badali model IS-LM, którym występowało opóźnienie przychodów podatkowych. Zhou i Li (2008) przedstawili model IS-LM z opóźnieniem w procesie inwestycyjnym.

W literaturze ekonomicznej było rozważanych wiele modeli wzrostu gospodarczego, w których opóźnienie pojawiało się w innych kontekstach. El-Hodiri i inni (1972) przedstawili pierwszą pracę, w której wprowadzono opóźnienia do modelu optymalnego wzrostu. Jednakże autorzy nie analizowali związków między opóźnieniami i cyklami. Rustichini (1989) wprowadził złożoną strukturę opóźnień w modelu optymalnego wzrostu i podał rygorystyczny dowód istnienia cykli. Fanti i Manfredi (2003) rozważali model Solowa, w którym uwzględniono strukturę wiekową ludności. To tylko kilka przykładów wykorzystania opóźnienia do modelowania ekonomicznego w różnych dziedzinach ekonomii. Szerzej o ekonomicznych modelach z opóźnieniem pisze Gandolfo (1980).

W pracy ograniczę się do analizy opóźnienia występującego w procesie inwestycyjnym. Będzie to czas realizacji inwestycji kapitałowych. Czas budowy dóbr kapitałowych ma istotne znaczenie w modelach cyklu koniunkturalnego i wzrostu gospodarczego i tego typu modele będą analizował. Zajmę się również opóźnieniem w modelach wzrostu gospodarczego i w mniejszym zakresie w modelach cyklu koniunkturalnego. Opóźnienie będzie wiązało się jedynie z czasem budowy dóbr inwestycyjnych.

1.3. Empiryczna ocena czasu opóźnienia

Opóźnienie inwestycyjne interpretujemy jako czas wykonania zamówień inwestycyjnych. Taka interpretacja jest zgodna z poglądami Tinbergena i Kaleckiego. Podobnie jak oni przyjmują daleko idącą idealizację i uproszczenie procesu inwestycyjnego. Dane wskazują, że w przypadku inwestycji w fabryki i budynki wydatki w początkowym okresie są niskie i rosną, w miarę jak zbliża się termin zakończenia inwestycji (Del Boca i inni, 2008). Przyjmując, że istnieje jedno opóźnienie, wyznaczające odstęp między podjęciem decyzji inwestycyjnych i ukończeniem projektów inwestycyjnych, zaniedbujemy dynamikę wydatków w trakcie trwania inwestycji. Sposób wprowadzenia opóźnienia do neoklasycznego modelu wzrostu polega na tym, że inwestycje brutto w chwili zakończenia inwestycji są opisane przez zaoszczędzoną część dochodu wytworzonego w chwili rozpoczęcia inwestycji. Oznacza to, że całkowite wydatki na inwestycje mają miejsce w chwili rozpoczęcia

inwestycji lub że przedsiębiorcy posiadają środki finansowe w pełni pokrywające koszty realizacji inwestycji już w chwili podjęcia decyzji inwestycyjnych. Z drugiej strony możemy patrzeć na to z punktu widzenia dostępnych w danym momencie czynników wytwórczych. W chwili podjęcia decyzji lub rozpoczęcia inwestycji gospodarka dysponuje określonymi zasobami kapitału rzeczowego i pracy i tylko te czynniki wytwórcze zostaną użyte do wytworzenia kapitału oddanego do użytku po czasie określonym przez czas opóźnienia. Nie zostają uwzględnione w planach i następnie użyte ani kapitał, ani praca, które staną się dostępne w trakcie trwania inwestycji.

Dla uproszczenia przyjmujemy stały czas opóźnienia, który określa przeciętny czas realizacji inwestycji w gospodarce. Opierając się na dostępnych danych, należy zatem określić długość procesu inwestycyjnego i wyznaczyć jego średnią wartość. Inwestycje charakteryzują się dużą rozpiętością czasu realizacji inwestycji i mają niejednorodny charakter. Zakup i instalacja nowego wyposażenia wymagają mniej czasu niż budowa fabryki od podstaw. W literaturze przedmiotu istnieje kilka opracowań tego problemu.

W *Próbie teorii koniunktury* Kalecki (1933) określił czas wykonania zamówień inwestycyjnych, opierając się na danych Niemieckiego Instytutu Badania Koniunktur. Dla budynków mieszkalnych, przemysłowych i publicznych czas ten szacowany był na 8 miesięcy od rozpoczęcia do zakończenia budowy, a w przemyśle maszynowym na 6 miesięcy między zamówieniami i dostawą. Stąd Kalecki przyjął wartość parametru opóźnienia równą 0,6 roku (Kalecki, 1979, s. 130).

Na podstawie danych z 1954 roku Mayer (1960) zbadał 110 amerykańskich przedsiębiorstw budujących lub rozbudowujących fabryki. Ustalił on, że średni czas, ważony wartością projektu inwestycyjnego, od rozpoczęcia budowy do jej zakończenia wynosił 15 miesięcy. Taki sposób liczenia średniej wiąże się z tym, że małe projekty są liczniejsze niż projekty drogie.

Najszerszą analizę ze względu na ilość uwzględnionych podmiotów oraz ramy czasowe przeprowadził Montgomery (1995). Uwzględnił on 52 tysiące projektów inwestycyjnych (budownictwo przemysłowe sektora prywatnego) realizowanych w latach 1961–1991. Podobnie jak w przypadku pracy Mayera średni czas inwestycji liczony w miesiącach był ważony wartością inwestycji. Otrzymane wyniki były następujące: w latach 1961–1969 średni czas wynosił 17 miesięcy, w latach

1970–1971 17,8 miesiąca, w latach 1976–1977 17,4 miesiąca, w latach 1978, 1979 i 1980 odpowiednio 17,5, 16,9 i 15,5 miesiąca, w latach 1982–1983 14,2 miesiąca i w końcu w latach 1990–1991 średnia wyniosła 15,7 miesiąca. Widzimy więc, że średni czas inwestycji ma tendencję spadkową. Jeszcze wyraźniej widać to na przykładzie projektów inwestycyjnych o wartości przekraczającej 5 milionów dolarów, gdzie średni czas wynosił 39,9 miesiąca w latach 1961–1969 i tylko 19,2 miesiąca w latach 1982–1983. Autor pracy sugeruje, że jest to wynikiem ulepszeń technologii budowlanej lub tendencji do wybierania mniejszych projektów.

Biorąc pod uwagę cały badany okres 1961–1991, średnia wyniosła 16,7 miesiąca. Montgomery wyznaczył też rozkład ilości projektów względem czasu ich trwania. Rozkład był asymetryczny ze względu na znaczący udział małych projektów o krótkim czasie wykonania. Najwięcej projektów inwestycyjnych to projekty 6- i 11–12-miesięczne. Czas realizacji 44% projektów nie przekraczał roku. Projekty o czasie wykonania dłuższym niż 4 lata stanowiły 1,65% wszystkich projektów.

Del Boca i inni (2008) estymowali model z opóźnieniem, wykorzystując roczne dane o inwestycjach włoskich przedsiębiorstw. W przypadku wydatków na wyposażenie opóźnienie nie przekraczało jednego roku. Z kolei dla wydatków na budynki i hale fabryczne czas realizacji inwestycji mieścił się w przedziale dwóch, trzech lat.

Biorąc pod uwagę powyższe oszacowania średniego czasu realizacji inwestycji, można przyjąć, że czas realizacji inwestycji mieści się w przedziale od 0 do 4 lat. Na potrzeby teoretycznej analizy modeli wzrostu z opóźnieniem inwestycyjnym można założyć, że średni czas realizacji inwestycji wynosi rok. W sytuacji, gdy będę chciał pokazać, jaki jest wpływ zmiany wielkości średniego opóźnienia inwestycyjnego na dynamikę modelu, przyjmę wartości opóźnienia w przedziale od 0,5 do 3 lat.

1.4. Podsumowanie

W następnych rozdziałach będę badał wybrane modele cyklu koniunkturalnego i wzrostu gospodarczego, w których opóźnienie inwestycyjne będzie czynnikiem odpowiedzialnym za możliwość pojawienia się cyklicznego zachowania. We wszystkich analizowanych modelach

będę przyjmował jako parametr opóźnienia średni czas realizacji inwestycji w gospodarce.

W naszych rozważaniach o wzroście gospodarczym podstawową zagregowaną wielkością jest zasób kapitału rzeczowego w gospodarce. W najprostszych modelach będziemy przyjmowali istnienie tylko jednego rodzaju kapitału – kapitału rzeczowego. W bardziej rozwiniętych modelach pojawi się kapitał ludzki, czy też rozróżnienie kapitału rzeczowego na prywatny i publiczny. Istotą modeli wzrostu gospodarczego jest określenie, jak zasób kapitału – i w konsekwencji produkcja – zmienia się w długim okresie.

Rozdział 2

Modele cyklu koniunkturalnego z opóźnieniem inwestycyjnym

2.1. Wprowadzenie

W teorii ekonomii pierwsze matematyczne modele cyklicznych procesów ekonomicznych sformułowane w postaci równania różniczkowego z odchylonym argumentem powstały w latach 30. ubiegłego wieku. Prekursorem był Tinbergen (1931), który pokazał, że podaż tonażu statków podlega cyklicznym zmianom wynikającym z niedopasowania potrzeb w chwili podejmowania decyzji o budowie nowego statku i w chwili oddania statku do użytku. W jego modelu zmiana tonażu statków w chwili t zależała nie od tonażu w tej samej chwili t , ale od tego, jaka była wielkość tonażu statków w przeszłości, w chwili $t - \vartheta$, wtedy gdy podejmowano decyzje o budowie nowych statków. Parametr ϑ to (przeciętny) czas budowy statku. Równanie różniczkowe z opóźnionym argumentem w modelu Tinbergena miało następującą postać

$$\dot{y}(t) = -cy(t - \vartheta), \quad (2.1)$$

gdzie c jest dodatnią stałą.

Kolejny ekonomiczny model, w którym wykorzystano równanie różniczkowe z opóźnionym argumentem, był dziełem Michała Kaleckiego. Jego prace wniosły istotny wkład w badania cykli koniunkturalnych. Kalecki (1933, 1935b) zaproponował model cyklu koniunkturalnego, w którym odstęp czasowy pomiędzy podjęciem decyzji inwestycyjnych a ukończeniem budowy dóbr kapitałowych jest przyczyną cyklicznych zmian w gospodarce. Podobnie jak model Tinbergena, model Kaleckiego również jest opisany liniowym równaniem różnicz-

kowym z opóźnionym argumentem. Zmiana inwestycji netto y jest opisana przez równanie

$$\dot{y}(t) = ay(t) - cy(t - \vartheta), \quad (2.2)$$

gdzie a i c są dodatnimi stałymi, a ϑ jest przeciętnym czasem trwania inwestycji w gospodarce.

Równanie (2.2) modelu otrzymanego przez Kaleckiego jest ogólniejsze niż równanie modelu Tinbergena; podstawiając $z = e^{at}y$, możemy sprowadzić równanie Kaleckiego do równania Tinbergena. Rozwiązania obu modeli różnią się o czynnik e^{at} . Dlatego w dalszej części rozdziału będziemy badać tylko rozwiązania modelu Kaleckiego.

Zauważmy, że równanie różniczkowe z opóźnionym argumentem jest równoważne z układem nieskończenie wielu równań różniczkowych zwyczajnych. W związku z tym równanie charakterystyczne równania z odchylnym argumentem ma transcendentálny charakter i istnieje nieskończenie wiele rozwiązań (wartości własnych równania charakterystycznego). Kalecki argumentował, że znaczenie ma tylko jedno rozwiązanie, nazywane cyklem głównym, którego okres jest dłuższy niż opóźnienie. Dyskusja, która się w związku z tym wywiązała, sprawiła, że Frisch i Holme (1935) dokładnie zbadali rozwiązania tego równania¹. Wykazali oni, że istotnie istnieje tylko jedno rozwiązanie cykliczne o okresie dłuższym niż opóźnienie.

Model Kaldora i idea Kaleckiego posłużyły do stworzenia nowego modelu cyklu koniunkturalnego z opóźnieniem inwestycyjnym. Model Kaldora-Kaleckiego został przedstawiony w dwóch pracach (Krawiec i Szydłowski, 1998, 1999), a następnie był rozwijany w kilku następnych (Krawiec i Szydłowski, 2001; Szydłowski i Krawiec, 2000, 2001; Szydłowski i inni, 2001; Szydłowski i Krawiec, 2005; Krawiec, 2003). Model Kaldora-Kaleckiego został również rozszerzony w celu analizy wzrostu gospodarczego i cykli wzrostu (Krawiec i Szydłowski, 2003). Wiele interesujących wyników otrzymanych na podstawie modelu Kaldora-Kaleckiego zostało zaprezentowanych w pracach innych autorów (przykładowo zob. Zhang i Wei, 2004; Kaddar i Alaoui, 2008).

W niniejszym rozdziale przedstawimy model Kaldora-Kaleckiego (a także skrótowo same modele Kaleckiego i Kaldora) oraz model wzrostu oparty na modelu Kaldora-Kaleckiego.

¹ Polskie tłumaczenie tego artykułu jest zawarte w 1. tomie prac zebranych Kaleckiego (Kalecki, 1979, s. 462–476).

2.2. Model cyklu koniunkturalnego Kaleckiego

W 1933 roku Michał Kalecki opublikował pierwszą wersję modelu cyklu koniunkturalnego w pracy pt. *Próba teorii koniunktury* (Kalecki, 1933) i następnie przedstawił jej skróconą wersję na sesji Towarzystwa Ekonometrycznego w Leyden. Referat ten został dwa lata później opublikowany po angielsku jako *A Macroeconomic Theory of Business Cycles* (Kalecki, 1935b) (w tym samym roku ukazała się również skrócona, francuska wersja pt. *Essai d'une théorie du mouvement cyclique des affaires* (Kalecki, 1935a))².

Kalecki w swojej teorii koniunktury koncentruje się na procesach inwestycyjnych. Szczególną uwagę zwraca na czas budowy urządzeń wytwórczych oraz poziom rentowności, który decyduje o skłonności do inwestowania.

Model opisuje zamknięty i pozbawiony trendu układ gospodarczy. Całkowity dochód realny kapitalistów Y (zysk brutto) składa się z części konsumowanej C i z części zaoszczędzonej A

$$Y = C + A. \quad (2.3)$$

Kalecki założył, że robotnicy nie oszczędzają i nie mają dochodów kapitałowych, a wówczas oszczędności kapitalistów są tożsame z produkcją dóbr kapitałowych A , która jest równa akumulacji brutto, gdy założymy, że wielkość zapasów towarowych pozostaje w przebiegu koniunkturalnym stała. Konsumpcja składa się z części autonomicznej B_0 i z części proporcjonalnej do dochodu

$$C = cY + B_0, \quad (2.4)$$

gdzie parametr c oznacza krańcową skłonność do konsumpcji. Z równań (2.3) i (2.4) otrzymujemy zależność dochodu Y od akumulacji brutto (produkcji dóbr kapitałowych) A

$$Y = \frac{A + B_0}{1 - c}. \quad (2.5)$$

W swoim modelu Kalecki przyjął, że jedynym rodzajem inwestycji są wydatki na trwałe urządzenia kapitałowe (budynki, maszyny). Wobec tego faktyczny poziom inwestycji w każdym okresie jest wynikiem

² Prace Kaleckiego zostały zebrane i opracowane przez Osiatyńskiego (Kalecki, 1985).

wcześniejszych decyzji inwestycyjnych, które przyjęły realną postać zamówień na maszyny i budowle. Kalecki założył, że dla wszelkiego rodzaju inwestycji można wyróżnić trzy etapy procesu inwestycyjnego:

- (i) zamówienia inwestycyjne I ;
- (ii) produkcja dóbr kapitałowych A ;
- (iii) dostawy nowych urządzeń wytwórczych D .

Kalecki uzasadniał również, że w pierwszym przybliżeniu parametr czasu budowy dóbr inwestycyjnych ϑ może być traktowany jako stały, jakkolwiek w rzeczywistości okres budowy dóbr kapitałowych jest zróżnicowany: dla różnych rodzajów inwestycji mamy do czynienia z różnymi okresami ich realizacji (Kalecki, 1985, s. 549–552). Dlatego dostawy nowych urządzeń wytwórczych D w chwili t będą zależeć od wielkości zamówień inwestycyjnych w chwili $t - \vartheta$

$$D(t) = I(t - \vartheta). \quad (2.6)$$

Z kolei produkcja dóbr kapitałowych A w chwili t równa się przeciętnej zamówień inwestycyjnych I złożonych w okresie $(t - \vartheta, t)$

$$A(t) = \frac{1}{\vartheta} \int_{t-\vartheta}^t I(\tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Zmiany wielkości aparatu produkcyjnego w chwili t wiążą się z dostawami nowych urządzeń kapitałowych D i stałą dekapitalizacją U

$$\frac{dK}{dt} = D(t) - U. \quad (2.8)$$

Kalecki przyjął, że funkcja zamówień inwestycyjnych jest liniowa oraz zależy od dochodu (rentowności) Y i istniejącego aparatu produkcyjnego

$$I(t) = m(A + B_0) - kK(t), \quad (2.9)$$

gdzie m i k oznaczają dodatnie parametry.

Do zróżniczkowanego względem t równania (2.9) podstawiamy równania (2.8) i (2.6) oraz zróżniczkowane względem t równanie (2.7). W rezultacie, po oznaczeniu $J(t) = I(t) - U$ i prostym przekształceniu, otrzymamy

$$\vartheta \dot{J}(t) - mJ(t) + (m + k\vartheta)J(t - \vartheta) = 0. \quad (2.10)$$

Kalecki podał następujące rozwiązanie równania (2.10). Jeśli szczególnym rozwiązaniem równania (2.10) jest funkcja $Ce^{\alpha t}$, gdzie C oznacza dowolną stałą, to równanie na α będzie miało postać

$$(m + k\vartheta)e^{-\alpha\vartheta} = m - \alpha\vartheta. \quad (2.11)$$

Po prostych przekształceniach równanie to można sprowadzić do wyrażenia

$$x + iy = be^x(\cos y + i \sin y), \quad (2.12)$$

gdzie $x + iy = m - \alpha\vartheta$ jest pewną liczbą zespoloną oraz $b = e^{-m}(m + k\vartheta)$. Wzorując się na Tinbergenie (Tinbergen, 1931), Kalecki rozróżnił dwa przypadki: I – jeżeli $b > 1/e$ i II – jeżeli $b \leq 1/e$.

W drugim przypadku nie ma drgań okresowych. Wahania koniunkturalne występują jedynie w pierwszym przypadku, gdy spełnione jest równanie $e^{-m}(m + k\vartheta) = b < 1/e$. Wtedy wahania zamówień inwestycyjnych I opisywać będzie równanie

$$I(t) - U = F_1 e^{(m-x_1)\frac{t}{\vartheta}} \sin y_1 \frac{t}{\vartheta}, \quad (2.13)$$

gdzie F_1 oznacza stałą, a $x_1 + iy_1$ jest oznaczeniem pierwiastka równania (2.12). Amplituda wahań maleje, pozostaje stała lub rośnie w zależności od tego, czy x_1 jest większe, równe lub mniejsze od m . Okres drgań wynosi $T = \frac{2\pi}{y_1}\vartheta$.

Kalecki rozważył również przypadek szczególny, gdy amplituda wahań pozostaje stała ($x_1 = m$). Stwierdził, że stała amplituda odpowiada w przybliżeniu faktycznemu przebiegowi cyklu koniunkturalnego, ponieważ w rzeczywistości nie obserwuje się wyraźnej regularnej progresji lub regresji amplitudy wahań. Po oszacowaniu przeciętnych wartości I , A i K oraz założeniu, że czas wykonywania zamówień inwestycyjnych ϑ wynosi 0,6 roku, Kalecki wyznaczył m , n , y_1 i otrzymał długość cyklu T wynoszącą 10 lat.

Ragnar Frisch (1933) zwrócił uwagę na to, że warunek, by rozwiązanie miało dawać wahania o niegasnącej amplitudzie, nie jest konieczny. Zasugerował istnienie tłumionych wahań wywołanych powtarzającymi się przypadkowymi zakłóceniami. Frisch i Holme (1935) podali następujące rozwiązanie równania Kaleckiego (2.10).

Dla uproszczenia zapisu oznaczmy, że

$$y(t) \equiv J(t) = I(t) - U, \quad a = m/\vartheta, \quad c = (m + k\vartheta)/\vartheta. \quad (2.14)$$

Wtedy mieszane równanie różnicowo-różniczkowe (2.10) będzie miało postać

$$\dot{y}(t) = ay(t) - cy(t - \vartheta). \quad (2.15)$$

Jeśli funkcja

$$y(t) = e^{\rho t}, \quad (2.16)$$

gdzie ρ jest stałą, spełnia równanie (2.15), to otrzymujemy następujące równanie charakterystyczne

$$\rho = a - ce^{-\rho\vartheta}. \quad (2.17)$$

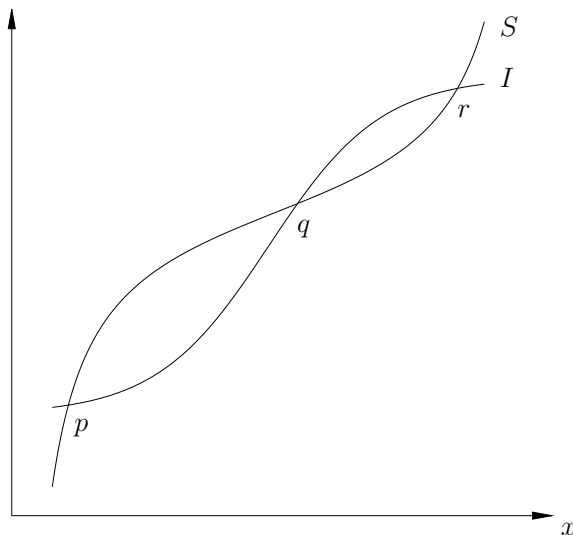
Jeśli posłużymy się metodą graficzną, to możemy pokazać, że równanie charakterystyczne (2.17) ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, gdy $a\vartheta - \ln c\vartheta > 1$; ma jeden rzeczywisty pierwiastek podwójny, gdy $a\vartheta - \ln c\vartheta = 1$; oraz ma pierwiastek zespolony sprzężony, gdy $a\vartheta - \ln c\vartheta < 1$. Jedynie w tym ostatnim przypadku istnieje cykliczne rozwiązanie, którego okres musi być nie mniejszy niż 2ϑ . To rozwiązanie nazwano cyklem podstawowym. Wszystkie pozostałe rozwiązania (cykle podrzędne) są krótsze od opóźnienia ϑ .

2.3. Model cyklu koniunkturalnego Kaldora

W roku 1940 Nicholas Kaldor przedstawił model cyklu koniunkturalnego, który może generować endogenicznie cykl graniczny i który następnie wielokrotnie był przedmiotem badań nieliniowej dynamiki w ekonomii.

Model Kaldora (1940), podobnie jak R. Harroda czy M. Kaleckiego, tłumaczy cykl koniunkturalny jako wynik połączonego działania tzw. mnożnika i funkcji popytu inwestycyjnego. Jej celem było ukazanie, że nałożenie pewnych założeń na funkcje inwestycji i oszczędności to konieczne i wystarczające warunki, w których zmiany poziomu inwestycji i oszczędności w zależności od poziomu dochodu w sposób nieunikniony wywołują cykl koniunkturalny.

J.M. Keynes w *Ogólnej teorii zatrudnienia, procentu i pieniądza* sformułował zasadę, że działalność gospodarcza zawsze zmierza do poziomu, na którym oszczędności i inwestycje są sobie równe (Keynes, 1985). Traktujemy obie te wielkości *ex ante*, a nie *ex post* (w tym drugim sensie są one zawsze i koniecznie równe sobie). Inwestycje *ex ante*



Rysunek 2.1. Funkcje inwestycji $I(x)$ i oszczędności $S(x)$ spełniające warunki Kaldora (a), (b) i (c), które przecinają się w trzech punktach równowagi: niestabilnym q oraz stabilnych p i r .

to wielkość zamierzonych przez przedsiębiorców inwestycji, a oszczędności *ex ante* oznaczają część dochodu, który gospodarstwa domowe mają zamiar zaoszczędzić.

Niezgodność między oszczędnościami *ex ante* i inwestycjami *ex ante* musi wywołać zmiany poziomu aktywności trwające dopóty, dopóki niezgodność ta nie zostanie usunięta, tzn. oszczędności lub inwestycje się nie zmieniają i oszczędności *ex post* będą równe inwestycjom *ex post*. Jeśli inwestycje *ex ante* przewyższają oszczędności *ex ante*, to nastąpi wzrost poziomu aktywności gospodarczej; i jeśli inwestycje *ex ante* są mniejsze niż oszczędności *ex ante*, to wywoła to kurczenie się działalności gospodarczej.

Kaldor przyjął, że funkcje inwestycji $I(x)$ i oszczędności $S(x)$ są zależne jedynie od poziomu działalności gospodarczej x i są one nieliniowe. Krańcowa skłonność do inwestycji $\frac{dI}{dx}$ jest mała, względem swego „normalnego” poziomu, dla małych i dużych wartości x , z kolei krańcowa skłonność do oszczędzania $\frac{dS}{dx}$ jest duża, porównując z jej „normalnym” poziomem, dla małych i dużych wartości x . Przebieg obu funkcji został pokazany na rysunku 2.1.

Po trzydziestu jeden latach Chang i Smyth (1971) zrekonstruowali model Kaldora jako następujący nieliniowy układ równań różniczkowych

$$\dot{Y}(t) = \alpha[I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))], \quad (2.18)$$

$$\dot{K}(t) = I(Y(t), K(t)). \quad (2.19)$$

Inwestycje netto I i oszczędności S *ex ante* są funkcjami dochodu Y i kapitału rzeczowego K . Parametr α określa szybkość dostosowania podaży do popytu.

Chang i Smyth (1971) pokazali, że oprócz zaproponowanych przez Kaldora warunków istnienia cyklu

- (a) $I_Y > S_Y$ dla średniego poziomu dochodu,
- (b) $I_Y < S_Y$ dla bardzo niskiego i wysokiego poziomu dochodu,
- (c) przy średnim poziomie dochodu stan równowagi jest niestabilny, musi być spełniony dodatkowy warunek³
- (d) $\alpha(I_Y - S_Y) + I_K > 0$,

który oznacza, że ruch wzdłuż krzywej I lub S jest szybszy niż przesunięcie tych krzywych wywołane zmianą ilości kapitału. Chang i Smyth pokazali, że warunki (a)–(d) są koniecznymi i wystarczającymi, aby w modelu Kaldora istniał cykl graniczny. Dla postaci funkcji inwestycji spełniającej warunek s-kształtności (warunki (a)–(c)) ma miejsce bifurkacja Hopfa drugiego typu, która w układach singularnie zaburzonych prowadzi do powstania stabilnego punktu równowagi, niestabilnego cyklu i stabilnego cyklu granicznego.

Kaldor i Kalecki, szukając wyjaśnienia przyczyn cyklu koniunkturalnego, położyli nacisk na różne mechanizmy ekonomiczne wywołujące cykliczne zachowanie. Kaldor przyjął, że funkcja inwestycji $I(Y)$ jest nieliniowa względem dochodu Y , tak że jej wykres ma kształt litery „s”.

Kalecki zwrócił uwagę na opóźnienie między podjęciem decyzji inwestycyjnych a oddaniem inwestycji do użytku. Przeszłe decyzje inwestycyjne wyznaczają bieżący poziom dochodu (zysku), który z kolei wpływa na bieżące decyzje inwestycyjne.

³ W komentarzu do tej pracy Nicholas Kaldor (1971) stwierdził, że ten dodatkowy warunek, jakkolwiek nie występuje *explicite* w tekście jego pracy, jest jednak zawarty *implicite* w modelu. Warunek ten był obecny we wszystkich keynesowskich modelach równowagi krótkookresowej, gdzie przyjmowano, iż zmiany zasobu kapitału rzeczowego związane z przeszłymi inwestycjami są bardzo wolne.

Cel tych modeli wydaje się podobny. W obu przypadkach chodzi nie tyle o pełne wyjaśnienie rzeczywistych, w danym miejscu i czasie, zmian w gospodarce wynikających ze zmian koniunktury, ile o wskazanie pewnych mechanizmów mogących mieć wpływ na stopień regularności i nieregularności obserwowanych cykli. Kalecki napisał, iż „ważne jest nie to, że z obliczenia otrzymałem dla cyklu 10 lat – co dokładnie odpowiada rzeczywistości – lecz, że nie otrzymałem 100 lat” (Kalecki, 1979, s. 169).

Z tych też powodów wydaje się naturalne skonstruowanie takiego modelu cyklu koniunkturalnego, który z jednej strony kładłby nacisk na nieliniową zależność inwestycji od dochodu, a z drugiej uwzględniłby czas realizacji inwestycji. Możemy to uczynić, wprowadzając parametr opóźnienia do równania na akumulację kapitału rzeczowego w modelu Kaldora. Tak zmodyfikowany model będziemy nazywać modelem Kaldora-Kaleckiego (Krawiec i Szydlowski, 1999).

2.4. Model cyklu koniunkturalnego Kaldora-Kaleckiego

Model cyklu koniunkturalnego Kaldora-Kaleckiego jest modelem stworzonym przez Krawca i Szydlowskiego (1998). Model ten jest zmodyfikowanym modelem Kaldora cyklu koniunkturalnego. Różnica między modelami Kaldora i Kaldora-Kaleckiego polega na tym, że w tym drugim uwzględniono niezerowy czas realizacji zamówień inwestycyjnych. Szczegółowa analiza modelu Kaldora-Kaleckiego pozwoli na wykazanie, że dzięki uwzględnieniu opóźnienia inwestycyjnego w modelu Kaldora-Kaleckiego pojawia się cykliczne zachowanie podobnie jak w modelu Kaldora. Pokażemy, że modele ekonomiczne opisane równaniami różniczkowymi z opóźnionym argumentem pozwalają na modelowanie cyklicznych zjawisk ekonomicznych.

Przypomnijmy, że Kalecki założył, iż wykonanie wszelkiego rodzaju inwestycji wymaga tego samego czasu ϑ , i wyróżnił trzy stadia procesu inwestycyjnego: (i) zamówienia inwestycyjne I ; (ii) produkcja dóbr kapitałowych A ; (iii) dostawy nowych urządzeń wytwórczych D .

Zakładając, że przeciętny czas realizacji zamówień inwestycyjnych wynosi ϑ , związek pomiędzy rozpoczęciem inwestycji (złożeniem za-

mówień inwestycyjnych I) w chwili $t - \vartheta$ i zakończeniem inwestycji (dostawą nowych urządzeń wytwórczych D) w chwili t ma postać

$$D(t) = I(t - \vartheta). \quad (2.20)$$

Zmiany wielkości aparatu produkcyjnego (zasobu kapitału rzeczowego) K w chwili t wiążą się z dostawami nowych urządzeń kapitałowych D i stałą deprecjacji kapitału U

$$\dot{K}(t) = D(t) - U = I(t - \vartheta) - U. \quad (2.21)$$

Jak łatwo zauważyć, opóźnienie w budowie dóbr inwestycyjnych można wprowadzić do modelu Kaldora. Model cyklu koniunkturalnego, który łączy w sobie cechy obu modeli, będziemy nazywać modelem Kaldora-Kaleckiego (Krawiec i Szydłowski, 1998, 1999, 2001; Szydłowski i Krawiec, 2000, 2001). W modelu Kaldora równanie na akumulację kapitału zastępujemy równaniem na akumulację kapitału uwzględniającym opóźnienie inwestycyjne Kaleckiego, tak że przyrost kapitału zależy od decyzji inwestycyjnych powziętych nie w chwili t , ale w chwili wcześniejszej $t - \vartheta$. W tak skonstruowanym modelu działa jednocześnie założenie Kaldora (nieliniowa funkcja inwestycji) i Kaleckiego (opóźnienie związane z czasem budowy urządzeń wytwórczych). Model Kaldora-Kaleckiego jest opisywany przez następujący układ równań różniczkowych z opóźnionym argumentem

$$\dot{Y}(t) = \frac{dY}{dt} = \alpha[I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))], \quad (2.22a)$$

$$\dot{K}(t) = \frac{dK}{dt} = I(Y(t - \vartheta), K(t)) - \delta K(t). \quad (2.22b)$$

W modelu tym przyjmujemy, że decyzje inwestycyjne podejmowane są na podstawie aktualnego stanu gospodarki w chwili $t - \vartheta$, co oznacza, że zależą od dochodu w chwili $Y(t - \vartheta)$. Równanie (2.22b) opisuje inwestycje netto, które są różnicą inwestycji brutto, oddanych do użytku inwestycji w chwili t , i wielkością kapitału rzeczowego, który uległ deprecjacji w tej samej chwili.

W szczególnym przypadku, gdy $\vartheta = 0$, uzyskamy równania modelu Kaldora. Podobnie jak w modelu Kaldora, zakładamy separowalność funkcji inwestycji $I(Y, K) = I(Y) + \beta K$, gdzie $\beta < 0$, oraz zależność

liniowej funkcji oszczędności wyłącznie od dochodu, $S(Y, K) = \gamma Y$, $0 < \gamma < 1$. Wówczas otrzymujemy

$$\dot{Y}(t) = \alpha I(Y(t)) - \alpha \gamma Y(t) + \alpha \beta K(t), \quad (2.23a)$$

$$\dot{K}(t) = I(Y(t - \vartheta)) + (\beta - \delta)K(t). \quad (2.23b)$$

Równania (2.23a) i (2.23b) można zredukować do pojedynczego równania różniczkowego drugiego rzędu

$$\begin{aligned} \ddot{Y}(t) - [\alpha(I_Y - \gamma) - (\delta - \beta)]\dot{Y}(t) \\ + \alpha\gamma(\delta - \beta)Y(t) - \alpha(\delta - \beta)I(Y(t)) - \alpha\beta I(Y(t - \vartheta)) = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Gdy $\vartheta = 0$, wówczas równanie (2.24) przyjmuje postać równania Liénarda⁴.

Punkt równowagi równania (2.24) Y^* jest rozwiązaniem równania $\alpha\gamma(\delta - \beta)Y^* - \alpha\delta I(Y^*) = 0$. Wynika to z tego, że punkty równowagi układu z niezerowym i z zerowym odchyleniem są takie same.

Podobnie jak w modelu Kaldora, funkcja inwestycji w modelu Kaldora-Kaleckiego jest nieliniowa i równanie (2.24) jest nieliniowym równaniem różniczkowym. W takim przypadku do jego analizy można zastosować metody globalne, co jest trudne, bądź użyć metod lokalnej analizy stabilności i uzyskać wyniki o charakterze lokalnym. Wybieramy ten drugi sposób.

Wygodnie jest wprowadzić nową zmienną $y = Y - Y^*$ i zamiast równaniem (2.24) posługiwać się równoważnym równaniem z punktem krytycznym zlokalizowanym w początku układu współrzędnych. Następnie to równanie linearyzujemy w otoczeniu położenia równowagi (0) i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) - [\alpha(I_y(0) - \gamma) - (\delta - \beta)]\dot{y}(t) \\ - \alpha(\delta - \beta)(I_y(0) - \gamma)y(t) - \alpha\beta I_y(0)y(t - \vartheta) = 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Tak jak poprzednio będziemy zakładać, że inwestycje są rosnącą funkcją dochodu $I_y > 0$, która spełnia warunek nieliniowości Kaldora.

⁴ Równanie Liénarda, znane w fizyce, przy pewnych założeniach opisuje samowzbudne drgania relaksacyjne. Łatwo to zobaczyć, jeśli przyjmiemy stałą deprecjacji $\delta = 0$. Wtedy dla funkcji inwestycji obciętej na wyrazach trzeciego rzędu rozwinięcia w szereg Taylora $I(x) = x - x^3/6$ otrzymamy równanie van der Pola.

Równanie charakterystyczne dla układu (2.25) uzyskamy przez podstawienie $y = e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 + b\lambda + a = de^{-\lambda\vartheta}, \quad (2.26)$$

gdzie

$$\begin{aligned} b &= \delta - \beta - \alpha(I_y(0) - \gamma), \\ a &= -\alpha(\delta - \beta)(I_y(0) - \gamma), \\ d &= \alpha\beta I_y(0). \end{aligned}$$

Zakładając, że wartości własne są zespolone $\lambda = \sigma + i\omega$, rozpisujemy równanie charakterystyczne na część rzeczywistą i urojoną

$$\sigma^2 - \omega^2 + b\sigma + a = de^{-\sigma\vartheta} \cos \omega\vartheta, \quad (2.27a)$$

$$2\sigma\omega + b\omega = -de^{-\sigma\vartheta} \sin \omega\vartheta. \quad (2.27b)$$

Równania (2.27a) i (2.27b) są symetryczne względem zmiany znaku parametru ω . Dlatego bez ograniczania ogólności naszych rozważań zakładamy, że $\omega > 0$.

Punkt krytyczny układu zmieni stabilność, gdy $\sigma = 0$. Podstawiając ten warunek do układu (2.27a)–(2.27b) i następnie podnosząc równania (2.27a) i (2.27b) do kwadratu i dodając stronami, otrzymujemy

$$\omega^4 + (b^2 - 2a)\omega^2 + a^2 - d^2 = 0. \quad (2.28)$$

Rozwiązania $\omega_{\pm}$ muszą być rzeczywiste i dodatnie. Zauważmy, że $b^2 - 2a = (\delta - \beta)^2 + \alpha^2(I_y(0) - \gamma)^2$ i tylko jedno z rozwiązań

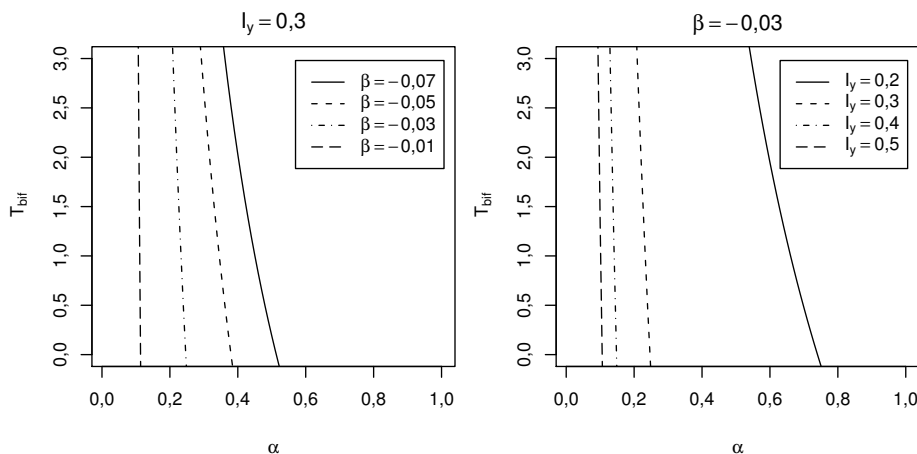
$$\omega_+ = \sqrt{-\frac{b^2 - 2a}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^2 - 2a}{2}\right)^2 + d^2 - a^2}}, \quad (2.29)$$

jest dodatnie, gdy $d^2 > a^2$. Łatwo pokazać, że ta nierówność nie zależy od α i jest spełniona, gdy $I_y(0) \in \left(\frac{(\delta-\beta)\gamma}{\delta}, \frac{(\delta-\beta)\gamma}{\delta-2\beta}\right)$. Z kolei dzieląc stronami równania (2.27a) i (2.27b), otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \omega_+ \vartheta = \frac{b\omega_+}{\omega_+^2 - a}. \quad (2.30)$$

Stąd ostatecznie uzyskujemy następującą wartość parametru ϑ , dla której zachodzi bifurkacja

$$\vartheta_{\text{bif}} = \frac{1}{\omega_+} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{b\omega_+}{\omega_+^2 - a} \right) + j\pi \right], \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.31)$$



Rysunek 2.2. Zależność wartości parametru bifurkacyjnego ϑ_{bif} od α dla $\gamma = 0,15$, $\delta = 0,007$ oraz przykładowych wartości parametrów β i $I_y(0)$.

gdzie funkcja $\arctg$ jest określona w przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$, ω_+ jest dane przez równanie (2.29) i $\vartheta_{\text{bif}} > 0$.

Wartość parametru ϑ_{bif} zależy od pięciu parametrów: γ , δ , β , $I_Y(0)$ oraz α . Przyjmując, że wartości parametrów $\gamma = 0,15$ i $\delta = 0,007$ (Dana i Malgrange, 1984), możemy pokazać zależności $\vartheta_{\text{bif}}(\alpha)$ dla dwóch pozostałych parametrów β i $I_y(0)$ (rys. 2.2).

Powyższa analiza dowodzi istnienia bifurkacji do orbity okresowej. Aby wykazać zgodnie z twierdzeniem Hopfa istnienie bifurkacji do cyklu granicznego, należy sprawdzić, że tzw. warunek transversalności jest dodatni (zob. Dodatek A.3). Przedstawimy ten dowód w szczególnym przypadku dla małych wartości parametru ϑ ($\vartheta < 1$).

Równanie charakterystyczne (2.26) w przybliżeniu małych ϑ ma postać

$$\lambda^2 + b\lambda + a = d(1 - \vartheta\lambda). \quad (2.32)$$

Przyjmując, że wartości własne są zespolone $\lambda = \sigma + i\omega$, z powyższego równania otrzymujemy równanie na część rzeczywistą wartości własnej

$$\sigma(\vartheta) = -\frac{1}{2}(d\vartheta + b). \quad (2.33)$$

Jeśli część rzeczywista σ jest równa zero, wtedy

$$\vartheta_{\text{bif}} = -\frac{b}{d}. \quad (2.34)$$

Obliczamy warunek transversalności

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=\vartheta_{\text{bif}}} = -\frac{d}{2} > 0. \quad (2.35)$$

Warunek ten jest spełniony, ponieważ $d = \alpha\beta I_Y(0) < 0$.

Istnienie dodatniej wartości ϑ_{bif} oznacza, że $b > 0$. W punkcie bifurkacyjnym część urojona wartości własnej ω spełnia warunek $\omega^2(\vartheta) = a$ i zawsze istnieje, gdy $a > 0$, tj. wielkość $I_y(0) - \gamma$ w punkcie krytycznym będzie dodatnia.

Podsumowując, gdy $I_y(0) - \gamma > 0$ i $b > 0$, wówczas zawsze będzie istniała wartość parametru bifurkacyjnego ϑ_{bif} , taka że dla $\vartheta > \vartheta_{\text{bif}}$ układ Kaldora-Kaleckiego posiada cykl graniczny dla małych ϑ .

Warunkiem stabilności cyklu granicznego w naszym układzie jest kształt litery „s” funkcji inwestycji. Stabilność może być pokazana przez policzenie parametru stabilności Guckenheimera (Szydłowski i Krawiec, 2000).

2.5. Model wzrostu Kaldora-Kaleckiego

Opierając się na modelu cyklu koniunkturalnego Kaldora-Kaleckiego, możemy zbudować model wzrostu gospodarczego (Krawiec i Szydłowski, 2003).

Dana i Malgrange (1984) zbudowali model wzrostu gospodarczego na podstawie modelu Kaldora. Założyli oni, że autonomiczny popyt rośnie wykładniczo $G_0 e^{gt}$, gdzie G_0 , g są parametrami. Dzięki takiemu samemu założeniu zbudujemy model wzrostu gospodarczego w ramach teorii Kaldora-Kaleckiego. Włączenie założenia o wykładniczym wzroście autonomicznego popytu do modelu Kaldora-Kaleckiego prowadzi do następującego układu równań

$$\dot{Y}(t) = \alpha[I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t)) + G_0 e^{gt}], \quad (2.36a)$$

$$\dot{K}(t) = I(Y(t - \vartheta), K(t)) - \delta K(t), \quad (2.36b)$$

gdzie inwestycje I i oszczędności S zależą od dochodu Y i zasobu kapitału rzeczowego K , a α to parametr szybkości dostosowania popytu i podaży dóbr, G_0 , g są parametrami. W rozważanym modelu zakładamy, że zarówno I , jak i S są homogenicznymi funkcjami stopnia jeden względem argumentów Y i K .

Naszym celem jest otrzymanie rozwiązania typu stan stacjonarny układu (2.36), gdzie zmienne rosną ze stałą stopą. W tym celu wprowadzamy nowe zmienne

$$k(t) = K(t)e^{-gt}, \quad y(t) = Y(t)e^{-gt}. \quad (2.37)$$

Układ równań (2.36) w zredukowanych zmiennych (2.37) przybiera formę

$$\dot{y}(t) = \alpha[I(y(t), k(t)) - S(y(t), k(t)) + G_0] - gy(t), \quad (2.38a)$$

$$\dot{k}(t) = I(y(t - \vartheta), k(t)) - (g + \delta)k(t). \quad (2.38b)$$

Dla uproszczenia przyjmijmy liniową formę funkcji oszczędności, która zależy jedynie od dochodu, wtedy funkcja oszczędności ma postać

$$S(Y(t), K(t)) = \gamma Y(t), \quad (2.39)$$

oraz funkcję inwestycji w kształcie litery „s” (postać logistyczna), która jest również jednorodna stopnia pierwszego

$$I(Y, K) = K\Phi\left(\frac{Y}{K}\right) = K\Phi(x), \quad (2.40)$$

gdzie wprowadzamy nową zmienną produktu na jednostkę kapitału rzeczowego, $x = Y/K = y/k$, oraz Φ jest funkcją zmiennej x i spełnia warunki Kaldora nałożone na funkcję inwestycji, tak że $\Phi_{xx}(x) > 0$ dla $x < x^*$, $\Phi_{xx}(x^*) = 0$ i $\Phi_{xx}(x) < 0$ dla $x > x^*$.

Dana i Malgrange (1984) pokazali, że powyższe założenie jednorodności funkcji inwestycji ma ściśle ekonomiczne uzasadnienie. Opierając się na francuskich kwartalnych danych z lat 1960–1974, Dana i Malgrange przyjęli, że funkcja Φ , zależna od dochodu na jednostkę kapitału rzeczowego x , ma następującą postać

$$\Phi(x) = c + \frac{d}{1 + \exp[-a(vx - 1)]} \quad (2.41)$$

lub równoważnie

$$\Phi(x) = c + \frac{d}{2} e^{\frac{a}{2}(vx-1)} \cosh^{-1} \left[\frac{a}{2}(vx - 1) \right] \quad (2.42)$$

i przyjęli następujące wartości parametrów $v = 4,23$, $\delta = 0,007$, $c = 0,01$, $d = 0,026$, $a = 9$, $\gamma = 0,15$.

Układ równań (2.36), zapisany dla zmiennej x , ma postać

$$\dot{x} = \alpha[\Phi(x(t)) - \gamma x(t)] - x(t)[\Phi(x(t)) - \delta] \quad (2.43)$$

i wtedy jego rozwiązanie jest dane jako

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{(\alpha - x)\Phi(x) + x(\delta - \alpha\gamma)}, \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.44)$$

W przypadku dodatniego opóźnienia $\vartheta > 0$, tj. dla modelu Kalдора-Kaleckiego z jednorodnymi funkcjami inwestycji i oszczędności, dynamika jest dana przez następujące jednowymiarowe równanie różniczkowe z odchylnym argumentem

$$\dot{x} = \alpha\Phi(x(t)) + \bar{\delta}x(t) - x(t)\Phi(x(t - \vartheta)), \quad (2.45)$$

gdzie $\bar{\delta} = \delta - \alpha\gamma$. Aby rozwiązać powyższe równanie, zamiast warunku początkowego t_0 funkcja początkowa w przedziale $[t_0 - \vartheta, t_0]$ musi być dana. Funkcja ta określa historię układu, zanim rozpoczęła się śledzona przez nas jego ewolucja. Równanie (2.45) jest nieliniowym układem, który może być analizowany przy użyciu zarówno analitycznych, jak i numerycznych metod.

Załóżmy, że dla modelu danego przez równanie (2.38) istnieje pojedynczy punkt stały (y^*, k^*) , taki że $y^* > 0$ i $k^* > 0$. Zauważmy, że istnienie punktu krytycznego jest niezależne od opóźnienia z definicji samego punktu krytycznego. Ponadto w punkcie równowagi (y^*, k^*) stosunek kapitał–produkt jest wyznaczony jedynie przez równanie (2.38b), dlatego jest niezależny od stałych G_0 i α .

Ostatecznie wyznaczamy punkt krytyczny o dodatnich współrzędnych układu

$$y^*(\alpha) = x^*k^*(\alpha), \quad (2.46a)$$

$$k^*(\alpha) = \frac{\alpha G_0}{gx^* + \alpha(sx^* - (g + \delta))}, \quad (2.46b)$$

gdzie x^* jest pojedynczym rozwiązaniem równania

$$\Phi(x^*) = g + \delta, \quad (2.47)$$

które jest równoważne $I(Y, K) = K\Phi(Y/K) = K\Phi(x) = K(g + \delta)$ z równania (2.38b).

Dzięki logistycznej postaci funkcji $\Phi(x)$ x^* zawsze istnieje i wartości y^* i k^* zależą tylko od x^* (w naszym przypadku $c < g + \delta < c + d$).

Dana i Malgrange (1984) pokazali, że przy pewnych globalnych założeniach na funkcje I i S oraz jeśli punkt stały jest niestabilny, w którym $I_y(y^*) > S_y(y^*) > 0$ i $\alpha(I_y(y^*) - S_y(y^*)) > 2g + \delta$, wtedy wszystkie trajektorie startujące w dodatniej ćwiartce są albo periodyczne, albo zmierzają do orbity okresowej.

Podczas gdy w pracy Dany i Malgrange'a cykliczne zachowanie jest wywołane przez nieliniowość funkcji inwestycji, w rozważanym przypadku na cykliczne zachowanie ma również wpływ uwzględnienie w modelu opóźnienia inwestycyjnego. W ten sposób badamy dynamikę ogólniejszego modelu, który realistyczniej opisuje fluktuacje na ścieżce wzrostu.

Rozważmy teraz kwestię stabilności rozwiązań cyklicznych. W celu dokonania analizy lokalnej stabilności wystarczy zbadać układ (2.38) zlinearyzowany w punkcie krytycznym (y^*, k^*)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(y - y^*) &= [\alpha(I_y(y^*) - S_y(y^*)) - g](y - y^*) \\ &\quad + \alpha(I_k(k^*) - S_k(k^*))(k - k^*), \end{aligned} \quad (2.48a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(k - k^*) &= I_y(y^*)(y - y^*)(t - \vartheta) \\ &\quad + [I_k(k^*) - (g + \delta)](k - k^*). \end{aligned} \quad (2.48b)$$

Dla prostoty załóżmy, że funkcja oszczędności S zależy jedynie od Y , tak że $S_y = \gamma = \text{const}$, przez co nie tracimy na ogólności naszych rozważań. Dzięki prostej transformacji $y - y^* = \bar{y}$, $k - k^* = \bar{k}$, środkiem układu współrzędnych jest punkt krytyczny (y^*, k^*) . Przy tych założeniach otrzymujemy

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = [\alpha(I_y(0) - \gamma) - g]\bar{y}(t) + \alpha I_k(0)\bar{k}(t), \quad (2.49a)$$

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = I_y(0)\bar{y}(t - \vartheta) + [I_k(0) - g - \delta]\bar{k}(t). \quad (2.49b)$$

Stabilność układu wyznaczamy z równania charakterystycznego

$$\begin{aligned} &\lambda^2 - [\alpha(I_y(0) - \gamma) + I_k(0) - 2g - \delta]\lambda + \\ &+ [\alpha(I_y(0) - \gamma) - g][I_k(0) - g - \delta] - \alpha I_y(0)I_k(0)e^{-\lambda\vartheta} = 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

które jest równaniem transcendentalnym, mającym nieskończoną liczbę rozwiązań. W tym układzie bifurkacja Hopfa ma miejsce, gdy ślad macierzy linearyzacji znika. Rozpatrzmy jedynie przypadek, gdy wszystkie parametry modelu oprócz ϑ są stałe. Innymi słowy, interesują nas tylko bifurkacje pojawiające się wraz ze zmianą wartości parametru opóźnienia.

Odwołajmy się teraz do twierdzenia o bifurkacji Hopfa (Guckenheimer i Holmes, 1983, s. 151–152), które opisuje warunki istnienia cyklu granicznego wywołanego zmianą wartości parametru kontrolnego, w naszym przypadku parametru opóźnienia. Amplituda cyklu jest proporcjonalna do wartości śladu jacobianu $\text{tr } J$. Formalnie – $\text{tr } J$ jest współczynnikiem przy liniowym wyrazie w równaniu (2.50), więc $\text{tr } J = 0$ jest równoważny z rozważeniem $e^{-\lambda T} \cong 1 - \lambda \vartheta$ i

$$\vartheta = \vartheta_{\text{bif}} = -\frac{\alpha(I_y(0) - \gamma) + I_k(0) - 2g - \delta}{\alpha I_y(0) I_k(0)}, \quad (2.51)$$

gdzie przyjmujemy standardowe warunki $I_y(0) > 0$, $I_k(0) < 0$. Stąd istnieje dodatnia wartość parametru opóźnienia ϑ_{bif} , wtedy gdy

$$\alpha(I_y(0) - \gamma) + I_k(0) > 2g + \delta. \quad (2.52)$$

Dana i Malgrange (1984) również podali ten warunek jako jeden z warunków gwarantujących istnienie cykli granicznych w modelu cykli wzrostu Kaldora dla $\vartheta = 0$.

Aby zbadać stabilność punktu stałego, wykorzystujemy standardowe założenie $y(t) = e^{\lambda t}$, dzięki któremu otrzymujemy równanie charakterystyczne dla zlinearyzowanego równania (2.50) o następującej postaci

$$\lambda^2 + b\lambda + a = de^{-\lambda\vartheta}, \quad (2.53)$$

przy oznaczeniach:

$$\begin{aligned} b &= -[\alpha(I_y(0) - \gamma) - g + I_k(0) - g - \delta], \\ a &= [\alpha(I_y(0) - \gamma) - g][I_k(0) - g - \delta], \\ d &= \alpha I_y(0) I_k(0) < 0. \end{aligned}$$

Punkt krytyczny układu jest stabilny, jeśli wszystkie pierwiastki jego równania charakterystycznego mają ujemne części rzeczywiste. Punkt stały może zmienić stabilność, gdy $\text{Re}(\lambda) = 0$ dla niektórych λ .

Łatwo zauważyć, że może się tak stać na dwa sposoby. Po pierwsze, gdy rzeczywiste wartości własne przechodzą przez zero ($\lambda = 0$). Dzieje się tak, gdy $d = a$, co wymaga $a < 0$ lub

$$d = a \quad \text{i} \quad \alpha(I_y(0) - \gamma) - g > 0, \quad (2.54)$$

ponieważ $I_k(0) \equiv \beta < 0$.

Po drugie, para sprzężonych zespolonych wartości własnych przecina oś urojoną ($\lambda = \pm i\omega$, $\omega > 0$). Warunki na to otrzymamy najpierw poprzez dekompozycję wartości własnej $\lambda = \sigma + i\omega$ na część rzeczywistą i urojoną, co pozwala otrzymać parę transcendentálnych równań

$$\sigma^2 - \omega^2 + b\sigma + a = de^{-\sigma\vartheta} \cos \omega\vartheta, \quad (2.55a)$$

$$2\sigma\omega + b\omega = -de^{-\sigma\vartheta} \sin \omega\vartheta, \quad (2.55b)$$

i następnie przyjmując, że $\sigma = 0$

$$a - \omega^2 = d \cos \omega\vartheta, \quad (2.56a)$$

$$b\omega = -d \sin \omega\vartheta. \quad (2.56b)$$

Równania układu (2.56) podnosimy do kwadratu i dodajemy stronami. Otrzymujemy równanie czwartego stopnia ze względu na ω , którego pierwiastki mają postać

$$\omega_{\pm} = \sqrt{a - \frac{b^2}{2} \pm \sqrt{\left(a - \frac{b^2}{2}\right)^2 + d^2 - a^2}}. \quad (2.57)$$

Ponieważ w naszym przypadku nierówność $b^2 - 2a > 0$ jest zawsze spełniona dla dowolnych wartości parametrów układu, więc istnieje tylko jedno rozwiązanie

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{2a - b^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{2a - b^2}{2}\right)^2 + d^2 - a^2}}. \quad (2.58)$$

Ponieważ ω_+ musi być rzeczywista i dodatnia, warunki istnienia pierwiastków równania charakterystycznego (2.53) są podane w tabeli 2.1.

Układ równań (2.56) można zapisać także w postaci

$$\cos \omega_+\vartheta = \frac{a - \omega_+}{d}, \quad (2.59a)$$

$$\sin \omega_+\vartheta = -\frac{b\omega_+}{d}. \quad (2.59b)$$

Tabela 2.1. Warunki istnienia pierwiastków równania charakterystycznego (2.53).

obszar w przestrzeni parametrów	liczba pierwiastków
$b^2 - 2a \geq 0$ i $d^2 < a^2$	0
$b^2 - 2a \geq 0$ i $d^2 > a^2$	1

Z powyższych równań otrzymujemy opóźnienie ϑ jako funkcję pozostałych parametrów modelu

$$\vartheta_j = \begin{cases} \frac{1}{\omega_+} \left[2\pi j + \arccos \left(\frac{a - \omega_+^2}{d} \right) \right], & b > 0, \\ \frac{1}{\omega_+} \left[2\pi(j+1) - \arccos \left(\frac{a + \omega_+^2}{d} \right) \right], & b < 0, \end{cases} \quad (2.60)$$

gdzie $j = 0, 1, 2, \dots$, i arcus cosinus odnosi się do gałęzi odwrotnej funkcji cosinus w przedziale $[0, \pi]$.

W twierdzeniu o bifurkacji Hopfa należy jeszcze sprawdzić warunek transwersalności, zgodnie z którym pierwiastek równania charakterystycznego przechodzi przez oś urojoną z dodatnią szybkością. Po zróżniczkowaniu równania charakterystycznego względem ϑ i podstawieniu równania (2.53) otrzymujemy

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} = - \frac{\lambda(\lambda^2 + b\lambda + a)}{2\lambda + b}. \quad (2.61)$$

Wtedy po podstawieniu $\lambda = \sigma + i\omega$, z pomocą równań (2.56) i (2.58), możemy sprawdzić, że zawsze mamy

$$\left. \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\operatorname{Re} \lambda) \right|_{\vartheta=\vartheta_{\text{bif}}} = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=\vartheta_{\text{bif}}} > 0. \quad (2.62)$$

Dodatni znak w równaniu (2.62) oznacza, że pierwiastek równania charakterystycznego (2.53) przecina oś urojoną z dodatnią szybkością, że następuje bifurkacja Hopfa i w modelu pojawia się endogeniczny cykl.

Obszar stabilności można wyznaczyć dla dowolnego ϑ i punktu krytycznego. Wektory własne zlinearyzowanego układu dynamicznego w otoczeniu punktu krytycznego mogą być użyte do podziału przestrzeni stycznej na trzy podprzestrzenie: stabilną E^s , niestabilną E^u

i centralną E^c . Są one niezmienniczymi rozmaitościami nieskończenie wymiarowego układu dynamicznego. Pod pewnymi warunkami każda z tych podprzestrzeni posiada styczną inwariantną rozmaitość, na której lokalna dynamika jest taka sama jak oryginalnego układu.

Dla kompletności dowodu należy ograniczyć nasze badania do dynamiki skończenie wymiarowej rozmaitości (jeśli istnieje) i pokazać, że wymiar niestabilnej podprzestrzeni jest równy co najmniej jeden. Jest to równoważne z udowodnieniem, że przynajmniej jeden pierwiastek równania (2.53) posiada dodatnią część rzeczywistą.

Dla wszystkich ustalonych parametrów modelu (2.60) oprócz jednego, wybierzmy parametr g , zdefiniowane są krzywe na płaszczyźnie (g, ϑ) . Krzywe te są krzywymi bifurkacyjnymi. Linia $\{g: d = a\}$ (prostopadła do osi ϑ) dzieli płaszczyznę (g, ϑ) na obszary. Analizując znaki części rzeczywistej pierwiastków równania charakterystycznego w tych obszarach, możemy określić warunki stabilności punktów krytycznych. Uzasadnienie jest następujące. Po pierwsze, pierwiastki równania charakterystycznego są ciągłymi funkcjami parametru d . Po drugie, liczba pierwiastków równania charakterystycznego z dodatnimi częściami rzeczywistymi może zmienić się przy zmianie wartości parametru tylko wtedy, gdy pierwiastek przejdzie przez oś urojoną. Opierając się na tym, możemy opisać, jak obszary stabilności trywialnego punktu krytycznego na płaszczyźnie (g, ϑ) zmieniają się wraz z parametrem ϑ . Trywialny punkt krytyczny jest rozwiązaniem stabilnym w następujących obszarach

$$\begin{aligned} & \{(g, \vartheta): -a < d < a, \quad \vartheta \in \mathbb{R}_+\}, \\ & \left\{ (g, \vartheta): d < -a, \quad \vartheta < \frac{1}{\omega_+} \arccos \left(\frac{a - \omega_+^2}{d} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Można sprawdzić, że pierwiastki równania charakterystycznego opisane powyżej przecinają oś urojoną z niezerową szybkością. Tak więc dla nieliniowego równania (2.36), z nieliniowościami spełniającymi odpowiednie warunki, krzywe zdefiniowane przez równanie (2.60) są krzywymi bifurkacyjnymi Hopfa na płaszczyźnie (g, ϑ) i linie g

$$\begin{aligned} \{d = a\} & \Leftrightarrow \{g: \alpha I_y(0)(g + \delta) = -(I_k(0) - g - \delta)(\alpha\gamma + g)\}, \\ \{d = -a\} & \Leftrightarrow \{g: 2\alpha I_y(0)I_k(0) = (I_k(0) - g - \delta)(\alpha\gamma + g)\} \end{aligned} \quad (2.64)$$

definiują bifurkację stanu stacjonarnego do orbity okresowej. Własność tej bifurkacji, tzn. czy jest ona superkrytyczną czy subkrytyczną bifurkacją Hopfa, będzie zależała od nieliniowości funkcji inwestycji (od jej trzecich pochodnych względem y i k).

Rozważmy teraz przypadek, gdy opóźnienie inwestycyjne ϑ jest małe. W tym przybliżeniu układ równań (2.38) ma postać

$$\dot{y} = \alpha[I(y, k) - S(y, k) + G_0] - gy, \quad (2.65a)$$

$$\begin{aligned} \dot{k} &= I(y, k) - (g + \delta)k \\ &\quad - \vartheta I_y(y, k) \{ \alpha[I(y, k) - S(y, k) + G_0] - gy \}, \end{aligned} \quad (2.65b)$$

gdzie $I(y, k) = k\Phi(x) = k\Phi\left(\frac{y}{k}\right)$, $S(y, k) = \gamma y$.

Układ równań (2.65) ma pojedynczy punkt stały o dodatnich współrzędnych (dokładniej: rodzinę takich punktów parametryzowaną przez parametr α), który wyznaczamy z równania (2.65b) (z definicji w punkcie krytycznym $\vartheta = 0$) $I(y, k) = (g + \delta)k$, otrzymując

$$\Phi(x^*) = g + \delta. \quad (2.66)$$

Jeśli x^* jest rozwiązaniem układu równań (2.65), wtedy z równania (2.65a) otrzymujemy

$$\alpha(k\Phi(x^*) - \gamma kx^* + G_0) - gkx^* = 0, \quad (2.67)$$

skąd możemy wyznaczyć k^*

$$k^*(\alpha) = \frac{\alpha G_0}{\alpha(\gamma x^* - g - \delta) + gx^*}. \quad (2.68)$$

Z definicji x^* mamy

$$y^*(\alpha) = x^* k^*(\alpha). \quad (2.69)$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\Phi_x = \left(\frac{av}{d}\right) (c + d - \Phi)(\Phi - c), \quad (2.70)$$

$$\Phi_{xx} = \left(\frac{av}{d}\right)^2 (2c + d - 2\Phi)(c + d - \Phi)(\Phi - c), \quad (2.71)$$

tj. funkcja Φ ma punkt przegięcia w $x = x^*$, taki że $\Phi(x^*) = c + \frac{d}{2} \Rightarrow x^* = \frac{1}{v}$.

W rozważanym przypadku naturalne jest wykorzystanie jakościowych metod równań różniczkowych do zbadania dynamiki układu. Zamiast badać układ (2.65), korzystniej jest rozważyć równoważny układ, w którym punkt krytyczny znajduje się w początku układu współrzędnych. W tym celu należy przesunąć początek układu współrzędnych (y, k) w następujący sposób: $y - y^* = \bar{y}$, $k - k^* = \bar{k}$.

Charakter punktu krytycznego w początku układu współrzędnych jest określony przez wartości własne macierzy linearyzacji o następującej postaci

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.72)$$

gdzie

$$\begin{aligned} m_{11} &= \alpha(I_{\bar{y}}(0, 0) - \gamma) - g, \\ m_{12} &= \alpha I_{\bar{k}}(0, 0), \\ m_{21} &= I_{\bar{y}}(0, 0) - \vartheta I_{\bar{y}}(0, 0)[\alpha(I_{\bar{y}}(0, 0) - \gamma) - g], \\ m_{22} &= I_{\bar{k}}(0, 0) - g - \delta - \alpha \vartheta I_{\bar{y}}(0, 0) I_{\bar{k}}(0, 0). \end{aligned}$$

Obliczając macierz M skorzystaliśmy z tego, że funkcja $\Phi(x)$ ma punkt przegięcia w punkcie krytycznym x^* .

W dalszej analizie skorzystamy z tego, że wszystkie pochodne w rozwinięciu prawych stron równania (2.65) mogą być wyrażone przez pochodne funkcji $\Phi(x)$ w punkcie równowagi

$$I_{\bar{y}}(0, 0) = I_y(y^*, k^*) = [k\Phi(x)]_y(y^*, k^*) = k\Phi_x(x^*)\frac{1}{k} = \Phi_x(x^*), \quad (2.73)$$

$$I_{\bar{y}\bar{y}}(0, 0) = I_{yy}(y^*, k^*) = [\Phi_x(x)]_y = \Phi_{xx}(x^*)\frac{1}{k} = 0, \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} I_{\bar{y}\bar{k}}(0, 0) &= I_{yk}(y^*, k^*) = [\Phi_x(x)]_k = \Phi_{xx}(x^*)\frac{-y}{k^2} \\ &= -x^*(k^*)^{-1}\Phi_{xx}(x^*) = 0, \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} I_{\bar{k}}(0, 0) &= I_k(y^*, k^*) = [k\Phi(x)]_k(y^*, k^*) = \Phi(x^*) - \frac{y^*}{k^*}\Phi_x(x^*) \\ &= \Phi(x^*) - x^*\Phi_x(x^*), \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} I_{\bar{k}\bar{k}}(0, 0) &= I_{kk}(y^*, k^*) = [\Phi(x) - x\Phi_x(x)]_k\frac{-y}{k^2} \\ &= (\Phi_x(x^*) - \Phi_x(x^*) - \Phi_{xx}(x^*)x)(-x^*)(k^*)^{-1} = 0. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Do analizy lokalnych zbiorów granicznych konieczna jest jedynie informacja o pierwszych pochodnych pola wektorowego, podczas gdy do analizy stabilności cyklu granicznego musimy znać pochodne co najmniej trzeciego rzędu prawych stron układu. Dlatego w celu określenia typu punktu krytycznego wystarczy posiadać informację o śladzie i wyznaczniku macierzy linearyzacji M obliczonej w tym punkcie (dla uproszczenia opuszczamy kreski nad zmiennymi y i k)

$$\text{tr } M = \alpha(I_y(0, 0) - \gamma) + I_k(0, 0) - \alpha\vartheta I_y(0, 0)I_k(0, 0) - 2g - \delta, \quad (2.78)$$

$$\det M = [\alpha(I_y(0, 0) - \gamma) - g](I_k(0, 0) - g - \delta) - \alpha\vartheta(\gamma + g)I_y(0, 0)I_k(0, 0), \quad (2.79)$$

gdzie

$$I_y(0, 0) = \Phi_x(x^*) = \frac{avd}{4}, \quad (2.80)$$

$$I_k(0, 0) = \Phi(x^*) - x^*\Phi_x(x^*) = g + \delta - \frac{ad}{4}. \quad (2.81)$$

Z drugiej strony wszystkie pochodne trzeciego rzędu są potrzebne do wyznaczenia parametru stabilności Guckenheimera

$$I_{yyy}(0, 0) = \Phi_{xxx}(x^*), \quad (2.82)$$

$$I_{yyk}(0, 0) = (k^*)^{-1}\Phi_{xxk}(x^*), \quad (2.83)$$

$$I_{ykk}(0, 0) = 0, \quad (2.84)$$

$$I_{kkk}(0, 0) = (k^*)^{-1}(x^*)^2\Phi_{xxx}(x^*), \quad (2.85)$$

$$I_{kyy}(0, 0) = (k^*)^{-1}x^*\Phi_{xxk}(x^*), \quad (2.86)$$

$$I_{kky}(0, 0) = (k^*)^{-2}\Phi_{xxk}(x^*). \quad (2.87)$$

Widzimy, że wszystkie nieznikające pochodne zależą od pochodnych trzeciego rzędu funkcji Φ .

Gdy ślad macierzy linearyzacji $\text{tr } M = 0$, w układzie (2.65) ma miejsce bifurkacja Hopfa dla następującej wartości parametru opóźnienia

$$\vartheta_{\text{bif}} = -\frac{\alpha(I_y(0, 0) - \gamma) + I_k(0, 0) - 2g - \delta}{\alpha I_y(0, 0)I_k(0, 0)}. \quad (2.88)$$

Ponieważ założyliśmy, że $I_k(0, 0) = \beta > 0$, więc dodatniość parametru ϑ_{bif} jest równoważna z następującym warunkiem

$$\alpha(I_y(0, 0) - \gamma) + I_k(0, 0) - 2g - \delta > 0. \quad (2.89)$$

Zauważmy, że jeśli $v < 1$, wtedy $I_k(0, 0) = \beta < 0$ i znak nierówności będzie przeciwny.

Dla naszych celów korzystnie jest wyrazić wartość parametru ϑ_{bif} w zależności od funkcji $\Phi(x)$ i jej pochodnych

$$\vartheta_{\text{bif}} = -\frac{\left(\frac{1}{4}avd - \gamma\right)\alpha - \frac{1}{4}ad - g}{\frac{1}{4}avd\alpha\left(g + \delta - \frac{1}{4}ad\right)}, \quad (2.90)$$

gdzie $x^* = 1/v$, $\Phi(x^*) = c + (d/2)$, $c = 0,01$, $d = 0,026$, $v = 4,23$, $\delta = 0,007$, $a = 9$, $\gamma = 0,15$, $g = 0,016$.

Zauważmy, że warunek $v < 1$ oznacza, iż x^* , który określa pozycję punktu przegięcia, jest przesunięty o 1 (w kierunku większych wartości) i wtedy $I_k(0, 0)$ zmienia znak. W tym przypadku łatwo jest spełnić warunek (2.89).

Ogólnie określenie stabilności cyklu granicznego w układzie równań (2.38) jest skomplikowane. Z drugiej strony ten cel można łatwo osiągnąć dla układu w przybliżeniu małego czasu budowy, obliczając indeks stabilności w formie (Liu i inni, 1986)

$$\begin{aligned} I = (v^2c)^{-1} & [B(F_{kkk} + G_{yyk}) + 2D(F_{yyk} + G_{ykk}) + C(F_{ykk} + G_{kkk})v^2 \\ & + (DF_{yy} + CF_{ky})(BF_{yy} + 2DF_{yk} + CF_{kk}) \\ & - (DG_{kk} + BG_{yk})(BG_{yy} + 2DG_{yk} + CG_{kk}) - B^2F_{yy}G_{yy} \\ & - DB(F_{yk}G_{yy} + F_{yy}G_{yk}) + C^2F_{kk}G_{kk} + DC(F_{yk}G_{kk} + F_{kk}G_{yk})], \end{aligned} \quad (2.91)$$

gdzie $F(y, k) = \dot{y}$, $G(y, k) = \dot{k}$, $C = G_y$, $D = F_y$, $B = -F_k$ i $v^2 = (BC - D)^2$. Wtedy jeśli $I > 0$, to cykl graniczny jest subkrytyczny, a gdy $I < 0$, to jest superkrytyczny. W przypadku rozważanego modelu obliczenia algebraiczne pokazują, że $I < 0$, wtedy gdy $I_{yyy}(0) < 0$, więc cykl graniczny jest superkrytyczny, jeśli funkcja inwestycji ma kształt litery „s”.

2.6. Podsumowanie

W rozdziale przedstawiony został jeden z pierwszych modeli cyklu koniunkturalnego opisany równaniem różniczkowym z opóźnionym argumentem, stworzony przez Michała Kaleckiego. W modelu

tym uwzględniono opóźnienie między podjęciem decyzji inwestycyjnych i oddaniem do użytku gotowych dóbr inwestycyjnych. Wahania koniunkturalne w modelu Kaleckiego mają charakter endogeniczny.

Zaprezentowane zostały następnie dwa modele cyklu koniunkturalnego, model Kaldora i model Kaldora-Kaleckiego. W modelu Kaldora cykliczne zmiany dochodu są konsekwencją nieliniowości funkcji inwestycji i oszczędności względem dochodu. W modelu tym ma miejsce bifurkacja Hopfa, w wyniku której powstaje stabilny cykl graniczny. Uwzględnienie opóźnienia inwestycyjnego w modelu Kaldora pozwoliło na stworzenie nowego modelu cyklu koniunkturalnego – modelu Kaldora-Kaleckiego. W tym modelu opóźnienie inwestycyjne, tak jak w modelu Kaleckiego, jest związane z czasem realizacji inwestycji. W modelu Kaldora-Kaleckiego również wykazano istnienie cyklu granicznego powstałego w wyniku bifurkacji Hopfa.

Wzorując się na pracy Dany i Malgrange’a, w modelu Kaldora-Kaleckiego uwzględniliśmy rosnący wykładniczo autonomiczny popyt. W ten sposób stworzony został nowy model cykli wzrostu. Wykazaliśmy, że w tym modelu istnieje cykl graniczny. Stabilność tego cyklu została pokazana w szczególnym przypadku małych wartości parametru czasu budowy dóbr inwestycyjnych.

Istnienie cyklicznego zachowania w modelu wzrostu Kaldora-Kaleckiego skłania do zadania pytania o możliwość wystąpienia cykli wzrostu w neoklasycznych modelach wzrostu gospodarczego. W następnym rozdziale zostanie zbadany wpływ opóźnienia inwestycyjnego w modelu Solowa.

Rozdział 3

Model Solowa i opóźnienie inwestycyjne

3.1. Wprowadzenie

Wzrost gospodarczy jest jednym z najważniejszych zagadnień, którymi zajmuje się makroekonomia. Odkrycie i zrozumienie mechanizmów kształtujących rozwój gospodarki kapitalistycznej ma olbrzymie znaczenie dla praktyki życia gospodarczego i stanowi wielkie wyzwanie dla polityki ekonomicznej. Z drugiej strony ma również istotne znaczenie dla rozwoju dyscypliny wiedzy, jaką są nauki ekonomiczne. Budowanie dobrych teorii ekonomicznych służy wszystkim zajmującym się problematyką ekonomiczną, ponieważ teoria i praktyka są w nierozzerwalny sposób z sobą powiązane. O ile pytanie dokąd zmierza gospodarka kapitalistyczna pojawiało się od początków ekonomii jako nauki (Blaug, 1994), o tyle współczesna matematyczna teoria wzrostu gospodarczego ma początek w połowie XX wieku.

Obserwując rozwój gospodarek w dłuższym przedziale czasu, można dostrzec pewne cechy charakterystyczne procesu wzrostu. Kaldor (1963) podał sześć empirycznych faktów (Barro i Sala-i-Martin, 2004, s. 12):

1. Produkt na jednostkę pracy rośnie w czasie i stopa wzrostu nie ma tendencji do spadku.
2. Zasób kapitału rzeczowego na pracującego rośnie w czasie.
3. Stopa zwrotu kapitału jest prawie stała.
4. Stosunek kapitału rzeczowego do produktu jest prawie stały.
5. Udział pracy i kapitału rzeczowego w dochodzie narodowym jest prawie stały.
6. Stopa wzrostu produktu na zatrudnionego różni się znacząco w poszczególnych krajach.

Tematowi wzrostu gospodarczego poświęcono wiele artykułów i monografii¹. Ze względu na przyjęty zakres tematyczny pracy ograniczę się do prezentacji kilku podstawowych modeli wzrostu gospodarczego z neoklasyczną funkcją produkcji (oraz dodatkowo modelu AK). Robert M. Solow (1956) i niezależnie Trevor W. Swan (1956) przedstawili prosty model wzrostu, który stał się podstawą neoklasycznej teorii wzrostu gospodarczego. Model Solowa był udaną próbą przewyższenia problemu niestabilności we wcześniejszych modelach wzrostu (Harrod, 1939; Domar, 1946). Solow wprowadził jedną zasadniczą zmianę w stosunku do modelu Harroda-Domara. Zrezygnował on z założenia o stałych proporcjach czynników produkcji i zastąpił je ograniczoną substytucją czynników wytwórczych.

Rdzeniem neoklasycznej teorii wzrostu gospodarczego jest neoklasyczna funkcja produkcji. Opisuje ona zależność między nakładami czynników produkcji a ilością otrzymanego produktu. Zakładamy, że produkt Y jest jednorodny i jest wytwarzany dzięki nakładom trzech czynników wytwórczych: kapitału $K(t)$, pracy $L(t)$ oraz wiedzy $A(t)$. W ten sposób funkcja produkcji jest funkcją trzech argumentów $F(K, A, L)$. Ostatecznie produkt jest dany przez

$$Y(t) = F(K(t), A(t), L(t)). \quad (3.1)$$

Wzrost produkcji jest możliwy tylko wtedy, gdy wzrosną nakłady czynników produkcji. Szczególną uwagę należy zwrócić na wiedzę, ponieważ wraz z postępem technologicznym jest możliwy wzrost poziomu produkcji przy stałym zasobie kapitału i pracy. Wiedza jest tu traktowana bardzo szeroko i w różny sposób może uczestniczyć w procesie produkcji. W przypadku funkcji produkcji postaci

$$Y = AF(K, L) \quad (3.2)$$

postęp techniczny jest neutralny w sensie Hicksa. Gdy wiedza i kapitał wchodzi w sposób multiplikatywny do funkcji produkcji

$$Y = F(AK, L), \quad (3.3)$$

¹ Najważniejsze monografie, w których przedstawiona jest obszerniej teoria wzrostu gospodarczego, to prace w języku polskim (Czerwiński, 1973; Tokarski, 2005) i w języku angielskim (Acemoglu, 2009; Aghion i Howitt, 2009; Barro i Sala-i-Martin, 2004; Aghion i Howitt, 1998).

to postęp techniczny jest neutralny w sensie Solowa. Jednak najczęściej korzysta się z funkcji produkcji postaci

$$Y = F(K, AL), \quad (3.4)$$

gdzie mówimy o postępie zasilającym pracę albo neutralnym w sensie Harroda. AL jest tu rozumiane jako praca efektywna i wydajność pracy jest zdeterminowana przez dostępną wiedzę.

Funkcja produkcji charakteryzuje się pewnymi własnościami. Istotne jest założenie o stałych przychodach względem skali. Jeśli argumenty funkcji produkcji, nakłady czynników, wzrosną w takich samych proporcjach, to produkt zwiększy się w tym samym stopniu. W przypadku funkcji produkcji (3.4) mamy

$$F(cK, cAL) = cF(K, AL), \quad c > 0. \quad (3.5)$$

O takiej funkcji mówimy, że jest jednorodna stopnia pierwszego względem argumentów K i AL .

Ponadto w stosunku do dwóch czynników produkcji, kapitału rzeczowego i pracy, przyjmujemy, że są one w pewnym ograniczonym stopniu substytucyjne oraz produkcyjności krańcowe tych czynników są malejące. Przykładem takiej funkcji jest funkcja Cobba-Douglasa

$$F(K, AL) = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0; 1). \quad (3.6)$$

Założenie stałych przychodów skali pozwala nam sprowadzić funkcję produkcji do postaci zależnej tylko od jednego argumentu. Zdefiniujmy nowe zmienne $y = Y/AL$ produkt na jednostkę pracy efektywnej (poziom wydajności pracy) i $k = K/AL$ kapitał na jednostkę pracy efektywnej (techniczne uzbrojenie pracy). Wtedy dla funkcji produkcji (3.4)

$$\frac{Y}{AL} = \frac{1}{AL} F(K, AL) = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) \Rightarrow y = f(k). \quad (3.7)$$

W tej postaci funkcja produkcji spełnia następujące założenia

$$f(0) = 0, \quad f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0 \quad (3.8)$$

oraz warunki Inady

$$\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0. \quad (3.9)$$

Funkcja Cobba-Douglasa (3.6) w postaci intensywnej ma bardzo prostą postać

$$f(k) = k^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.10)$$

W rozważanych modelach będziemy korzystali z funkcji produkcji z wiedzą neutralną w sensie Harroda (3.4) i jej specyficzną formą Cobba-Douglasa (3.6).

3.2. Model Solowa

Problemy, jakie występują w modelu Harroda-Domara, spowodowały konieczność poszukiwania nowego ujęcia teoretycznego problemu wzrostu gospodarczego. W teorii keynesowskiej opisujemy gospodarkę w krótkim okresie w stanie specyficznej równowagi przy niepełnym zatrudnieniu. Jeśli jednak wzrost gospodarczy jest zjawiskiem długookresowym, naturalne było oparcie się na klasycznej ekonomii. Robert Solow (1956) stworzył model, w którym zmiany możliwości produkcyjnych – podaż, a nie popyt – są czynnikiem napędzającym wzrost². Model ten stał się podstawą neoklasycznej teorii wzrostu gospodarczego (Barro i Sala-i-Martin, 2004). Wydaje się, że są dwie przyczyny sukcesu takiego sposobu opisu procesu rozwoju gospodarki. Po pierwsze, prostota. Założenia modelu są zgodne z intuicją i prowadzą do prostej i eleganckiej postaci matematycznej modelu. Po drugie, możliwość rozbudowy modelu.

Model Solowa jest modelem gospodarki jednosektorowej, która rozwija się wyłącznie wskutek zmian zasobu kapitału rzeczowego oraz pracy i wiedzy. Przyjmijmy, że gospodarka produkuje jedno dobro. Produkt $Y(t)$ jest wytwarzany dzięki nakładom trzech czynników wytwórczych: kapitału rzeczowego $K(t)$, pracy $L(t)$ oraz wiedzy $A(t)$. Zakładamy, że w funkcji produkcji wiedza jest neutralna w sensie Harroda

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)). \quad (3.11)$$

Produkt $Y(t)$, wytwarzany w gospodarce, jest konsumowany lub inwestowany. Zakładamy, że inwestowana część jest stała i wynosi

² Trevor W. Swan (1956) stworzył niezależnie podobny model i opublikował go kilka miesięcy później. Dlatego też używa się również określenia model Solowa-Swana.

$sY(t)$, gdzie $s \in (0; 1)$. Zasób kapitału rzeczowego $K(t)$ jest powiększany o inwestycje netto, ponieważ część inwestycji ma charakter odnowieniowy. Zakładając stałą stopę deprecjacji kapitału rzeczowego δ , równanie akumulacji kapitału rzeczowego ma postać

$$\frac{dK}{dt} = \dot{K} = sY(t) - \delta k(t). \quad (3.12)$$

Następnie zakładamy, że nakład pracy rośnie w sposób egzogeniczny ze stałą stopą n

$$\dot{L}(t) = nL(t). \quad (3.13)$$

Z kolei wiedza rośnie ze stałą stopą a

$$\dot{A}(t) = aA(t). \quad (3.14)$$

Gdy zapiszemy równanie akumulacji kapitału rzeczowego (3.12) w zmiennych na jednostkę pracy efektywnej, model Solowa przyjmie następującą postać

$$\dot{k}(t) = sy(t) - (n + a + \delta)k(t), \quad (3.15)$$

gdzie $s \in (0; 1)$ jest stałą stopą oszczędności, n i a są stopami wzrostu pracy i wiedzy, oraz δ jest stopą deprecjacji kapitału rzeczowego.

Stan stacjonarny jest rozwiązaniem, które uzyskujemy w warunkach długookresowej równowagi. Innymi słowy, zmienna stanu układu k jest stała

$$\dot{k}(t) = 0. \quad (3.16)$$

W przypadku modelu Solowa danego równaniem (3.15) mamy

$$sy(t) = (n + a + \delta)k(t). \quad (3.17)$$

Wtedy inwestycje netto są równe zeru i rzeczywista wielkość inwestycji jest na takim poziomie, który rekompensuje zmiany wielkości zasobu kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej wywołane wzrostem podaży pracy i wiedzy oraz deprecjacji istniejącego zasobu kapitału rzeczowego.

Gdy funkcja produkcji jest funkcją Cobba-Douglasa, to równanie akumulacji kapitału rzeczowego na jednostkę efektywnej pracy ma postać

$$\dot{k}(t) = sk^\alpha(t) - (n + a + \delta)k(t) \quad (3.18)$$

a w stanie stacjonarnym wielkości kapitału rzeczowego na jednostkę efektywnej pracy i produkcji na jednostkę efektywnej pracy wynoszą odpowiednio

$$k^* = \left(\frac{s}{n + a + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (3.19)$$

oraz

$$y^* = \left(\frac{s}{n + a + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (3.20)$$

Równania (3.19) i (3.20) określają wielkość zasobu kapitału rzeczowego i strumienia produktu na jednostkę pracy efektywnej w warunkach długookresowej równowagi. Rosną one wraz ze wzrostem stopy oszczędności s , a wzrost stopy wzrostu wiedzy a , stopy wzrostu liczby pracujących n lub stopy deprecjacji kapitału δ prowadzi do ich spadku.

W praktyce ważne jest określenie stabilności otrzymanego rozwiązania. Zjawiska gospodarcze, poza rzadkimi i krótkimi okresami, wydają się stabilne, tak więc i rozwiązania modeli, które je opisują, powinny być stabilne. Analiza zachowania modelu w pobliżu punktu krytycznego dostarcza jakościowej informacji o tym, jak trajektorie zbliżają się lub oddalają od tego punktu. Istnieją pewne charakterystyczne typy zachowania układu w pobliżu punktu krytycznego. Sposób zachowania trajektorii w pobliżu punktu krytycznego określa rodzaj punktu krytycznego, których klasyfikacja jest podana w Dodatku A.1.

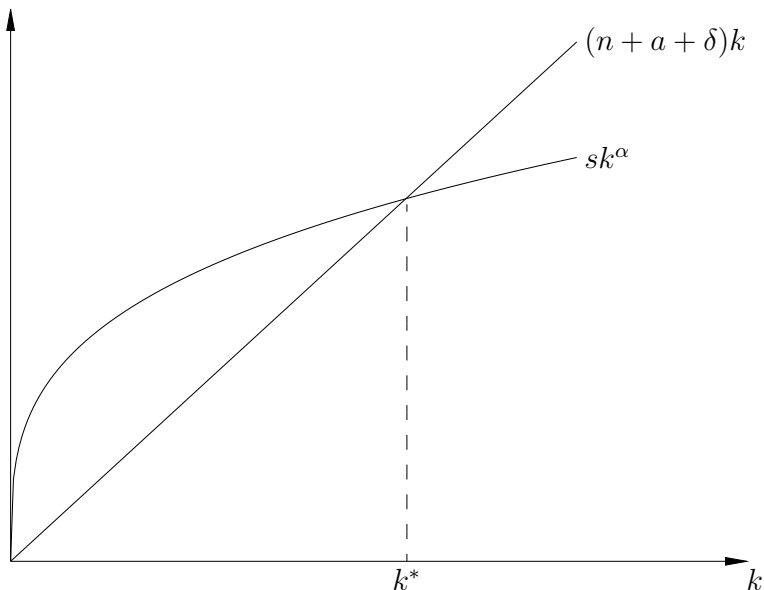
Określmy, jakiego rodzaju jest punkt krytyczny (3.19). W tym celu linearyzujemy prawą stronę równania różniczkowego (3.18) w punkcie krytycznym k^* . Następnie otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$\alpha s (k^*)^{\alpha-1} - (n + a + \delta) - \lambda = 0, \quad (3.21)$$

gdzie λ jest wartością własną równania charakterystycznego. Podstawiając do równania charakterystycznego (3.21) wielkość kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej w stanie stacjonarnym (3.19), otrzymujemy

$$\lambda = (\alpha - 1)(n + a + \delta). \quad (3.22)$$

Ponieważ z założenia modelu $\alpha < 1$ i pozostałe stałe są nieujemne, wartość własna jest rzeczywista i ujemna. Oznacza to, że punkt krytyczny jest stabilnym węzłem. Ujemność wartości własnej decyduje o stabilności. Dynamika modelu jest taka, że ścieżka czasowa zbliża się w sposób monotoniczny (niecyklicznie) do stanu stacjonarnego.



Rysunek 3.1. Graficzne rozwiązanie modelu Solowa (3.18).

Graficzna ilustracja modelu Solowa z funkcją produkcji Cobba-Douglassa, która spełnia warunki (3.8) i (3.9), jest przedstawiona na rysunku 3.1. Punkt przecięcia się krzywych $sk^\alpha(t)$ i $(n + a + \delta)k(t)$ określa zasób kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej k^* , który wyznacza długookresową równowagę modelu Solowa.

Model Solowa w postaci (3.18) jest równaniem różniczkowym Bernoulliego, którego rozwiązanie możemy znaleźć analitycznie. Jest to klasa nieliniowych równań różniczkowych, które dzięki podstawieniu można sprowadzić do liniowego równania różniczkowego Bernoulliego, które potrafimy rozwiązać. Równanie modelu Solowa (3.18) dzielimy stronami przez k^α i podstawiamy

$$z(t) = k(t)^{1-\alpha}, \quad \dot{z}(t) = (1 - \alpha)k(t)^{-\alpha}\dot{k}(t). \quad (3.23)$$

Dostajemy wtedy następujące liniowe niejednorodne równanie różniczkowe pierwszego rzędu o stałych współczynnikach

$$\dot{z} = -(1 - \alpha)(n + a + \delta)z(t) + (1 - \alpha)s. \quad (3.24)$$

Najpierw znajdujemy rozwiązanie równania jednorodnego

$$z_s(t) = C_1 e^{-(1-\alpha)(n+a+\delta)t}, \quad (3.25)$$

gdzie C_1 jest stałą całkowania. Następnie szukamy rozwiązania uzupełniającego z równania niejednorodnego (przyjmując $\dot{z} = 0$)

$$z_d(t) = \frac{s}{n + a + \delta}. \quad (3.26)$$

Suma obu rozwiązań jest całką ogólną

$$z(t) = z_s + z_d = C_1 e^{-(1-\alpha)(n+a+\delta)t} + \frac{s}{n + a + \delta}. \quad (3.27)$$

Wracając do pierwotnej zmiennej k , otrzymujemy ścieżkę wzrostu dla kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej

$$k(t) = \left[C_1 e^{-(1-\alpha)(n+a+\delta)t} + \frac{s}{n + a + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (3.28)$$

gdzie C_1 jest stałą całkowania. Jeśli przyjmiemy warunek początkowy $k(0)$ dla $t = 0$, to otrzymamy

$$k(t) = \left[\left(k(0)^{1-\alpha} - \frac{s}{n + a + \delta} \right) e^{-(1-\alpha)(n+a+\delta)t} + \frac{s}{n + a + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (3.29)$$

Teraz należy określić zachowanie modelu w długim okresie. Niech czas zmierza do plus nieskończoności $t \rightarrow \infty$. Wtedy zasób kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej osiąga stałą wartość

$$k^* = \left(\frac{s}{n + a + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (3.30)$$

Oznacza to, że rozwiązanie jest stabilne. Gospodarka osiągnie stan stacjonarny i tam pozostanie (przy założeniu stałości czynników egzogenicznych modelu).

Korzystając zarówno z analizy jakościowej równania Solowa, jak i rozwiązując je analitycznie, otrzymaliśmy identyczny wynik w długim okresie. Obie metody są równoważne, jednakże pierwsza z nich ma przewagę, ponieważ nie zawsze potrafimy scałkować równanie różniczkowe. Model Solowa jest raczej wyjątkiem ze względu na swoją prostotę.

Gdy gospodarka znajdzie się w stanie stacjonarnym, zasób kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej osiąga wartość k^* i taki już pozostanie. Podobnie stałą wartość w punkcie krytycznym ma produkt

na jednostkę pracy efektywnej y^* . Z kolei zasób kapitału rzeczowego K rośnie w tempie $n + a$ wyznaczonym przez wzrost populacji i wiedzy. W takim samym tempie zmienia się produkt Y . Z kolei wielkości na jednostkę pracy K/L i Y/L rosną ze stałą stopą n .

W modelu Solowa ścieżka zrównoważonego wzrostu w stanie stacjonarnym zależy od egzogenicznych parametrów modelu. Jakakolwiek zmiana któregośkolwiek parametru prowadzi do nowej ścieżki. Gospodarka osiągnie w stanie stacjonarnym tym wyższe techniczne uzbrojenie pracy efektywnej k^* , im wyższa jest stopa oszczędności s , ale zmiana stopy oszczędności nie ma wpływu na stopę wzrostu produktu na jednostkę pracy efektywnej.

Jeśli zmienna stanu modelu (3.18) zmierza do stanu stacjonarnego jak $e^{\lambda t}$ (w naszym przypadku $\lambda = (1 - \alpha)(n + a + \delta)$), to wielkość λ^{-1} ma wymiar czasu i jest miarą tempa konwergencji, czasem charakterystycznym zbliżania się do stanu stacjonarnego. Jest to czas, po którym e -krotnie zmaleje odległość od stanu stacjonarnego.

3.3. Opóźnienie inwestycyjne w modelu Solowa

Ogólna postać równania Solowa, w którym uwzględniono dwa czynniki wytwórcze, kapitał rzeczowy K i pracę L , jest dana przez

$$\dot{K} = sf(K(t), L(t)) - \delta K(t), \quad (3.31)$$

gdzie s to oszczędzana część produktu, a δ stopa deprecjacji kapitału rzeczowego. Prawa strona równania opisuje inwestycje netto jako różnicę między poziomem inwestycji brutto i deprecjacją kapitału w chwili t . Jeżeli przyjmiemy, że inwestycje wymagają czasu na realizację, to równanie akumulacji kapitału rzeczowego będzie miało postać

$$\dot{K}(t) = sf(K(t - \vartheta), L(t - \vartheta)) - \delta K(t), \quad (3.32)$$

gdzie $\varphi(t)$ jest pewną funkcją określoną w przedziale $(t - \vartheta, t)$ i nazywaną funkcją początkową³.

³ To, co odróżnia układy z odchylnym argumentem od zwykłych układów opisywanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, to to, że musimy znać kawałek historii tego układu, a nie tylko jego stan w chwili początkowej. Jeżeli jakieś zdarzenie w przeszłości ma wpływ na dzisiejszy stan układu, to musimy znać wszystkie stany układu między tym zdarzeniem i chwilą obecną, aby poznać jego przyszłą ewolucję.

Inwestycje, kończone w chwili t , są rozpoczęte w chwili $t - \vartheta$, przy użyciu zasobów czynników wytwórczych dostępnych wtedy. Parametr ϑ jest średnim okresem budowy dóbr inwestycyjnych w gospodarce. Podobnie traktujemy prawą stronę jako inwestycje netto. Zasób kapitału rzeczowego, który staje się produkcyjny w chwili t , jest wyznaczony przez poziom oszczędności w chwili $t - \vartheta$. Odejmując od tego deprecjację w chwili t , otrzymujemy wzrost całkowitego zasobu kapitału rzeczowego w chwili t .

W literaturze często rozpatrywana jest inna specyfikacja równania opisującego akumulację kapitału rzeczowego. Uwzględnia się deprecjację w chwili $t - \vartheta$ i równanie ma postać

$$\dot{K}(t) = sF(K(t - \vartheta), L(t - \vartheta)) - \delta K(t - \vartheta). \quad (3.33)$$

Przyjmujemy, że kapitał rzeczowy dostarczony w okresie trwania inwestycji $(t - \vartheta; t)$ i którego budowa rozpoczęła się w okresie $(t - 2\vartheta; t - \vartheta)$ nie podlega deprecjacji. Innymi słowy, podejmując decyzje inwestycyjne w chwili $t - \vartheta$, bierzemy pod uwagę konieczność inwestycji odtworzeniowych znanych w chwili $t - \vartheta$.

Trudno jest dokładnie określić poziom deprecjacji kapitału rzeczowego w gospodarce. Metody rachunku dochodu narodowego pozwalają jedynie na przybliżone określenie wielkości deprecjacji.

Możemy założyć, że oddany do użytku kapitał rzeczowy w okresie $(t - \vartheta, t)$ nie podlega deprecjacji lub podlega deprecjacji w sposób zaniedbywalny, ponieważ jest ona mała w stosunku do wielkości deprecjacji zasobu kapitału rzeczowego użytkowanego w chwili $t - \vartheta$. Jeśli jeszcze weźmiemy pod uwagę wielkość całkowitej deprecjacji kapitału we współczesnych gospodarkach kapitalistycznych w stosunku do poziomu inwestycji, różnica będzie bardzo mała.

Z punktu widzenia teoretycznych rozważań nie ma to wpływu na jakościowy opis wzrostu w tych modelach.

Wybór specyfikacji równania akumulacji kapitału rzeczowego jest więc podyktowany prostotą dalszej analizy. Przyjmując, że populacja jest stała, wygodniej jest posługiwać się funkcją produkcji (3.33). Z kolei gdy przyjmiemy, że populacja rośnie w sposób wykładniczy, wykorzystujemy funkcję produkcji (3.32).

Założmy, że równanie Solowa ma postać z funkcją produkcji neutralną w sensie Harroda

$$\dot{K}(t) = sF(K(t - \vartheta), A(t - \vartheta)L(t - \vartheta)) - \delta K(t), \quad (3.34)$$

a praca i wiedza są egzogenicznymi zmiennymi rosnącymi wykładniczo

$$\dot{L} = nL, \quad (3.35)$$

$$\dot{A} = aA. \quad (3.36)$$

Wprowadźmy zmienne na jednostkę pracy efektywnej AL . W przypadku uwzględnienia opóźnienia, musimy obliczyć zmianę zasobu pracy i wiedzy w okresie ϑ

$$L(t) = L(t - \vartheta)e^{nt - n(t - \vartheta)} = L(t - \vartheta)e^{n\vartheta}, \quad (3.37)$$

$$A(t) = A(t - \vartheta)e^{at - a(t - \vartheta)} = A(t - \vartheta)e^{a\vartheta}. \quad (3.38)$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)} \right) \\ &= \frac{\dot{K}(t)A(t)L(t) - K(t)[\dot{A}(t)L(t) + A(t)\dot{L}(t)]}{[A(t)L(t)]^2} \\ &= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \left[\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \right] \\ &= \frac{sF(K(t - \vartheta), A(t - \vartheta)L(t - \vartheta)) - \delta K(t)}{A(t)L(t)} - k(t)(a + n) \\ &= \frac{sF(K(t - \vartheta), A(t - \vartheta)L(t - \vartheta))}{A(t)L(t)} - (\delta + a + n)k(t) \\ &= \frac{sF(K(t - \vartheta), A(t - \vartheta)L(t - \vartheta))}{e^{(a+n)\vartheta}A(t - \vartheta)L(t - \vartheta)} - (\delta + a + n)k(t). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Uwzględniając założenie, że funkcja produkcji $F(\cdot, \cdot)$ jest jednorodna stopnia pierwszego, ostatecznie otrzymujemy

$$\dot{k}(t) = e^{-(a+n)\vartheta} s f(k(t - \vartheta)) - (\delta + a + n)k(t), \quad (3.40)$$

gdzie $f(\cdot)$ jest oznaczeniem funkcji produkcji w postaci intensywnej. Jeżeli dla uproszczenia notacji wprowadzimy oznaczenia

$$E = e^{-(a+n)\vartheta}, \quad D = \delta + a + n, \quad (3.41)$$

równanie modelu opisujące akumulację kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej ma postać

$$\dot{k}(t) = E s f(k(t - \vartheta)) - D k(t). \quad (3.42)$$

Model Solowa z opóźnieniem (stałe zasoby pracy i wiedzy)

Rozważmy model Solowa, w którym populacja i wiedza są stałe. Jedynym zasobem, którego dynamikę badamy, jest kapitał rzeczowy. Analiza okresowych rozwiązań w takim modelu została przedstawiona przez Zaka (1999). Szczegółowa dyskusja nad istnieniem tylko jednego rozwiązania w tym modelu została przedstawiona przez Szydłowskiego i Krawca (2004).

Przyjmując, że zmiana zasobu kapitału rzeczowego w chwili t jest funkcją dostępnego zasobu kapitału rzeczowego w chwili $t - \vartheta$ i kapitał rzeczowy podlega deprecjacji w stałym tempie $\delta \in [0, 1]$, otrzymujemy następujące równanie dynamiczne

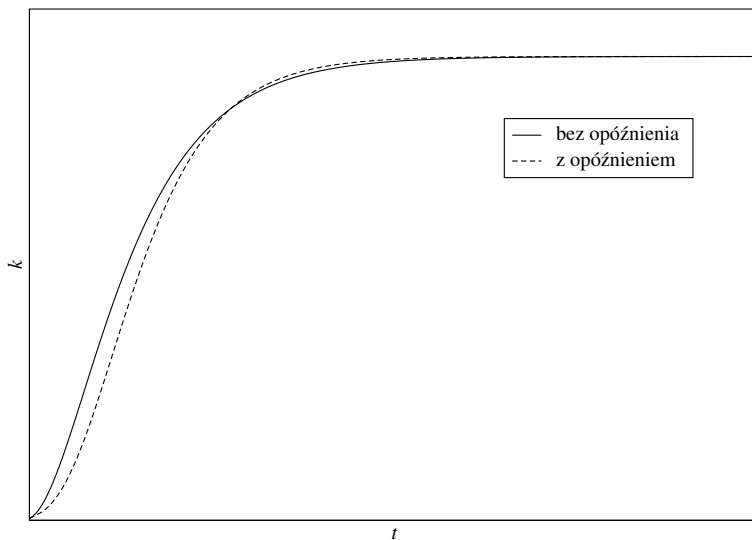
$$\dot{k}(t) = sf(k(t - \vartheta)) - \delta k(t - \vartheta), \quad (3.43)$$

gdzie $f(k)$ jest neoklasyczną funkcją produkcji (tj. ciągłą, rosnącą i ściśle wypukłą względem zmiennej k), a $s \in (0, 1)$ jest stałą stopą oszczędności. Zamiast wartości początkowej, tak jak w przypadku zwyczajnego równania różniczkowego, konieczne jest przyjęcie funkcji początkowej $k(t) = \phi(t)$, zdefiniowanej w całym odcinku czasu określonym przez opóźnienie $t \in [-\vartheta, 0]$. Funkcja początkowa to informacja o tym, jak kształtował się zasób kapitału rzeczowego w gospodarce w okresie od podjęcia decyzji inwestycyjnych w chwili $t - \vartheta$ do ukończenia inwestycji w chwili t . W każdej chwili w okresie od t do $t + \vartheta$ ilość oddanego kapitału rzeczowego jest zdeterminowana przez możliwości produkcyjne w chwili ϑ wcześniejszej. Funkcję początkową nazywamy też historią układu.

Gdy prawa strona równania (3.43) jest równa zero, otrzymujemy rozwiązanie stacjonarne

$$sf(k^*) = \delta k^*. \quad (3.44)$$

Po osiągnięciu tego punktu zasób kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej pozostaje stały. Inwestycje netto są równe zero, a realizowane inwestycje odpowiadają poziomowi deprecjacji. Ścieżki wzrostu, po których osiągany jest stan stacjonarny, dla modelu Solowa i modelu Solowa z opóźnieniem pokazano na rysunku 3.2. Widzimy, że początkowo opóźnienie inwestycyjne powoduje wolniejszą akumulację kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej, a od pewnego momentu przyrost kapitału rzeczowego w jednostce czasu jest większy



Rysunek 3.2. Ścieżki wzrostu kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej, po których osiągany jest stan stacjonarny w modelu Solowa (3.15) i w modelu Solowa z opóźnieniem (3.43).

w modelu z opóźnieniem (rys. 3.3). Jednakże w obu modelach osiągamy w stanie stacjonarnym ten sam poziom zasobu kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej.

Taki punkt istnieje, gdy funkcja produkcji w postaci intensywnej $f(k)$ spełnia standardowe warunki Inady, ponieważ punkt krytyczny równania z opóźnionym argumentem odpowiada punktowi krytycznemu takiego samego równania bez opóźnienia.

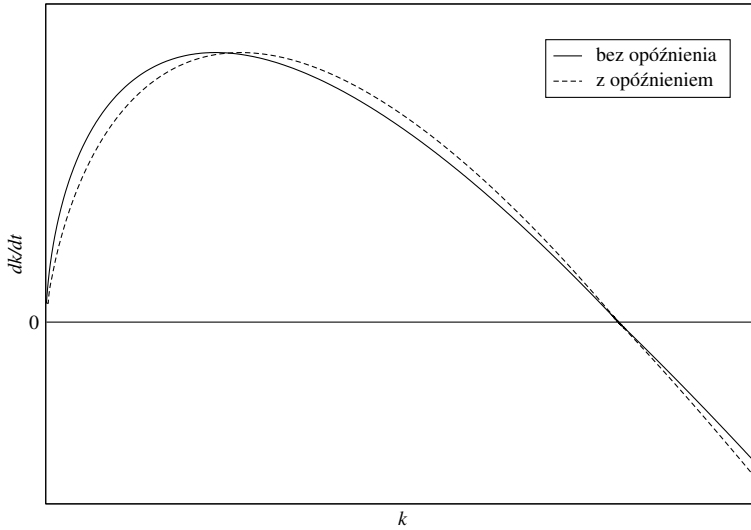
W celu analizy własności modelu Solowa z opóźnieniem (3.43) przeprowadźmy analizę lokalnej stabilności. Po linearyzacji prawej strony równania (3.43) w punkcie krytycznym k^* otrzymujemy

$$\dot{k}(t) = sf'(k)|_{k=k^*}(k - k^*)(t - \vartheta) - \delta(k - k^*)(t - \vartheta). \quad (3.45)$$

Następnie przesuwamy początek układu współrzędnych do punktu krytycznego, wprowadzając nową zmienną $z(t) = k - k^*$, a wtedy równanie (3.45) przyjmuje formę

$$\dot{z}(t) = [sf'(k)|_{k=k^*} - \delta]z(t - \vartheta). \quad (3.46)$$

Zauważmy, że jeśli $C = sf'(k)|_{k=k^*} - \delta < 0$, wtedy równanie (3.46) ma postać równania Tinbergena (Tinbergen, 1931). Dlatego wydaje



Rysunek 3.3. Portret fazowy modelu Solowa (3.15) i modelu Solowa z opóźnieniem (3.43). Punkt krytyczny jest osiągnięty, gdy $\frac{dk}{dt} = 0$.

się naturalne oczekiwanie cyklicznego zachowania w modelu. W celu sprawdzenia tej możliwości rozważmy równanie charakterystyczne dla równania (3.46), które można formalnie uzyskać przez podstawienie próbnego rozwiązania $k(t) = e^{\lambda t}$ do równania (3.46). Wtedy otrzymujemy

$$h(\lambda) = \lambda - Ce^{-\lambda\vartheta} = 0. \quad (3.47)$$

Cykl graniczny może powstać w wyniku bifurkacji Hopfa. Twierdzenie Poincarégo-Andronowa-Hopfa mówi o warunkach, które są konieczne, by taka bifurkacja do cyklu granicznego miała miejsce. Istnieje uogólnienie twierdzenia PAH dla przypadku funkcjonalnych równań różniczkowych, dlatego wystarczy sprawdzić wszystkie założenia twierdzenia, by udowodnić istnienie endogenicznych cykli w modelu (3.46).

Pierwszym krokiem jest znalezienie wartości parametru opóźnienia $\vartheta = \vartheta_{\text{bif}}$, dla której bifurkacja Hopfa ma miejsce. W tym celu wystarczy pokazać istnienie jedynej pary sprzężonych zespolonych wartości własnych $(\lambda, \bar{\lambda})$, będących rozwiązaniem równania charakterystycznego (3.47).

Po zastosowaniu formuły Eulera i rozpisaniu równania charakterystycznego (3.47) na część rzeczywistą i urojoną wartości własnej $\lambda = \xi + i\omega$ otrzymamy

$$\xi - Ce^{-\xi\vartheta} \cos \omega\vartheta = 0, \quad (3.48a)$$

$$\omega + Ce^{-\xi\vartheta} \sin \omega\vartheta = 0. \quad (3.48b)$$

Dla uproszczenia dalszych rozważań zauważmy, że układ równań (3.48) posiada symetrię zwierciadlaną względem zmiany $\omega \rightarrow -\omega$; stąd też $\lambda = \xi + i\omega$ i $\bar{\lambda} = \xi - i\omega$ są rozwiązaniami układu (3.48). Dlatego bez utraty ogólności możemy założyć, że $\omega > 0$.

Cykl Hopfa pojawia się, gdy para pierwiastków układu (3.48) jest urojona, tj. $\xi = 0$. Wtedy układ (3.48) redukuje się do

$$-C \cos \omega\vartheta = 0, \quad (3.49a)$$

$$\omega + C \sin \omega\vartheta = 0. \quad (3.49b)$$

Niech rozwiązaniem układu (3.49) będzie $(\omega_{\text{bif}}, \vartheta_{\text{bif}})$. Po kilku prostych przekształceniach otrzymujemy $\omega_{\text{bif}} = -C$, a ponieważ $C < 0$ z założenia, mamy $\cos \omega_{\text{bif}}\vartheta = \cos C\vartheta = 0$. To implikuje

$$\vartheta_{\text{bif}} = -\frac{1}{C} \frac{(2m+1)\pi}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.50)$$

Z równania (3.49b) mamy $\sin \omega_{\text{bif}}\vartheta_{\text{bif}} = -\omega/C = 1$. Dlatego pewne rozwiązania ϑ_{bif} powinny być zaniedbane i

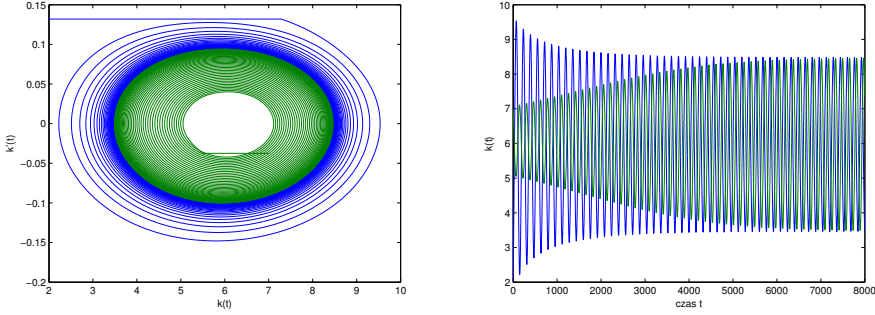
$$\omega_{\text{bif}} = -C \quad \text{ i } \quad \vartheta_{\text{bif}} = -\frac{1}{C} \frac{(4m+1)\pi}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.51)$$

Bifurkacja pierwszego rzędu ($m = 0$) pojawia się, gdy $\vartheta_{\text{bif}} = -\pi/(2C)$; następnie możemy wyznaczyć okres oscylacji $P \cong 2\pi/\omega$ jako

$$P = -\frac{2\pi}{C} = 4\vartheta_{\text{bif}} > 0. \quad (3.52)$$

Zauważmy, że m pojawia się tylko w obliczeniach ϑ_{bif} . Dlatego jest tylko jedna wartość ω , w związku z czym okres P odpowiada orbicie okresowej.

Z obliczeń otrzymaliśmy jeden wyróżniony okres, cykl główny, który ma ekonomiczne znaczenie, ponieważ ten okres jest dłuższy niż



Rysunek 3.4. Portret fazowy z cyklem granicznym i zależność $k(t)$ w modelu Solowa z opóźnieniem (3.43) dla dwóch przykładowych trajektorii o różnych funkcjach początkowych.

bifurkacyjna wartość parametru opóźnienia (Frisch i Holme, 1935) i wszystkie pozostałe cykle dla $m \geq 1$ są wykluczone. Okres głównego cyklu zależy jedynie od C , tj. od postaci funkcji produkcji, stóp oszczędności i deprecjacji kapitału rzeczowego.

Następnym krokiem w dowodzie istnienia bifurkacji Hopfa jest sprawdzenie, że nie istnieją inne wartości własne z zerową częścią rzeczywistą $\operatorname{Re} \lambda = 0$. Jeśli część rzeczywista ξ istnieje, wtedy z (3.48) mamy

$$\xi = Ce^{-\xi\vartheta}, \quad \lambda = \xi. \quad (3.53)$$

Ponieważ C jest ujemne, wielomian charakterystyczny $h(\lambda) = \lambda - Ce^{-\lambda\vartheta}$ w przypadku rzeczywistych wartości własnych jest zawsze dodatni $h(\lambda) > 0$.

Ostatnim krokiem w udowodnieniu istnienia cykli Hopfa jest sprawdzenie warunku transwersalności

$$\frac{d}{d\vartheta} \operatorname{Re} \lambda(\vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_{\text{bif}}} > 0. \quad (3.54)$$

Po zróżniczkowaniu równania (3.47) otrzymujemy

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} = \operatorname{sign} \left[\frac{\omega^2}{(1 + \vartheta\xi)^2 + \vartheta^2\xi^2} \right] > 0. \quad (3.55)$$

Potwierdzenie tej własności kończy dowód istnienia cyklu Hopfa.

Graficznie cykl graniczny w modelu Solowa można otrzymać, korzystając z metod numerycznych. Na rysunku 3.4 zostały pokazane dwie przykładowe trajektorie. Warunek (funkcja) początkowy pierwszej znajduje się wewnątrz, a drugiej na zewnątrz cyklu granicznego.

By potwierdzić to, że cykliczne zachowanie jest powodowane przez czas budowy dóbr inwestycyjnych i ma charakter deterministycznych cykli, musimy rozważyć dynamikę modelu z ustaloną wartością parametru czasu budowy, która jest bliska wartości bifurkacyjnej $\vartheta^* = \vartheta_{\text{bif}} = -\pi/2C > 0$. Wtedy po dekompozycji równania charakterystycznego na część rzeczywistą i urojoną wartości własnej $\lambda = \xi + i\omega$ otrzymamy

$$\xi - Ce^{-\xi\vartheta^*} \cos \omega\vartheta^* = 0, \quad (3.56a)$$

$$\omega + Ce^{-\xi\vartheta^*} \sin \omega\vartheta^* = 0. \quad (3.56b)$$

Równania (3.56a) i (3.56b) należą do klasy równań transcendentnych, które mają nieskończoną liczbę rozwiązań odpowiadających przypadkowi rozważanemu przez Frischa i Holmego (1935), jeśli przyjmiemy w ich wzorach $a = 0$, $c = -C$ i $C = -\ln(-C\vartheta^*)$. Uproszczona analiza równania charakterystycznego jest zawarta w pracy Tinbergena (1931).

Posłużymy się inną metodą analizy rozwiązań (3.56). Łatwo pokazać, że wszystkie rozwiązania równania (3.53), reprezentowane przez parę (ξ, ω) , są wyznaczone z równań

$$X = \omega\vartheta^*, \quad (3.57a)$$

$$Y = -C\vartheta^* \sin X e^{X \cot X}. \quad (3.57b)$$

W rezultacie rozwiązanie układu (3.57) można uzyskać graficznie jako przecięcie funkcji $Y(X) = X$ i $Y(X) = -C\vartheta^* \sin X e^{X \cot X}$. Istnienie nieskończonej liczby punktów przecięcia tych funkcji oznacza, że istnieje nieskończona liczba wartości ω . Niech indeks m będzie wskaźnikiem częstości cyklu rzędu m . Wtedy okres cyklu wynosi $P_m = 2\pi/\omega_m$. Na przykład dla $m = 0$ otrzymamy okres cyklu głównego.

Jeśli

$$\ln(-C\vartheta^*) > -1, \quad (3.58)$$

wtedy równanie (3.56) ma tylko po jednym cyklicznym rozwiązaniu w poniższych przedziałach czasu

$$\frac{\vartheta^*}{m + \frac{1}{2}} \leq P \leq \frac{\vartheta^*}{m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.59)$$

Rozwiązanie w pierwszym przedziale

$$2\vartheta^* \leq P \leq \infty \quad (3.60)$$

jest nazywane rozwiązaniem głównego cyklu, podczas gdy pozostałe rozwiązania odnoszą się do podrzędnych cykli. Zauważmy, że okresy podrzędnych cykli są krótsze niż opóźnienie ϑ^* i tylko jeden, główny cykl ma okres dłuższy niż opóźnienie. Kalecki (1935b) także odrzucił te cykle, ponieważ trudno nadać im interpretację ekonomiczną.

Model Solowa z opóźnieniem (deprecjacja kapitału rzeczowego w chwili t)

Podobnie jak w poprzednim przypadku zakładamy, że w gospodarce dysponujemy trzema czynnikami produkcji: zasobem kapitału rzeczowego K , zasobem pracy L i zasobem wiedzy A . Załóżmy, że postęp techniczny jest neutralny w sensie Harroda (AL to efektywna praca) i strumień produktu Y wytwarzanego w gospodarce jest opisany przez neoklasyczną funkcję produkcji

$$Y = F(K, AL). \quad (3.61)$$

Założmy, że funkcja produkcji jest funkcją Cobba-Douglasa o stałych efektach skali postaci

$$Y(t) = K(t)^\alpha [A(t)L(t)]^{1-\alpha}, \quad (3.62)$$

gdzie α i $1 - \alpha$ to odpowiednio elastyczności strumienia produktu względem nakładu zasobu kapitału rzeczowego i zasobu efektywnej pracy.

Przyjmijmy, że stopy wzrostu pracy L i wiedzy A są stałe i wynoszą odpowiednio n i a . Równania opisujące dynamikę tych czynników produkcji mają postać

$$\dot{L}(t) = nL(t), \quad (3.63)$$

$$\dot{A}(t) = aA(t). \quad (3.64)$$

Zmiana zasobu kapitału rzeczowego K jest równa inwestycjom netto, a więc inwestycjom w kapitał rzeczowy pomniejszonym o deprecjację istniejącego zasobu kapitału rzeczowego. W standardowym modelu Solowa zakładamy, że inwestycje realizowane w chwili t powodują

przyrost zasobu kapitału rzeczowego w tej samej chwili. Oznacza to, że decyzje o inwestycjach, ich realizacja oraz oddanie do użytku odbywają się równocześnie. Zrezygnujmy z tego uproszczenia i załóżmy, że budowa dóbr kapitałowych jest procesem trwającym skończony czas. Przyjmijmy, że średni czas trwania inwestycji w gospodarce wynosi ϑ . Decyzje inwestycyjne albo rozpoczęcie inwestycji ma miejsce w chwili $t - \vartheta$ i do realizacji inwestycji wykorzystane są zasoby czynników produkcji dostępne w tym momencie. Po okresie ϑ inwestycje są zakończone i nowy kapitał rzeczowy staje się produktywny w chwili t . Równanie akumulacji kapitału rzeczowego ma postać

$$\dot{K}(t) = sY(t - \vartheta) - \delta K(t - \vartheta), \quad (3.65)$$

gdzie s oznacza stopę oszczędności i δ stopę deprecjacji kapitału rzeczowego. Inwestycje brutto są równe zaoszczędzonej części dochodu w chwili $t - \vartheta$. To są środki, z których kapitał rzeczowy oddany do użytku w chwili t został sfinansowany. W większości prac poświęconych modelowi Solowa z opóźnieniem deprecjacja kapitału rzeczowego ma miejsce w chwili $t - \vartheta$, a więc rozpoczęcia inwestycji (np. Asea i Zak, 1999). Jeśli użyjemy funkcję produkcji Cobb-Douglasa, równanie akumulacji kapitału rzeczowego ma postać

$$\dot{K}(t) = sK(t - \vartheta)^\alpha [A(t - \vartheta)L(t - \vartheta)]^{1-\alpha} - \delta K(t - \vartheta). \quad (3.66)$$

Równanie (3.66) razem z równaniami (3.63) i (3.64) tworzą układ trzech równań różniczkowych, z których pierwsze jest równaniem różniczkowym z opóźnionym argumentem. Wprowadźmy nowe zmienne: produkt na jednostkę pracy efektywnej y i kapitał rzeczowy na jednostkę pracy efektywnej k

$$y = \frac{Y}{AL}, \quad (3.67)$$

$$k = \frac{K}{AL}. \quad (3.68)$$

Z układu równań (3.63), (3.64) i (3.66) otrzymujemy równanie akumulacji kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej

$$\dot{k}(t) = se^{-(n+a)\vartheta} k^\alpha(t - \vartheta) - \delta e^{-(n+a)\vartheta} k(t - \vartheta) - (n + a)k(t). \quad (3.69)$$

Zamiast wartości początkowej, tak jak w przypadku zwyczajnego równania różniczkowego, konieczne jest przyjęcie funkcji początkowej $\phi(t)$,

zdefiniowanej na całym odcinku czasu określonym przez opóźnienie $k(t) = \phi(t)$ dla $t \in [-\vartheta, 0]$.

Zmodyfikowany model Solowa, w którym uwzględniono opóźnienie inwestycyjne, jest dany równaniem (3.69). Analiza rozwiązań tego modelu będzie przedmiotem dalszych rozważań.

W stanie stacjonarnym $\dot{k} = 0$ i zasób kapitału na jednostkę pracy efektywnej ($k(t - \vartheta) = k(t) = k^*$) wynosi

$$k^* = \left(\frac{se^{-(n+a)\vartheta}}{n + a + \delta e^{-(n+a)\vartheta}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (3.70)$$

oraz

$$y^* = \left(\frac{se^{-(n+a)\vartheta}}{n + a + \delta e^{-(n+a)\vartheta}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (3.71)$$

Wielkości k^* i y^* to odpowiednio zasób kapitału rzeczowego i strumień produktu na jednostkę pracy efektywnej w warunkach długookresowej równowagi. Podobnie jak w modelu Solowa, w modelu z opóźnieniem wraz ze wzrostem stopy oszczędności s kapitał rzeczowy i produkt na jednostkę efektywnej pracy rosną, a wzrost stopy wiedzy a , stopy wzrostu liczby pracujących n lub stopy deprecjacji kapitału rzeczowego δ prowadzi do ich spadku. Pojawia się tu jednak parametr ϑ . Uwzględnienie opóźnienia spowodowało, że zasób kapitału rzeczowego i strumień produktu na jednostkę pracy efektywnej są mniejsze niż w stanie stacjonarnym modelu Solowa. Im większe jest opóźnienie ϑ , tym mniejsze są k^* i y^* . Obliczmy, jak duży jest spadek zasobu kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej w modelu wzrostu z opóźnieniem inwestycyjnym w stanie stacjonarnym w porównaniu do jego wartości w stanie stacjonarnym w modelu Solowa (modelu z zerowym opóźnieniem inwestycyjnym $\vartheta = 0$)

$$\gamma_k = \frac{k^*(\vartheta_0) - k^*(0)}{k^*(0)} = \left(\frac{(n + a + \delta)e^{-(n+a)\vartheta_0}}{n + a + \delta e^{-(n+a)\vartheta_0}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1. \quad (3.72)$$

Widzimy, że spadek γ_k jest tym większy, im większe są wartości parametrów n , a i α . Przykładowo, gdy $n + a = 0,03$, $\alpha = 0,3$ i $\vartheta = 1$, spadek wynosi 1,6%. Spadek γ_k dla innych wartości parametrów został przedstawiony w tabeli 3.1.

Podobną analizę możemy przeprowadzić dla produktu na jednostkę pracy efektywnej. Względną zmianę produktu na jednostkę pracy

Tabela 3.1. Procentowy spadek zasobu kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej w modelu wzrostu Solowa z opóźnieniem w stosunku do zasobu kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej w modelu Solowa bez opóźnienia.

	$\vartheta_0 = 0,5$	$\vartheta_0 = 1,0$	$\vartheta_0 = 3,0$
$n = 0,01; g = 0,01; \alpha = 0,3$	0,4	0,8	2,8
$n = 0,01; g = 0,01; \alpha = 0,4$	0,5	1,0	2,9
$n = 0,01; g = 0,02; \alpha = 0,3$	0,8	1,6	4,8
$n = 0,01; g = 0,02; \alpha = 0,4$	0,9	1,8	5,6

Tabela 3.2. Procentowy spadek produktu na jednostkę pracy efektywnej w modelu wzrostu Solowa z opóźnieniem w stosunku do produktu na jednostkę pracy efektywnej w modelu Solowa bez opóźnienia.

	$\vartheta_0 = 0,5$	$\vartheta_0 = 1,0$	$\vartheta_0 = 3,0$
$n = 0,01; g = 0,01; \alpha = 0,3$	0,1	0,2	0,7
$n = 0,01; g = 0,01; \alpha = 0,4$	0,2	0,4	1,2
$n = 0,01; g = 0,02; \alpha = 0,3$	0,2	0,5	1,5
$n = 0,01; g = 0,02; \alpha = 0,4$	0,4	0,8	2,3

efektywnej w punkcie równowagi długookresowej w przypadku, gdy w modelu Solowa uwzględnimy opóźnienie w stosunku do przypadku, gdy w modelu Solowa nie ma opóźnienia, definiujemy jako

$$\gamma_y = \frac{y^*(\vartheta_0) - y^*(0)}{y^*(0)} = \left(\frac{(n + a + \delta)e^{-(n+a)\vartheta_0}}{n + g + \delta e^{-(n+a)\vartheta_0}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1. \quad (3.73)$$

Wzrost opóźnienia inwestycyjnego w modelu Solowa obniża wielkość produktu na jednostkę pracy efektywnej osiąganą w punkcie długookresowej równowagi. Podobnie jak w przypadku zasobu kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej, wzrost wartości parametrów n , a i α powoduje obniżenie wielkości produktu na jednostkę pracy efektywnej. Wartości współczynnika γ_y dla przykładowych wartości parametrów zostały przedstawione w tabeli 3.2.

Przeprowadźmy teraz analizę lokalnej stabilności w celu zbadania własności modelu Solowa z opóźnieniem. Zbadanie zachowania układu w otoczeniu punktu krytycznego pozwoli wykazać, czy istnieją rozwiązania cykliczne.

Szukamy szczególnego typu zachowania cyklicznego, które jest reprezentowane przez cykl graniczny. Jest to krzywa w przestrzeni fazowej, która przyciąga lub odpycha (w zależności od tego, czy mamy do czynienia ze stabilnym czy niestabilnym cyklem granicznym) trajektorie układu. Jedną z możliwych dróg powstania cyklu granicznego jest utrata stabilności przez punkt krytyczny w wyniku zmiany wartości parametru modelu. Jest to tzw. bifurkacja do orbity okresowej.

W rozważanym modelu parametrem bifurkacyjnym jest parametr opóźnienia ϑ . W miarę jak wartość opóźnienia rośnie, dla pewnej wartości tego parametru zanika stan stacjonarny, a wokół niego pojawia się cykl graniczny i w długim okresie cykliczne zachowanie zmiennych modelu.

Aby znaleźć wartość parametru opóźnienia $\vartheta = \vartheta_{\text{bif}}$, dla której bifurkacja do orbity okresowej ma miejsce, należy wykazać istnienie jedynej pary sprzężonych zespolonych wartości własnych $(\lambda, \bar{\lambda})$, będących rozwiązaniem równania charakterystycznego (3.69). W tym celu zlinearyzujemy równanie modelu (3.69) w punkcie krytycznym (3.70)

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) = & \alpha s e^{-(n+a)\vartheta} (k^*)^{\alpha-1} (k - k^*)(t - \vartheta) \\ & - \delta e^{-(n+a)\vartheta} (k - k^*)(t - \vartheta) - (n + a)(k - k^*)(t). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Wstawiając $k(t) = e^{\lambda t}$ i $k(t - \vartheta) = e^{\lambda(t-\vartheta)}$ oraz wartość w punkcie krytycznym (3.70), otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$[(\alpha - 1)\delta e^{-(n+a)\vartheta} + \alpha(n + a)]e^{-\lambda\vartheta} - (n + a) - \lambda = 0. \quad (3.75)$$

lub dla uproszczenia zapisu

$$C e^{-\lambda\vartheta} - (n + a) - \lambda = 0, \quad (3.76)$$

gdzie $C = [(\alpha - 1)\delta e^{-(n+a)\vartheta} + \alpha(n + a)]$. Rozwiązaniem równania charakterystycznego (3.75) są wartości własne λ .

Załóżmy, że rozwiązanie równania charakterystycznego (3.75) jest zespolone $\lambda = \xi + i\omega$, wtedy równanie charakterystyczne (3.75) możemy zapisać jako układ dwóch równań na część rzeczywistą ξ i urojoną ω wartości własnej λ

$$C e^{-\xi\vartheta} \cos \omega\vartheta - (n + a) - \xi = 0, \quad (3.77a)$$

$$-C e^{-\xi\vartheta} \sin \omega\vartheta - \omega = 0. \quad (3.77b)$$

Zauważmy również, że układ równań (3.77) posiada symetrię zwierciadlaną względem zamiany $\omega \rightarrow -\omega$; stąd też $\lambda = \xi + i\omega$ i $\bar{\lambda} = \xi - i\omega$ są rozwiązaniami tego układu równań. Dlatego bez utraty ogólności możemy założyć, że $\omega > 0$.

Rozwiązania okresowe są określone przez czysto urojone pierwiastki równania charakterystycznego. Niech $\xi = 0$, wtedy układ równań (3.77) przyjmuje postać

$$C \cos \omega \vartheta - (n + a) = 0, \quad (3.78a)$$

$$-C \sin \omega \vartheta - \omega = 0. \quad (3.78b)$$

Niech rozwiązaniem układu równań (3.78) będzie $(\omega_{\text{bif}}, \vartheta_{\text{bif}})$. Podnieśmy do kwadratu równania (3.78a) i (3.78b), dodajmy je stronami i spierwiastkujemy, wtedy otrzymamy

$$\omega_{\text{bif}} = \sqrt{C^2 - (n + a)^2}. \quad (3.79)$$

Takie rozwiązanie istnieje, jeśli $C^2 > (n+a)^2$. Rozpisanie tego warunku daje następujące ograniczenie

$$\alpha < \frac{\delta e^{-(n+a)\vartheta} - (n + a)}{\delta e^{-(n+a)\vartheta} + n + a}. \quad (3.80)$$

Na przykład dla $n = 0,01$, $a = 0,01$, $\delta = 0,05$ oraz $\alpha = 0,3$ warunek jest spełniony, o ile ϑ jest w przybliżeniu mniejsza niż 14.

Następnie wyznaczamy ϑ_{bif} z równań (3.78a) i (3.78b)

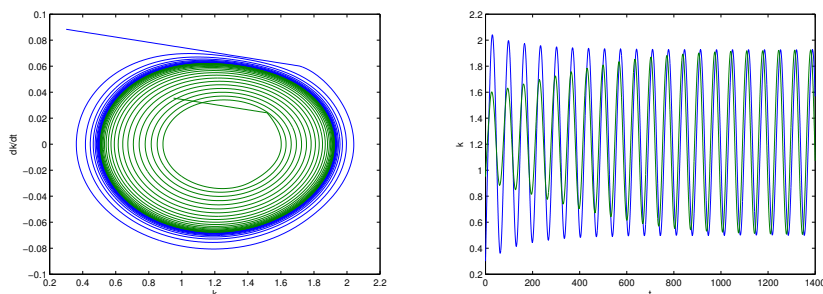
$$\vartheta_{\text{bif}} - \frac{1}{\sqrt{C^2(\vartheta_{\text{bif}}) - (n + a)}} \arctg \left(\frac{\sqrt{C^2(\vartheta_{\text{bif}}) - (n + a)}}{n + a} \right) + m\pi = 0, \quad (3.81)$$

gdzie $m = 0, 1, \dots$

Rozwiązując równanie (3.81), otrzymamy wartość bifurkacyjną parametru opóźnienia ϑ_{bif} . Ekonomiczny sens mają tylko te rozwiązania, dla których okres jest dłuższy niż bifurkacyjna wartość parametru opóźnienia (Frisch i Holme, 1935).

Okres oscylacji jest dany jako $P \cong 2\pi/\omega$. W naszym przypadku

$$P = \frac{2\pi}{\omega_{\text{bif}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{C^2 - (n + a)}}. \quad (3.82)$$



Rysunek 3.5. Portret fazowy z cyklem granicznym i zależność $k(t)$ w modelu Solowa z opóźnieniem (3.69) dla dwóch przykładowych trajektorii o różnych funkcjach początkowych.

Cykl graniczny można również otrzymać, korzystając z metod numerycznych. Numeryczna analiza modelu została przeprowadzona przy użyciu funkcji `dde23` programu Matlab. Na rysunku 3.5 zostały przedstawione portret fazowy oraz wykres zależności $k(t)$ dla dwóch przykładowych trajektorii ($\alpha = 0,3$, $n = 0,01$, $a = 0,01$, $s = 0,2$, $\delta = 0,15$ i $\vartheta = 19,25$). Jedna z trajektorii rozpoczyna swoją ewolucję wewnątrz obszaru, ograniczonego przez krzywą cyklu granicznego, a druga na zewnątrz. Obie zbliżają się do cyklu granicznego i nawijają się na niego. Oznacza to, że cykl graniczny jest cyklem stabilnym.

Model Solowa z opóźnieniem (deprecjacja kapitału rzeczowego w chwili t)

Rozważmy teraz model Solowa, w którym wprowadzamy opóźnienie jedynie do funkcji inwestycji brutto, tak by prawa strona równania akumulacji kapitału rzeczowego opisywała inwestycje netto, podobnie jak w modelu Kaleckiego.

Wyprowadzenie modelu jest podobne jak w poprzednim przypadku. W gospodarce dysponujemy trzema czynnikami produkcji: zasoby kapitału rzeczowego K , pracy L i wiedzy A . Załóżmy, że wiedza jest neutralna w sensie Harroda (AL to efektywna praca) i strumień produktu Y wytwarzanego w gospodarce jest opisany przez agregatową funkcję produkcji Cobba-Douglasa o stałych efektach skali postaci

$$Y(t) = K(t)^\alpha [A(t)L(t)]^{1-\alpha}, \quad (3.83)$$

gdzie α i $1 - \alpha$ to odpowiednio elastyczności strumienia produktu względem nakładu kapitału rzeczowego i efektywnej pracy.

Zarówno praca L , jak i wiedza A są zmiennymi egzogenicznymi, które rosną eksponencjalnie ze stałymi stopami wzrostu n i a

$$\frac{dL(t)}{dt} = n, \quad (3.84)$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = a. \quad (3.85)$$

Jedyną zmienną endogeniczną modelu jest zasób kapitału rzeczowego K . Przyrost zasobu kapitału rzeczowego jest równy inwestycjom netto, a więc inwestycjom w kapitał rzeczowy pomniejszonym o deprecjację istniejącego zasobu kapitału rzeczowego δ . W standardowym modelu Solowa zakładamy, że inwestycje realizowane w chwili t powodują przyrost zasobu kapitału rzeczowego w tej samej chwili. W tym miejscu wprowadźmy modyfikację do modelu Solowa i założmy, że budowa dóbr kapitałowych jest procesem trwającym skończony czas. Przyjmijmy, że średni czas trwania inwestycji w gospodarce wynosi ϑ . Decyzje inwestycyjne albo rozpoczęcie inwestycji ma miejsce w chwili $t - \vartheta$ i przy realizacji inwestycji korzysta się z zasobów dostępnych w tym momencie. Po okresie ϑ inwestycje są zakończone i nowy kapitał rzeczowy staje się produktywny w chwili t . Równanie akumulacji kapitału rzeczowego ma postać

$$\dot{K}(t) = sY(t - \vartheta) - \delta K(t), \quad (3.86)$$

gdzie s oznacza stopę oszczędności i δ stopę deprecjacji kapitału rzeczowego. Inwestycje brutto są równe zaoszczędzonej części dochodu w chwili $t - \vartheta$. Są to środki, z których kapitał rzeczowy oddany do użytku w chwili t został sfinansowany. W większości prac poświęconych modelowi Solowa z opóźnieniem deprecjacja kapitału rzeczowego ma miejsce w chwili $t - \vartheta$ (np. Asea i Zak, 1999). Ponieważ rozważany model zakłada postęp techniczny neutralny w sensie Harroda, naturalne jest przyjęcie deprecjacji w chwili t . Innymi słowy, przyrost zasobu kapitału rzeczowego w chwili t zależy od nowego kapitału rzeczowego zainstalowanego w chwili t , którego budowa została zapoczątkowana w chwili $t - \vartheta$, pomniejszonego o kapitał rzeczowy zużyty w chwili t . W takim przypadku zmodyfikowany model Solowa z opóźnieniem ma postać

$$\dot{K}(t) = sK(t - \vartheta)^\alpha [A(t - \vartheta)L(t - \vartheta)]^{1-\alpha} - \delta K(t). \quad (3.87)$$

Podobnie jak w przypadku modelu Solowa z opóźnieniem i deprecjacją kapitału rzeczowego w chwili $t - \vartheta$, zakładamy, że praca i wiedza rosną w sposób egzogeniczny ze stałymi stopami n i a . Wprowadzamy nowe zmienne na jednostkę pracy efektywnej, które oznaczamy małymi literami

$$y = \frac{Y}{AL}, \quad (3.88a)$$

$$k = \frac{K}{AL} \quad (3.88b)$$

i układ równań (3.84), (3.85), (3.87) przekształcamy do następującego równania

$$\dot{k}(t) = se^{-(n+a)\vartheta}k(t - \vartheta)^\alpha - (n + a + \delta)k(t) \quad (3.89)$$

dla funkcji początkowej $k(t) = \phi(t)$ dla $t \in [-\vartheta, 0]$.

Dla przejrzystości zapisu wprowadźmy nowe oznaczenia

$$E = e^{-(n+a)\vartheta}, \quad D = (n + a + \delta), \quad (3.90)$$

wówczas równanie (3.89) ma postać

$$\dot{k} = sEk(t - \vartheta)^\alpha - Dk(t). \quad (3.91)$$

W stanie stacjonarnym zasób kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej jest cały czas taki sam $k(t - \vartheta) = k(t) = k^*$, dlatego podobnie jak w przypadku, gdy nie występowało opóźnienie, otrzymujemy

$$k^* = \left(\frac{sE}{D} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{se^{-(n+a)\vartheta}}{n + a + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (3.92)$$

oraz

$$y^* = \left(\frac{sE}{D} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{se^{-(n+a)\vartheta}}{n + a + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (3.93)$$

Podobnie jak w przypadku modelu Solowa z opóźnieniem i deprecjacją kapitału rzeczowego w chwili $t - \vartheta$, otrzymaliśmy wielkość zasobu kapitału rzeczowego i strumienia produktu na jednostkę pracy efektywnej w warunkach długookresowej równowagi. W modelu z opóźnieniem tak samo jak w modelu bez opóźnienia rosną one wraz ze wzrostem

Tabela 3.3. Procentowy spadek zasobu kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej w modelu wzrostu Solowa z opóźnieniem w stosunku do zasobu kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej w modelu Solowa bez opóźnienia.

	$\vartheta_0 = 0,5$	$\vartheta_0 = 1,0$	$\vartheta_0 = 3,0$
$n = 0,01; a = 0,01; \alpha = 0,3$	1,4	2,8	8,2
$n = 0,01; a = 0,01; \alpha = 0,4$	1,7	3,3	9,5
$n = 0,01; a = 0,02; \alpha = 0,3$	2,1	4,2	12,1
$n = 0,01; a = 0,02; \alpha = 0,4$	2,5	4,9	13,9

stopy oszczędności s , a wzrost stopy wzrostu wiedzy a , stopy wzrostu liczby pracujących n lub stopy deprecjacji kapitału rzeczowego δ prowadzi do ich spadku. Tu mamy jednak jeszcze jeden parametr ϑ . Uwzględnienie opóźnienia spowodowało, że zasób kapitału rzeczowego i strumień produktu na jednostkę pracy efektywnej są mniejsze. Im większe jest opóźnienie ϑ , tym mniejsze k^* i y^* . Obliczmy, jak duży jest spadek zasobu kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej

$$\gamma_k = \frac{k^*(\vartheta_0) - k^*(0)}{k^*(0)} = e^{-\frac{n+a}{1-\alpha}\vartheta} - 1. \quad (3.94)$$

Widzimy, że spadek jest tym większy, im większe są wartości parametrów n , a i α . Przykładowo, gdy $n + a = 0,03$, $\alpha = 0,3$ i $\vartheta = 1$, spadek wynosi 4,2%. Inne wartości zostały przedstawione w tabeli 3.3.

Podobną analizę możemy przeprowadzić dla produktu na jednostkę pracy efektywnej. Względą zmianę produktu na jednostkę pracy efektywnej w punkcie równowagi długookresowej w przypadku, gdy uwzględnimy opóźnienie w stosunku do przypadku, gdy opóźnienia nie ma, definiujemy jako

$$\gamma_y = \frac{y^*(\vartheta_0) - y^*(0)}{y^*(0)} = e^{-\frac{\alpha(n+a)}{1-\alpha}\vartheta} - 1. \quad (3.95)$$

Wzrost opóźnienia inwestycyjnego w modelu Solowa obniża wielkość produktu osiąganą w punkcie długookresowej równowagi. Podobnie jak w przypadku zasobu kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej, wzrost wartości parametrów n , a i α powoduje obniżenie wielkości produktu. Wartości współczynnika γ_y dla przykładowych wartości parametrów zostały przedstawione w tabeli 3.4.

Tabela 3.4. Procentowy spadek produktu na jednostkę pracy efektywnej w modelu wzrostu Solowa z opóźnieniem w stosunku do produktu na jednostkę pracy efektywnej w modelu Solowa bez opóźnienia.

	$\vartheta_0 = 0,5$	$\vartheta_0 = 1,0$	$\vartheta_0 = 3,0$
$n = 0,01; a = 0,01; \alpha = 0,3$	0,4	0,9	2,5
$n = 0,01; a = 0,01; \alpha = 0,4$	0,7	1,3	3,9
$n = 0,01; a = 0,02; \alpha = 0,3$	0,6	1,3	3,8
$n = 0,01; a = 0,02; \alpha = 0,4$	1,0	2,0	5,8

Zbadanie zachowania układu w otoczeniu punktu krytycznego pozwoli wykazać, czy istnieją rozwiązania cykliczne. W tym celu zlinearyzujemy równanie modelu (3.91) w punkcie krytycznym (3.92)

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= sE\alpha(k^*)^{\alpha-1}(k - k^*)(t - \vartheta) - D(k - k^*)(t) \\ &= \alpha D(k - k^*)(t - \vartheta) - D(k - k^*)(t).\end{aligned}\quad (3.96)$$

Następnie podstawiamy funkcję próbną $k(t - \vartheta) = e^{\lambda(t-\vartheta)}$ i $k(t) = e^{\lambda t}$ i otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$(\alpha e^{-\lambda\vartheta} - 1)D - \lambda = 0. \quad (3.97)$$

Założmy, że wartość własna jest zespolona $\lambda = \xi + \omega$, wtedy powyższe równanie rozdzielamy na część rzeczywistą i urojoną

$$(\alpha e^{-\xi\vartheta} \cos \omega\vartheta - 1)D - \xi = 0 \quad (3.98a)$$

$$- \alpha e^{-\xi\vartheta} \sin \omega\vartheta - \omega = 0. \quad (3.98b)$$

Rozwiązania okresowe są zdeterminowane przez czysto urojone pierwiastki równania charakterystycznego. Niech $\xi = 0$, wtedy z pierwszego równania (3.98a) dostajemy

$$(\alpha \cos \omega\vartheta - 1)D = 0 \quad (3.99)$$

i stąd

$$\cos \omega\vartheta = \frac{1}{\alpha}. \quad (3.100)$$

Ponieważ $\alpha \in (0; 1)$, powyższe równanie jest sprzeczne. Nie istnieją więc zespolone wartości własne i nie ma okresowych rozwiązań.

Tak więc w odróżnieniu od modelu z poprzedniego podrozdziału nie jest możliwe występowanie cyklicznego zachowania w pobliżu punktu równowagi. Widzimy, jak istotny wpływ na rozwiązania ma uwzględnienie deprecjacji w okresie od $t - \vartheta$ do t .

Brak rozwiązań cyklicznych powoduje, że trajektorie modelu zmierzają do punktu równowagi w sposób monotoniczny. Są one charakteryzowane przez rozwiązania rzeczywiste równania charakterystycznego. Przyjmijmy, że wartości własne mają postać $\lambda = \xi$, wtedy

$$e^{-\xi\vartheta} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\xi}{D} + 1 \right). \quad (3.101)$$

Dla dowolnej dodatniej wartości parametru opóźnienia ϑ (i dla dodatnich wartości pozostałych parametrów) rozwiązaniem równania (3.101) jest zawsze ujemna wartość własna. Dla wybranych wartości parametrów modelu możemy obliczyć wartości własne. Jeśli przyjmiemy, że $\xi\vartheta = \zeta$, wtedy równanie ma postać

$$e^{-\zeta} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\zeta}{\vartheta D} + 1 \right) \quad (3.102)$$

i możemy rozwiązać je numerycznie lub graficznie.

Należy oczekiwać, że opóźnienie ma nie tylko wpływ na wartości zmiennych w punkcie równowagi, ale także na szybkość zmiany tych wartości w trakcie dochodzenia do niej. Aby zobaczyć, jak duży jest wpływ opóźnienia na szybkość dochodzenia do równowagi, rozpatrzmy najpierw oryginalny model Solowa. Z równania (3.98) widzimy, że $\dot{k}$ jest funkcją k . W otoczeniu punktu równowagi $k = k^*$ rozwijamy $\dot{k}(k)$ w szereg Taylora, biorąc liniowe przybliżenie

$$\dot{k}(t) \approx \left. \frac{d\dot{k}(t)}{dk} \right|_{k=k^*} (k - k^*). \quad (3.103)$$

W przypadku funkcji produkcji Cobba-Douglasa

$$\left. \frac{d\dot{k}(t)}{dk} \right|_{k=k^*} = -(1 - \alpha)(n + a + \delta) \quad (3.104)$$

i podstawiając (3.104) do (3.103), otrzymujemy

$$\dot{k}(t) \approx -(1 - \alpha)(n + a + \delta)[k(t) - k^*]. \quad (3.105)$$

Podstawiając $z(t) = k(t) - k^*$, rozwiązujemy równanie różniczkowe (3.105) i ostatecznie otrzymujemy

$$k(t) - k^* \approx e^{-(1-\alpha)(n+a+\delta)t} [k(0) - k^*]. \quad (3.106)$$

Z równania (3.106) wynika, że w chwili t wielkość zasobu kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej zbliżyła się do swojej ścieżki zrównoważonego wzrostu z $k(0)$ do $k(t)$ i odległość ta pokonana w jednostce czasu wynosi $(1 - \alpha)(n + a + \delta)\%$ odległości $[k(0) - k^*]$. Na szybkość zbieżności gospodarki do ścieżki zrównoważonego wzrostu wpływ będą miały wartości parametrów modelu. Przyjmijmy, że gospodarka w chwili t znajduje się w pobliżu punktu równowagi. Niech $n + a + \delta = 0,06$ i $\alpha = 1/3$, wtedy różnica między wielkością zasobu kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej w chwili t i wielkością zasobu kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej, która zostanie osiągnięta w punkcie równowagi, zmniejszy się o 4% rocznie. Połowa drogi do ścieżki zrównoważonego wzrostu zostanie pokonana w ciągu $t_{1/2} = \ln(0,5)/\lambda = 17,33$ lat.

3.4. Podsumowanie

W tym rozdziale został przedstawiony model wzrostu gospodarczego Solowa. W modelu tym została wyznaczona analitycznie ścieżka wzrostu, po której osiągany jest stan stacjonarny (zasób kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej jest stały).

Następnie zmodyfikowano model Solowa, uwzględniając opóźnienie inwestycyjne. Rozpatrzono trzy wersje modelu Solowa z opóźnieniem: model, w którym deprecjacja kapitału rzeczowego jest uwzględniona w chwili podjęcia decyzji inwestycyjnych, a zasób wiedzy i pracy jest stały; ten sam model, ale wiedza i praca rosną egzogenicznie ze stałymi stopami; oraz trzeci model, w którym deprecjacja kapitału rzeczowego odpisana jest w chwili oddania gotowych dóbr inwestycyjnych do użytku. W zależności od tego, w którym momencie uwzględnimy deprecjację kapitału rzeczowego, otrzymamy modele o jakościowo różnej dynamice.

W dwóch pierwszych wersjach modelu Solowa z opóźnieniem zostały ustalone warunki istnienia cyklicznego rozwiązania. Po przekroczeniu granicznej wartości opóźnienia (które odgrywa rolę parametru bifurkacyjnego) ma miejsce bifurkacja Hopfa do cyklu granicznego.

W trzeciej wersji modelu Solowa wykazano, że cykliczne zachowanie nie jest możliwe i w długim okresie w modelu osiągnany jest stan stacjonarny. Porównując stan stacjonarny w modelu Solowa z opóźnieniem i w modelu Solowa (bez opóźnienia), pokazaliśmy, że wielkość zasobu kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej w stanie stacjonarnym jest mniejsza w modelu Solowa z opóźnieniem niż w modelu Solowa (bez opóźnienia).

W następnym rozdziale będziemy analizowali wpływ opóźnienia inwestycyjnego w kilku wybranych modelach wzrostu gospodarczego.

Rozdział 4

Opóźnienie inwestycyjne w wybranych modelach wzrostu

4.1. Wprowadzenie

Prostota modelu Solowa została uzyskana kosztem silnych ograniczeń nałożonych na zachowanie gospodarstw domowych czy sposób produkcji. Rezygnacja lub osłabienie założeń pozwala na wzbogacenie modelu. Możemy uwzględnić ważny, zaniedbany wcześniej czynnik lub przeanalizować nowy aspekt procesu wzrostu gospodarczego i znaleźć odpowiedzi na nowe pytania. Między innymi w modelu Solowa nie można wyjaśnić zróżnicowania poziomu wzrostu gospodarczego między krajami. Wydaje się, że kluczowe znaczenie ma wykorzystanie technologii i wiedzy w gospodarce. Uwzględnienie mechanizmów rozwoju technologii, wzrostu wiedzy wynikającego ze stanu gospodarki to metody rozszerzenia modelu Solowa, dzięki czemu staje się on bardziej realistyczny. Szczególnie obiecujące okazało się wprowadzenie endogenicznego kształtowania się technologii i wiedzy, co doprowadziło pod koniec lat 80. XX wieku do powstania grupy modeli wzrostu, którą określamy jako endogeniczne modele wzrostu.

Istotne znaczenie ma również kwestia kształtowania się oszczędności. W modelu Solowa zakładano, że oszczędzana jest stała część produktu. Oznacza to, że konsumpcja w stosunku do dochodu też jest stała. Gospodarstwa domowe nie reagują na zmiany stóp procentowych, które wpływają na decyzje o poziomie konsumpcji dzisiaj i w przyszłości. Rozszerzymy model, uwzględniając to, że gospodarstwa domowe w optymalny sposób kształtują konsumpcję w trakcie swojego życia.

Rozpatrzmy trzy rozszerzenia modelu Solowa. W pierwszym modelu wprowadzimy kapitał rzeczowy, niecharakteryzujący się malejącą

produktywnością krańcową (model AK). W drugim uwzględnimy dwa rodzaje kapitału – kapitał rzeczowy i kapitał ludzki (model Mankiwa-Romera-Weila). W ostatnim modelu założymy, że gospodarstwa domowe podejmują decyzje o oszczędzaniu, tak by osiągnąć maksymalną użyteczność z konsumpcji w trakcie całego życia (model Ramsey-Cassa-Koopmansa).

4.2. Model AK z opóźnieniem

W modelu Solowa występuje jedynie kapitał rzeczowy, który charakteryzuje się malejącymi przychodami krańcowymi. Szczególnym przypadkiem modelu wzrostu Solowa jest model AK, w którym elastyczność produkcji względem kapitału rzeczowego $\epsilon_K(Y) = \alpha = 1$. W modelu AK funkcja produkcji jest liniową funkcją kapitału rzeczowego, więc nie jest ona neoklasyczną funkcją produkcji.

Niech funkcja produkcji ma postać

$$Y(t) = AK(t), \quad (4.1)$$

gdzie $A > 0$ oznacza poziom wiedzy. Średni produkt i krańcowy produkt kapitału są równe A .

Przyjmijmy, że praca L rośnie egzogenicznie ze stałą stopą n . Następnie wprowadźmy nowe zmienne na jednostkę pracy, tak że $k = K/L$ i $y = Y/L$. Wtedy funkcja produkcji ma postać

$$y = Ak \quad (4.2)$$

i równanie akumulacji kapitału rzeczowego na jednostkę pracy jest dane przez

$$\dot{k}(t) = sAk(t) - (n + \delta)k(t) \quad (4.3)$$

lub tempo wzrostu kapitału na jednostkę pracy

$$\frac{\dot{k}}{k} = sA - (n + \delta). \quad (4.4)$$

Tempo wzrostu produktu na jednostkę pracy jest takie samo, ponieważ $\dot{y}/y = \dot{k}/k$. Takie samo tempo wzrostu charakteryzuje konsumpcję na jednostkę pracy.

Względny wzrost zmiennych na jednostkę pracy jest tym, co odróżnia model AK od modelu Solowa, gdzie $k^*/k^* = 0$. Co więcej, wzrost w modelu AK ma miejsce przy braku postępu technologicznego. Poziom tempa wzrostu zależy od parametrów modelu, w szczególności wzrost stopy oszczędności powoduje szybszy wzrost gospodarczy.

Model wzrostu AK, po uwzględnieniu opóźnienia związanego z czasem inwestycji, opisany jest przez równanie różniczkowe z opóźnionym argumentem takim samym jak model Tinbergena czy model Kaleckiego¹.

Założmy, że istnieje opóźnienie związane z czasem realizacji inwestycji. Średnie opóźnienie oznaczmy przez ϑ . Równanie akumulacji kapitału rzeczowego na jednostkę pracy ma wtedy postać

$$\dot{k} = Ak(t - \vartheta) - (n + \delta)k(t). \quad (4.5)$$

Zasób kapitału rzeczowego w chwili t powiększa się o inwestycje netto. Inwestycje brutto są realizowane w okresie od $t - \vartheta$ do t przy wykorzystaniu czynników wytwórczych dostępnych w chwili $t - \vartheta$. Uwzględniamy deprecjację kapitału rzeczowego w chwili t , stąd inwestycje netto w chwili t są określone przez prawą stronę równania (4.5). W niektórych pracach bierze się pod uwagę deprecjację kapitału rzeczowego w chwili $t - \vartheta$ (por. Asea i Zak, 1999; Bambi, 2008).

Porównując równanie modelu Kaleckiego (2.2) i równanie (4.5), widzimy, że w modelu AK z opóźnieniem parametry mają przeciwne znaki, tak że $a = -\delta$, $c = -A$. Ma to pewien wpływ na rozwiązania modelu, o czym szerzej powiemy poniżej. W celu rozwiązania modelu AK wykorzystamy analizę rozwiązań modelu Kaleckiego (Frisch i Holme, 1935).

Przyjmijmy, że równanie (4.5) jest spełnione przez funkcję

$$k(t) = e^{\lambda t}, \quad (4.6)$$

wtedy równanie charakterystyczne ma postać

$$\lambda = Ae^{-\lambda\vartheta} - \delta. \quad (4.7)$$

¹ Model AK z opóźnieniem był również analizowany w innej wersji niż przedstawiona w tym rozdziale. Bambi (2008) zbadał model postaci

$$\dot{k}(t) = Ak(t - \vartheta) - (n + \delta)k(t - \vartheta).$$

A więc podobnie jak w modelu Solowa z opóźnieniem zaproponowanym przez Zaka, deprecjacja ma miejsce w chwili $t - \vartheta$ (Zak, 1999; Szydlowski i Krawiec, 2004).

Niech wartość własna będzie liczbą zespoloną

$$\lambda = \xi + i\omega, \quad (4.8)$$

gdzie ξ i ω są liczbami rzeczywistymi. Równanie charakterystyczne (4.7) przyjmuje wtedy postać

$$\xi + i\omega = Ae^{-\xi\vartheta}[\cos(\omega\vartheta) - \sin(\omega\vartheta)]. \quad (4.9)$$

Jeśli rozdzielimy równanie (4.9) na część rzeczywistą i urojoną, to otrzymamy układ równań

$$\xi = Ae^{-\xi\vartheta} \cos(\omega\vartheta) - \delta \quad (4.10a)$$

$$\omega = -Ae^{\xi\vartheta} \sin(\omega\vartheta). \quad (4.10b)$$

Poszukajmy najpierw rozwiązań rzeczywistych ($\omega = 0$). Równanie (4.10a) przyjmuje wtedy postać

$$\frac{\xi}{A} + \frac{\delta}{A} = e^{-\xi\vartheta}, \quad (4.11)$$

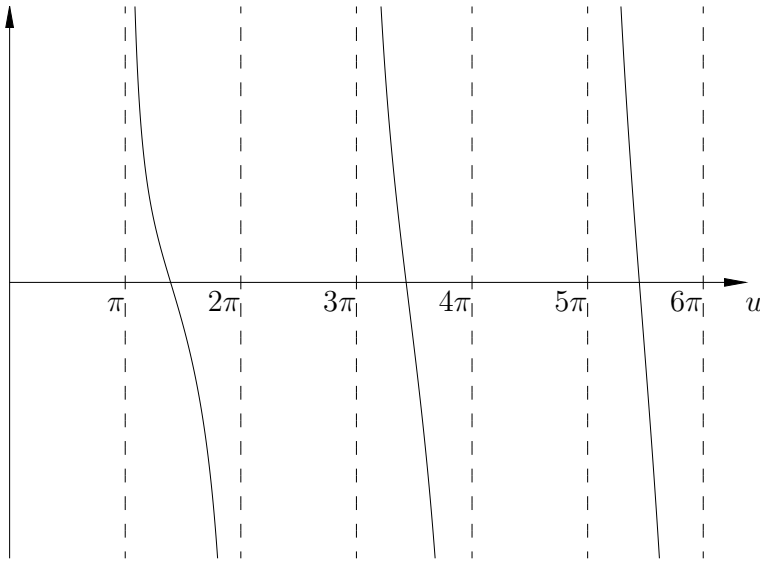
lub gdy wprowadzimy wielkość $w = \xi\vartheta$

$$\frac{w}{A\vartheta} + \frac{\delta}{A} = e^{-w}. \quad (4.12)$$

Ponieważ lewa strona równania (4.12) jest funkcją monotonicznie rosnącą, a prawa strona tego równania funkcją monotonicznie malejącą względem zmiennej w (i tym samym $\lambda = \xi$), istnieje tylko jedno rozwiązanie. Z drugiej strony, gdy δ/A jest mniejsze od jeden, rozwiązanie jest dodatnie. Jest to konieczne, aby rozwiązanie (4.6) modelu gospodarki opisanego równaniem (4.5) odpowiadało wzrostowi zasobu kapitału.

Dyskutując model Kaleckiego (2.2), Frisch i Holme (1935) pokazali, że w przypadku rzeczywistym są trzy przypadki: dwa, jedno lub zero rozwiązań. Bierze się to stąd, że lewa strona równania (4.11) jest funkcją malejącą względem ξ , ponieważ w tym przypadku $A = -c$. Jedno dodatnie rozwiązanie istnieje wtedy, gdy podobnie jak poprzednio wyraz wolny lewej strony równania (4.11) jest mniejszy od jeden.

Kalecki rozpatrywał model z opóźnieniem, ponieważ pojawiło się w nim rozwiązanie okresowe, które mogło posłużyć do opisu zjawiska



Rysunek 4.1. Wykres funkcji (4.14).

cyklu koniunkturalnego w gospodarce. Rozwiązania cykliczne wiążą się z

$$(2m+1)\pi \leq v \leq (2m+2)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

W modelu Kaleckiego opisanego równaniem (2.2) badamy rozwiązania cykliczne, analizując funkcję

$$f(v) = \frac{v}{\operatorname{tg} v} + \ln \left(\frac{\sin v}{v} \right). \quad (4.14)$$

Rozwiązanie to jest przedstawione na rysunku 4.1.

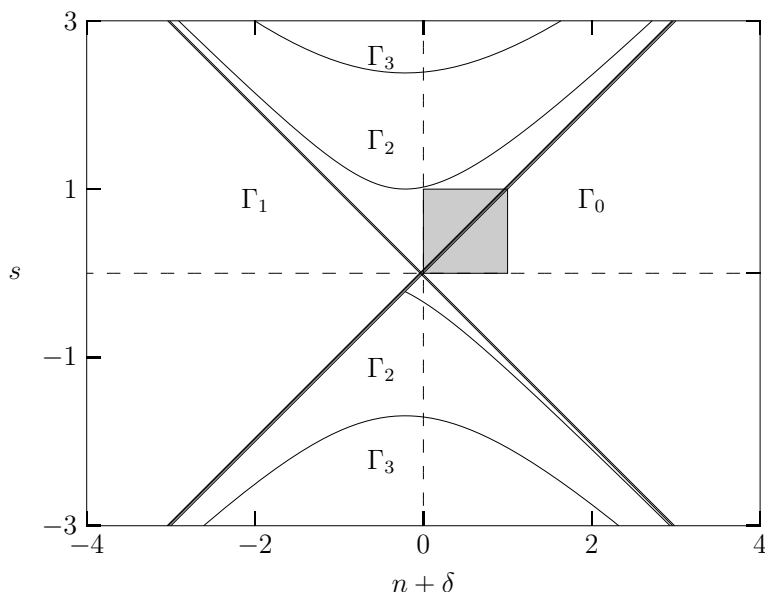
Dziedzina tej funkcji jest określona w

$$2m\pi \leq v \leq (2m+1)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

Jeśli $a\vartheta - \ln(c\vartheta)$ jest mniejsza od jeden, wtedy dokładnie jedno rozwiązanie cykliczne znajduje się w każdym przedziale czasu

$$\frac{\vartheta}{m + \frac{1}{2}} \leq T \leq \frac{\vartheta}{m} \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.16)$$

gdzie T jest oznaczeniem okresu rozwiązania cyklicznego. Cykliczne rozwiązanie w pierwszym przedziale jest jedynym rozwiązaniem, które ma okres dłuższy niż opóźnienie ($2\vartheta \leq T \leq \infty$), i nazywamy je



Rysunek 4.2. D-podział dla pierwiastków równania charakterystycznego modelu AK. Zaciemniony obszar obejmuje możliwy zakres wartości parametrów. Przyjęta wartość opóźnienia wynosi $\vartheta = 4,5$.

cyklem podstawowym. Wszystkie pozostałe rozwiązania mają okres krótszy niż opóźnienie i nazywamy je cyklami podrzędnymi. Ten wynik jest identyczny jak w modelu AK z tą różnicą, że podstawowy cykl o okresie dłuższym niż opóźnienie zawsze istnieje i maksymalny okres jest ograniczony.

W celu określenia stabilności rozwiązań modelu możemy posłużyć się metodą D-podziału². Polega ona na określeniu, ile pierwiastków równania charakterystycznego posiada dodatnią część rzeczywistą.

W miarę spadku wartości parametru opóźnienia ϑ hiperboliczne krzywe rozgraniczające obszary o różnej liczbie wartości własnych z dodatnią częścią rzeczywistą oddalają się od prostej $s = 0$. Na rysunku 4.2 wykreślono obszary przy założonej wartości parametru opóźnienia $\vartheta = 4,5$. Stąd rozwiązania modelu AK są zawsze stabilne, jeśli wartość parametru opóźnienia jest w przybliżeniu mniejsza niż 4,5. Wtedy linia rozgraniczająca obszar z zerową ilością pierwiastków o dodatniej części rzeczywistej Γ_0 od obszaru z jednym pierwiastkiem

² Szczegółowe omówienie metody znajduje się w Dodatku A.2.

z dodatnią częścią rzeczywistą Γ_1 nigdy nie przechodzi przez zacieniony obszar wyznaczony przez ograniczenie na wartości parametru oszczędności s , które mieszczą się w przedziale $(0, 1)$.

4.3. Model wzrostu Mankiwa-Romera-Weila z opóźnieniem

W modelu Solowa mamy do czynienia z jednym rodzajem kapitału, kapitałem rzeczowym. Z drugiej strony mamy do czynienia z jednorodną siłą roboczą. W konsekwencji model Solowa nie tłumaczy charakterystyki wzrostu realnych gospodarek. Antidotum na te problemy okazała się koncepcja kapitału ludzkiego (Domański, 1993; Welfe, 2007). Pojęcie to nie posiada jednoznacznej definicji i w różnych kontekstach nadaje się mu różny sens. Najczęściej mówimy o nagromadzonych przez ludzi umiejętnościach i wiedzy. Przyjmujemy, że są one czynnikiem produkcji (podobnie jak maszyny i urządzenia), który powstaje w wyniku inwestycji w człowieka. Edukacja jest tutaj najważniejszym sposobem uzyskiwania tego typu kapitału, ale znaczenie ma również doświadczenie i umiejętności praktyczne (Cichy i Malaga, 2007).

Mankiw i inni (1992), biorąc za punkt wyjścia neoklasyczny model Solowa, uwzględnili w funkcji produkcji obok kapitału rzeczowego K i kapitał ludzki H , tak że produkt jest dany przez

$$Y(t) = K(t)^\alpha H(t)^\beta [A(t)L(t)]^{1-\alpha-\beta}, \quad \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta < 1, \quad (4.17)$$

gdzie L jest oznaczeniem siły roboczej, A wiedzy i AL wchodzi multiplikatywnie do funkcji produkcji, skąd wynika stałość przychodów skali z K , H i AL .

Zakładamy, że zarówno kapitał rzeczowy, jak i ludzki są produkowane zgodnie z tą samą funkcją produkcji (4.17). Oznacza to, że każda jednostka produktu może być przekształcona w jednostkę konsumpcji, kapitału rzeczowego lub kapitału ludzkiego. Ponadto oszczędności są w całości inwestowane w kapitał rzeczowy i kapitał ludzki. Udział w dochodzie oszczędności inwestowanych w kapitał rzeczowy wyno-

si s_K , a inwestowanych w kapitał ludzki wynosi s_H . Wtedy akumulacja obu rodzajów kapitału jest opisana przez następujący układ równań

$$\dot{K}(t) = s_K Y(t) - \delta K(t), \quad (4.18a)$$

$$\dot{H}(t) = s_H Y(t) - \delta H(t). \quad (4.18b)$$

Podobnie jak Mankiw, Romer i Weil zakładamy taką samą stopę deprecjacji δ kapitału rzeczowego i ludzkiego.

Dodatkowo przyjmujemy standardowe założenia o dynamice L i A ; zarówno zasób pracy, jak i wiedzy rosną wykładniczo ze stałymi stopami n i a , odpowiednio

$$\dot{L}(t) = nL(t), \quad (4.19)$$

$$\dot{A}(t) = aA(t). \quad (4.20)$$

Wprowadźmy nowe zmienne zdefiniowane jako wielkości na jednostkę pracy efektywnej $k = K/AL$, $h = H/AL$ i $y = Y/AL$. W nowych zmiennych funkcja produkcji ma następującą postać

$$y(t) = k(t)^\alpha h(t)^\beta, \quad (4.21)$$

a równania akumulacji kapitału rzeczowego i ludzkiego na jednostkę pracy efektywnej przyjmują postać

$$\dot{k} = s_K k(t)^\alpha h(t)^\beta - (n + a + \delta)k(t), \quad (4.22a)$$

$$\dot{h} = s_H k(t)^\alpha h(t)^\beta - (n + a + \delta)h(t), \quad (4.22b)$$

gdzie dla uproszczenia stałe zostały oznaczone jako

$$D = n + a + \delta. \quad (4.23)$$

W jakościowej analizie układu (4.22) poszukujemy punktów krytycznych, w których wartości zmiennych w postaci intensywnej k i h pozostają stałe. Punkty te odpowiadają stanowi stacjonarnemu układu. Model ma dwa punkty krytyczne, które wyznaczamy, przyrównując prawe strony układu (4.22) do zera

$$\dot{k} = 0, \quad (4.24a)$$

$$\dot{h} = 0. \quad (4.24b)$$

Pierwszy z nich $k_1^* = 0$, $h_2^* = 0$ nie ma znaczenia ekonomicznego. Drugi punkt określa stan stacjonarny, w którym zasoby kapitału rzeczowego i ludzkiego na jednostkę pracy efektywnej są stałe i wynoszą

$$k^* = \left[\frac{D}{s_K} \left(\frac{s_K}{s_H} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}, \quad (4.25a)$$

$$h^* = \frac{s_H}{s_K} \left[\frac{D_K}{s_K} \left(\frac{s_K}{s_H} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}, \quad (4.25b)$$

jeśli wykorzystamy zależność

$$\frac{k}{h} = \frac{s_K}{s_H}. \quad (4.26)$$

Po zlinearyzowaniu układu (4.22) w punkcie krytycznym (4.25) otrzymamy następującą macierz linearyzacji

$$M = \begin{bmatrix} (\alpha - 1)D & \frac{s_K}{s_H} \beta D \\ \frac{s_H}{s_K} \alpha D & (\beta - 1)D \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

oraz równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 - (\text{tr } M)\lambda + \det M = 0. \quad (4.28)$$

Wyznacznik, ślad macierzy linearyzacji M i wyróżnik równania charakterystycznego (4.28)

$$\text{tr } M = (\alpha + \beta - 2)D < 0, \quad (4.29)$$

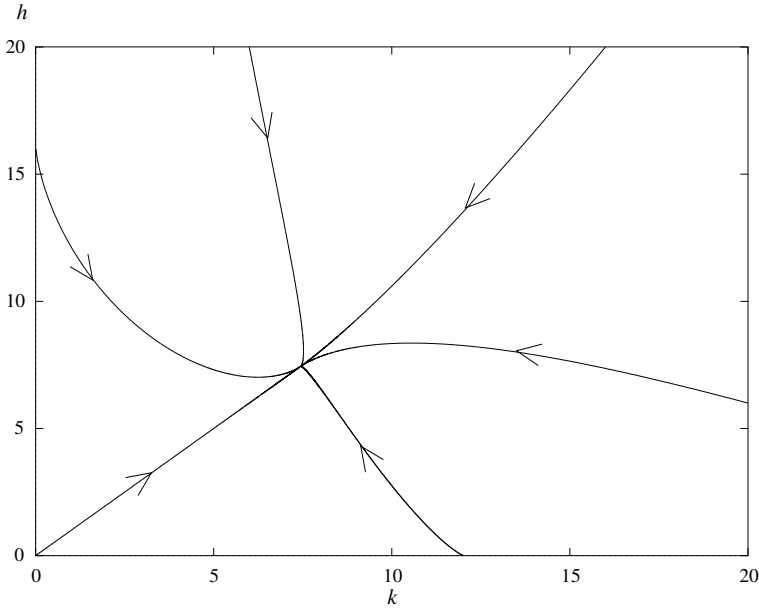
$$\det M = -(\alpha + \beta - 2)D^2 > 0, \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (\text{tr } M)^2 - 4 \det M = (\alpha + \beta - 2)^2 D^2 \\ &+ 4(\alpha + \beta - 2)D^2 > 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Wyróżnik i wyznacznik są dodatnie, więc punkt krytyczny jest węzłem. Ponieważ ślad jest ujemny, więc węzeł jest stabilny. Dla przykładowych wartości parametrów modelu portret fazowy z węzłem został przedstawiony na rysunku 4.3.

W modelu Mankiwa-Romera-Weila (Mankiw i inni, 1992) wprowadzamy opóźnienie inwestycyjne podobnie jak w modelu Solowa. Założenia modelu będą podobne. W gospodarce wytwarzany jest jeden produkt Y zgodnie z funkcją produkcji Cobb-Douglasa

$$Y(t) = K^\alpha(t) H^\beta(t) [A(t)L(t)]^{1-\alpha-\beta}, \quad (4.32)$$



Rysunek 4.3. Portret fazowy układu (4.22) dla $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,1$, $n = 0,015$, $a = 0,015$, $s_K = s_H = 0,2$ i $\delta = 0,03$.

gdzie K i H to odpowiednio kapitał rzeczowy i kapitał ludzki. Każda jednostka może być konsumowana lub przekształcona bez jakichkolwiek kosztów w jednostkę kapitału rzeczowego lub ludzkiego. Przy tym założeniu inwestycje w kapitał rzeczowy i ludzki są opisane przez tę samą funkcję produkcji, opóźnienie inwestycyjne ϑ dla obu rodzajów kapitału jest takie samo i stopa deprecjacji δ jest identyczna (produkt ulega deprecjacji w ten sam sposób, niezależnie od tego, czy jest wykorzystywany jako kapitał rzeczowy, czy kapitał ludzki)

$$\dot{K}(t) = s_K K^\alpha(t - \vartheta) H^\beta(t - \vartheta) [A(t - \vartheta) L(t - \vartheta)]^{1-\alpha-\beta} - \delta K(t), \quad (4.33a)$$

$$\dot{H}(t) = s_H K^\alpha(t - \vartheta) H^\beta(t - \vartheta) [A(t - \vartheta) L(t - \vartheta)]^{1-\alpha-\beta} - \delta H(t). \quad (4.33b)$$

Część dochodu przeznaczona na inwestycje w kapitał rzeczowy wynosi s_K i część przeznaczona na inwestycje w kapitał ludzki wynosi s_H .

Podobnie jak poprzednio zakładamy, że stopy wzrostu składowych pracy efektywnej AL są stałe i wynoszą odpowiednio a i n

$$\dot{A}(t) = aA(t), \quad (4.34a)$$

$$\dot{L}(t) = nL(t). \quad (4.34b)$$

Otrzymany układ czterech równań różniczkowych (4.33) i (4.34) możemy zredukować do postaci dwuwymiarowego układu dynamicznego, wprowadzając nowe zmienne: kapitał rzeczowy na jednostkę pracy efektywnej $k = \frac{K}{AL}$ i kapitał ludzki na jednostkę pracy efektywnej $h = \frac{H}{AL}$.

$$\dot{k}(t) = s_K E k^\alpha(t - \vartheta) h^\beta(t - \vartheta) - Dk(t), \quad (4.35a)$$

$$\dot{h}(t) = s_H E k^\alpha(t - \vartheta) h^\beta(t - \vartheta) - Dh(t), \quad (4.35b)$$

gdzie dla uproszczenia zapisu użyto nowych stałych

$$D = (n + a + \delta) \quad \text{oraz} \quad E = e^{-(n+a)\vartheta}. \quad (4.36)$$

Podobnie jak w przypadku modelu bez opóźnienia, stan stacjonarny układu (4.35) szukamy, przyrównując jego prawe strony do zera. Rozwiązaniem tego układu są dwa punkty krytyczne. Pierwszy z nich ($k_1^* = 0$ i $h_1^* = 0$) nie ma znaczenia ekonomicznego. Drugi jest określony dla następujących wartości zmiennych (dla uproszczenia indeks „2” został zaniedbany)

$$k^* = \left(\frac{s_K E}{D} \right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_H E}{D} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}, \quad (4.37a)$$

$$h^* = \left(\frac{s_K E}{D} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_H E}{D} \right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}}. \quad (4.37b)$$

Wprowadźmy nowe zmienne logarytmicznych (x_k, x_h) , takie że

$$k = e^{x_k}, \quad h = e^{x_h}, \quad (4.38)$$

wtedy układ (4.35) ma postać

$$\dot{x}_k = s_K E e^{\alpha x_k(t-\vartheta) + \beta x_h(t-\vartheta) - x_k(t)} - D, \quad (4.39a)$$

$$\dot{x}_h = s_H E e^{\alpha x_k(t-\vartheta) + \beta x_h(t-\vartheta) - x_h(t)} - D \quad (4.39b)$$

i w punkcie krytycznym nowe zmienne przyjmują wartość

$$x_k^* = \ln \left[\left(\frac{s_K E}{D} \right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_H E}{D} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \right], \quad (4.40a)$$

$$x_h^* = \ln \left[\left(\frac{s_K E}{D} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_H E}{D} \right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}} \right]. \quad (4.40b)$$

Linearyzując układ (4.39) w punkcie (4.40), otrzymujemy macierz linearyzacji

$$M = \begin{bmatrix} (\alpha e^{-\lambda\vartheta} - 1)D & \beta e^{-\lambda\vartheta} D \\ \alpha e^{-\lambda\vartheta} D & (\beta e^{-\lambda\vartheta} - 1)D \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

której ślad i wyznacznik są następujące

$$\text{tr } M = (\alpha e^{-\lambda\vartheta} - 1)D + (\beta e^{-\lambda\vartheta} - 1)D, \quad (4.42)$$

$$\det M = (1 - \alpha e^{-\lambda\vartheta} - \beta e^{-\lambda\vartheta})D^2. \quad (4.43)$$

Stąd równanie charakterystyczne $\lambda^2 - \text{tr } M\lambda + \det M = 0$ ma postać

$$\lambda^2 + C_1 e^{-\lambda\vartheta} \lambda + C_2 \lambda + C_3 e^{-\lambda\vartheta} + C_4 = 0, \quad (4.44)$$

gdzie

$$C_1 = -(\alpha + \beta)D, \quad C_2 = 2D, \quad C_3 = -(\alpha + \beta)D^2, \quad C_4 = D^2. \quad (4.45)$$

Założmy, że wartości własne macierzy linearyzacji są zespolone i mają postać $\lambda = \xi + i\omega$. Rozdzielając równanie charakterystyczne (4.44) na część rzeczywistą i urojoną, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \xi^2 - \omega^2 + C_1 e^{-\xi\vartheta} \xi \cos(\omega\vartheta) + C_1 e^{-\xi\vartheta} \omega \sin(\omega\vartheta) \\ + C_2 \xi + C_3 e^{-\xi\vartheta} \cos(\omega\vartheta) + C_4 = 0, \end{aligned} \quad (4.46a)$$

$$\begin{aligned} -2\xi\omega + C_1 e^{-\xi\vartheta} \omega \cos(\omega\vartheta) - C_1 e^{-\xi\vartheta} \xi \sin(\omega\vartheta) \\ + C_2 \omega - C_3 e^{-\xi\vartheta} \sin(\omega\vartheta) = 0. \end{aligned} \quad (4.46b)$$

Bifurkacja do orbity okresowej ma miejsce wtedy, gdy para sprzężonych wartości własnych jest czysto urojona. Wstawiamy $\xi = 0$ do układu (4.46) i otrzymujemy

$$-\omega^2 + C_1 \omega \sin(\omega\vartheta) + C_3 \cos(\omega\vartheta) + C_4 = 0, \quad (4.47a)$$

$$C_1 \omega \cos(\omega\vartheta) + C_2 \omega - C_3 \sin(\omega\vartheta) = 0. \quad (4.47b)$$

Z układu równań (4.47) wyznaczamy najpierw ω_{bi} . Podnosząc oba równania do kwadratu i dodając je stronami, otrzymamy

$$\omega^4 + (C_2^2 - C_1^2 - 2C_4)\omega^2 + C_4^2 - C_3^2 = 0. \quad (4.48)$$

Wielomian czwartego stopnia (4.48) rozwiązujemy, przyjmując nową zmienną $z = \omega^2$ i rozwiązując równanie

$$z^2 + (C_2^2 - C_1^2 - 2C_4)z + C_4^2 - C_3^2 = 0.$$

Wracając do pierwotnych parametrów α , β i D , rozwiązanie równania (4.48) ma postać

$$z = \frac{1}{2} [(\alpha + \beta - 2)D^2 \pm (\alpha + \beta)^2 D^2]. \quad (4.49)$$

Łatwo zauważyć, że dla modelu, w którym założono, iż $0 < \alpha + \beta < 1$, nie istnieją dodatnie rzeczywiste rozwiązania równania (4.49). Stąd nie istnieje rzeczywista wartość ω . W modelu nie ma więc rozwiązań okresowych powstałych w wyniku bifurkacji do orbity okresowej. Widzimy, że rozszerzenie modelu Solowa z opóźnieniem uwzględnionym tylko w funkcji produkcji, a nie w deprecjacji, o kapitał ludzki nie spowodowało kreacji cyklicznych rozwiązań.

4.4. Model Ramseya-Cassa-Koopmansa z opóźnieniem

Do tej pory zakładaliśmy, że gospodarstwa domowe oszczędzają stałą, ustaloną z góry część dochodu. Tak było w rozważanym dotychczas modelu Solowa oraz innych omawianych modelach. W modelu Solowa stopa oszczędności jest stała, co oznacza, że mamy również stały stosunek konsumpcji do dochodu. Egzogeniczność stopy oszczędności powoduje, że gospodarstwa domowe nie mogą dostosować poziomu konsumpcji i oszczędności do zmian stopy procentowej, stopy podatku dochodowego etc. Jednak gdy dochód gospodarstwa domowego nie jest stały, należy oczekiwać, że konsumpcja i oszczędności będą się zmieniać (cykl życia). Gospodarstwa domowe biorą pod uwagę wielkość konsumpcji zarówno dzisiaj, jak i w przyszłości. Wzrost przyszłej konsumpcji jest wynikiem ograniczenia bieżącej konsumpcji, ponieważ

wzrost inwestycji jest możliwy, gdy w gospodarce będzie produkowane więcej dóbr inwestycyjnych kosztem niższej produkcji dóbr konsumpcyjnych. Jest więc kwestią wyboru określenie optymalnej ścieżki wzrostu gospodarczego z punktu widzenia poziomu konsumpcji w czasie życia reprezentatywnego gospodarstwa domowego.

Przyjmijmy, że reprezentatywne gospodarstwo domowe w każdej chwili określa poziom oszczędności, biorąc pod uwagę bieżącą konsumpcję oraz przyszłą konsumpcję, która zależy od wielkości inwestycji realizowanych z ich oszczędności. Ramsey (1928) przeanalizował optymalny wybór poziomu konsumpcji i oszczędności przez gospodarstwa domowe, a następnie Cass (1965) i Koopmans (1965) rozwinęli ten model. Model Ramseya pozwala na precyzyjną analizę zmian stóp oszczędności i ich zależności od stopy procentowej, bogactwa, stóp podatkowych i subsydiów (Barro i Sala-i-Martin, 2004).

Zakładamy, że stopa wzrostu zasobu pracy jest stałą wielkością egzogeniczną i wynosi n

$$L(t) = L(0)e^{nt}. \quad (4.50)$$

Z kolei zasób wiedzy rośnie ze stałą stopą a

$$A(t) = A(0)e^{at}. \quad (4.51)$$

Gospodarstwo domowe dba nie tylko o swoją użyteczność, ale też o użyteczność przyszłych pokoleń. Dlatego gospodarstwo domowe maksymalizuje użyteczność konsumpcji na przestrzeni całego nieskończonego życia U . Oznaczmy całkowitą konsumpcję w chwili t przez $C(t)$, wtedy $c(t) = C(t)/A(t)L(t)$ to konsumpcja na jednostkę pracy efektywnej. Każde gospodarstwo domowe w chwili t osiąga użyteczność z konsumpcji $u(t)$. Wtedy użyteczność wynosi

$$U = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} u(c(t)) dt. \quad (4.52)$$

Funkcja użyteczności $u(c)$ spełnia następujące warunki: $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$. Czynniki $e^{-\rho t}$ określa, jak dyskontowana jest przyszła użyteczność. Stopa dyskontowa ρ jest większa od zera.

Przykładem funkcji użyteczności spełniającej powyższe założenia jest funkcja użyteczności CRRA (*constant relative risk aversion*)

$$u(c(t)) = \frac{c^{1-\sigma}(t) - 1}{1 - \sigma}, \quad (4.53)$$

gdzie σ to współczynnik względnej awersji do ryzyka.

Produkt wytworzony w gospodarce jest dzielony na oszczędności (odpowiadające inwestycjom brutto) i konsumpcji. Tym samym równanie akumulacji kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej ma postać

$$\dot{k}(t) = k^\alpha(t) - (n + a + \delta)k(t) - c(t). \quad (4.54)$$

Gospodarstwo domowe, maksymalizując użyteczność konsumpcji w ciągu całego życia, jest ograniczone przez możliwości produkcyjne gospodarki. Problem ten ma następującą formę

$$\max \int_0^\infty e^{nt} e^{-\rho t} u(c(t)) dt, \quad (4.55)$$

przy warunku

$$\dot{k}(t) = k^\alpha(t) - (n + a + \delta)k(t) - c(t).$$

Aby rozwiązać problem optymalizacyjny (4.55), korzystamy z zasady maksimum Pontriagina (Dixit, 1990). Hamiltonian $\mathcal{H}$ ma postać

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} u(c(t)) + \mu(t)[k^\alpha(t) - (n + a + \delta)k(t) - c(t)]. \quad (4.56)$$

Zasada maksimum pozwala nam znaleźć zmienną $c(t)$, która maksymalizuje $\mathcal{H}$ w każdej chwili t . Warunki pierwszego rzędu istnienia maksimum funkcjonału $\mathcal{H}$ mają postać

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0, \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu} = \dot{k}, \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = -\dot{\mu}, \quad (4.59)$$

z których otrzymujemy układ równań różniczkowych

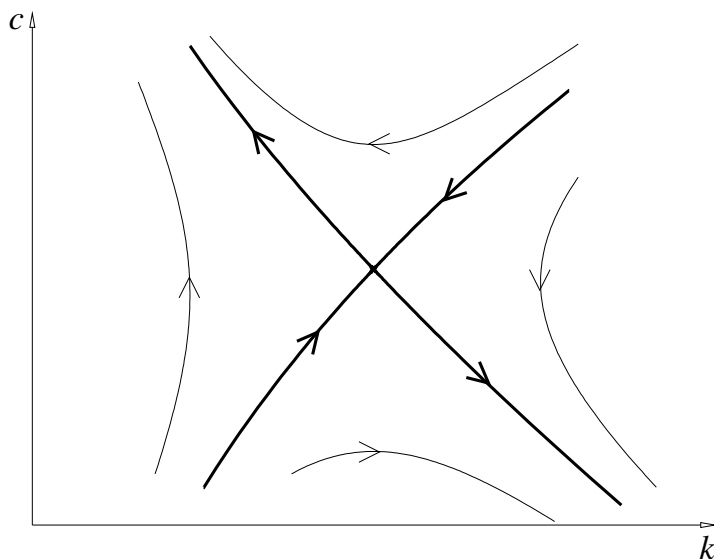
$$\dot{k}(t) = k(t)^\alpha - (n + a + \delta)k(t) - c(t), \quad (4.60a)$$

$$\dot{c}(t) = \frac{1}{\sigma}[\alpha k(t)^{\alpha-1} - (n + a + \delta) - \rho]c(t). \quad (4.60b)$$

Rozwiązanie, stan stacjonarny, jest dane przez

$$k^* = \left(\frac{\alpha}{n + a + \delta + \rho} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (4.61)$$

$$c^* = \left(\frac{\alpha}{n + a + \delta + \rho} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (n + a + \delta) \left(\frac{\alpha}{n + a + \delta + \rho} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (4.62)$$



Rysunek 4.4. Portret fazowy układu (4.60). Punkt krytyczny jest siodłem. Dwie wyróżnione trajektorie wchodzące do punktu krytycznego są ścieżkami wzrostu, po których osiągany jest stan stacjonarny.

Graficzną reprezentacją rozwiązania jest siodło na rysunku 4.4. Punkt siodłowy odpowiada zrównoważonej ścieżce wzrostu. Po osiągnięciu stanu stacjonarnego zasoby kapitału na jednostkę pracy efektywnej, konsumpcji na jednostkę pracy efektywnej i strumień produktu na jednostkę pracy efektywnej są stałe. Odmienna niż w modelu Solowa jest dynamika dochodzenia do równowagi. Ze względu na warunek (4.60b) poziom konsumpcji na jednostkę pracy efektywnej jest wybierany przez reprezentatywne gospodarstwo domowe tak, by zawsze znajdować się na jednej z dwóch trajektorii prowadzących do stanu długookresowej równowagi. W stanie stacjonarnym zasób kapitału na jednostkę pracy efektywnej rośnie wraz ze wzrostem udziału nakładów kapitału w produkcie α i maleje wraz ze wzrostem stopy wzrostu liczby pracujących n , stopy wzrostu wiedzy a , stopy deprecjacji kapitału rzeczowego δ oraz stopy dyskontowej ρ .

Rozważmy teraz sytuację, gdy do powyższego modelu wprowadzimy opóźnienie inwestycyjne. Przy identycznych założeniach co do zachowania gospodarstw domowych problem planowania w nieskończonym horyzoncie czasowym dla tej gospodarki ma postać (Asea i Zak,

1999)

$$\max_{c(t)} \int_0^\infty U(c(t)) e^{-\rho t} dt \quad (4.63)$$

przy warunku

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= f(k(t - \vartheta)) - (n + a + \delta)k(t) - c(t), \\ k(t) &= \phi(t) \quad \text{dla wszystkich } t \in [-\vartheta, 0], \end{aligned}$$

gdzie $0 < c(t) \leq f(k(t - \vartheta))$, $\delta \in [0; 1]$ oznacza stopę deprecjacji kapitału rzeczowego, $f(\cdot)$ jest neoklasyczną funkcją produkcji.

Hamiltonian dla problemu optymalizacyjnego (4.63) ma następującą postać

$$\mathcal{H} = U(c(t))e^{-\rho t} - \mu[f(k(t - \vartheta)) - \delta k(t - r) - c(t)]. \quad (4.64)$$

Warunki konieczne w tym przypadku mają postać

$$c(t)^{-\sigma} e^{-\rho t} = \lambda(t), \quad (4.65)$$

$$- \mu(t + \vartheta)(\alpha k(t)^{\alpha-1} - (n + a + \delta)) = \dot{\mu}(t), \quad (4.66)$$

gdzie $\mu(t)$ jest oznaczeniem zmiennej reprezentującej krańcową wartość kapitału rzeczowego produkowanego w chwili t , ale dostępnego w chwili $t + \vartheta$ (Collard i inni, 2004).

Z powyższych warunków otrzymujemy równanie opisujące zmianę konsumpcji

$$\dot{c}(t) = \frac{1}{\sigma} \left[(f'(k(t)) - (n + a + \delta)) \left(\frac{c(t)}{c(t + \vartheta)} \right)^\sigma e^{-\rho \vartheta} - \rho \right], \quad (4.67)$$

gdzie krańcowa produktywność kapitału dostępnego w chwili $t + \vartheta$ jest ważona przez stosunek krańcowej użyteczności konsumpcji w chwili $t + \vartheta$ do krańcowej użyteczności konsumpcji w chwili t (Collard i inni, 2004).

Przyjmując funkcję produkcji Cobb-Douglasa, model jest dany przez układ równań

$$\dot{k}(t) = k^\alpha(t - \vartheta) - (n + a + \delta)k(t) - c(t), \quad (4.68a)$$

$$\dot{c}(t) = \frac{1}{\sigma} \left[(\alpha k^{\alpha-1}(t) - (n + a + \delta)) \left(\frac{c(t)}{c(t + \vartheta)} \right)^\sigma e^{-\rho \vartheta} - \rho \right] c(t). \quad (4.68b)$$

Punkt krytyczny układu równań (4.68) jest dany jako

$$k^* = \left(\frac{\alpha}{\rho e^{\rho\vartheta} + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (4.69a)$$

$$c^* = (k^*)^\alpha - (n + a + \delta)k^*. \quad (4.69b)$$

Model Ramseya-Cassa-Koopmansa z opóźnieniem inwestycyjnym różni się od rozważanych do tej pory modeli wzrostu gospodarczego. Jest on opisany przez układ równań różniczkowych (4.68), gdzie obok równania różniczkowego z opóźnionym argumentem (4.68a) pojawia się równanie z wyprzedzonym argumentem (4.68b). Analiza matematyczna równań różniczkowych z wyprzedzonym argumentem jest trudna, ponieważ brakuje narzędzi analitycznych i numerycznych (Collard i inni, 2004; Bambi, 2008).

Również istotnym problemem jest ekonomiczna interpretacja równań z wyprzedzonym argumentem. W przypadku równania (4.68b) przyrost konsumpcji na jednostkę pracy efektywnej w chwili t zależy od konsumpcji na jednostkę pracy efektywnej w chwili $t + \vartheta$. Wydaje się, że można interpretować przyszłą konsumpcję jako oczekiwaną konsumpcję. Co więcej, wyprzedzenie związane z oczekiwaną konsumpcją jest takie same jak opóźnienie inwestycyjne.

4.5. Podsumowanie

W rozdziale zostały przedstawione trzy modele wzrostu gospodarczego: model wzrostu AK, model Mankiwa-Romera-Weila z kapitałem ludzkim, model Ramseya-Cassa-Koopmansa z optymalną konsumpcją, w których podobnie jak w poprzednim rozdziale do modelu Solowa zostało wprowadzone opóźnienie inwestycyjne.

Model AK, który jest modelem liniowym, dopuszcza rozwiązania okresowe, podobnie jak model Kaleckiego. Korzystając z metody D-podziału, pokazałem, że rozwiązania okresowe są stabilne.

W modelu Mankiwa-Romera-Weila z kapitałem ludzkim nie występują rozwiązania okresowe, powstające w wyniku bifurkacji Hopfa do cyklu granicznego. W modelu istnieje jedynie punkt krytyczny (stabilny węzeł), podobnie jak w modelu Mankiwa-Romera-Weila bez opóźnienia inwestycyjnego.

Z kolei w modelu wzrostu Ramseya-Cassa-Koopmansa z optymalizacją konsumpcji dla gospodarstw domowych z nieskończonym horyzontem czasowym wprowadzenie opóźnienia inwestycyjnego powoduje, że model ten jest opisany przez układ równań różniczkowych z opóźnionym i wyprzedzonym argumentem. Tego typu układy są rzadko spotykane w teorii ekonomii, ale mogą być ciekawym przedmiotem badań w teorii ekonomii. W niniejszej pracy model ten nie został szczegółowo omówiony, ponieważ tematem pracy jest opóźnienie inwestycyjne w modelach wzrostu gospodarczego opisane przez równania różniczkowe z opóźnionym argumentem.

Dotychczas uwzględnialiśmy w modelach wzrostu gospodarczego jedynie prywatny kapitał rzeczowy. Włączając do modelu sektor publiczny, możemy rozważyć publiczny kapitał rzeczowy finansowany z podatków i dostarczany przez rząd. Tego typu modele wzrostu gospodarczego będą przedmiotem analizy w następnym rozdziale.

Rozdział 5

Opóźnienie inwestycyjne i publiczny kapitał rzeczowy

5.1. Wprowadzenie

Celem tego rozdziału jest teoretyczna analiza wpływu polityki fiskalnej na położenie długookresowej ścieżki wzrostu gospodarczego w pewnej szczególnej klasie modeli wzrostu z publicznym kapitałem rzeczowym i opóźnieniem inwestycyjnym (Krawiec i Szydłowski, 2004; Krawiec, 2005, 2006).

W poprzednich rozdziałach były rozważane modele wzrostu gospodarczego z prywatnym kapitałem rzeczowym. Pominięty został wpływ sektora publicznego, polityki fiskalnej rządu. Rosnąca rola rządu prowokuje pytania o istnienie i charakter związku między wzrostem gospodarczym i polityką gospodarczą. Czy narzędzia polityki służące tłumieniu wahań koniunktury i stymulowaniu wzrostu gospodarczego są efektywne? Badania zarówno teoretyczne, jak i empiryczne wzrostu gospodarczego nie dają jednoznacznej odpowiedzi na pytanie o pozytywną lub negatywną rolę wydatków rządu na wzrost gospodarczy (Agell i inni, 1997; Fölster i Henrekson, 1999). Wydatki publiczne nie mają jedynie celu dystrybucyjnego lub konsumpcyjnego, ale mogą być użyte w celach produkcyjnych. W tym rozdziale będziemy rozpatrywali tylko wydatki publiczne na kapitał rzeczowy, który dla odróżnienia od prywatnego kapitału rzeczowego będziemy nazywali publicznym kapitałem rzeczowym.

Jednym z pierwszych modeli wzrostu gospodarczego z sektorem publicznym był model, w którym z podatków były finansowane publicznie dostarczane dobra prywatne (Barro, 1990). W następnej pracy Barro i Sala-i-Martin (1992) rozważali dwa inne modele wzrostu gospodarczego, w których również uwzględniono wydatki rządu. W pierw-

szym z nich dostarczane publicznie usługi były czystym dobrem publicznym, tzn. dobrem, które nie jest konkurencyjne w konsumpcji (dobro może być konsumowane przez wiele osób równocześnie) oraz nie ma możliwości wyłączenia z konsumpcji dobra (właściciel dobra nie może uniemożliwić innym osobom konsumpcji dobra). W drugim modelu występował efekt przepełnienia dla usług publicznych. Efekt przepełnienia (*congestion*) dla dóbr publicznych polega na tym, że w miarę wzrostu liczby użytkowników użyteczność dobra maleje. Innymi słowy, nie ma możliwości wyłączenia z konsumpcji dobra, ale stopniowo dobro staje się konkurencyjne w konsumpcji. Takim dobrem mogą być np. drogi. Podstawowym problemem modeli Barro była niezgodność miary czynników produkcji w funkcji produkcji, z których jeden jest zasobem (prywatny kapitał rzeczowy), a drugi strumieniem (wydatki rządu).

W funkcji produkcji Cobba-Douglasa wszystkie czynniki produkcji są zasobami; tak jak prywatny kapitał rzeczowy, publiczny kapitał rzeczowy powinien być zasobem, a nie strumieniem. Greiner (1996) przedstawił model wzrostu gospodarczego, w którym publiczny kapitał rzeczowy jest zasobem. Inwestycje w publiczny kapitał rzeczowy są finansowane z podatków. Stopa podatkowa bezpośrednio wpływa na dochód rozporządzalny gospodarstw domowych oraz na dochody podatkowe, a pośrednio na dynamikę akumulacji obu rodzajów kapitału rzeczowego.

Inny model, w którym zasób publicznego kapitału rzeczowego był czynnikiem produkcji w neoklasycznej funkcji produkcji, został przedstawiony przez Bajo-Rubio (2000), który zmodyfikował model Solowa, wprowadzając publiczny kapitał rzeczowy, z którego mogą korzystać wszyscy producenci, ale jego użyteczność maleje, w miarę jak zmniejsza się stosunek zasobu publicznego kapitału rzeczowego do zasobu prywatnego kapitału rzeczowego. Innymi słowy, mamy do czynienia z efektem przepełnienia dla publicznego kapitału rzeczowego.

Funkcja produkcji ma postać

$$Y = K^\alpha Z_1^{\beta_1} \dots Z_m^{\beta_m} (AL)^{1-\alpha-\beta_1-\dots-\beta_m} \left(\frac{G}{K}\right)^\gamma \left(\frac{T}{K}\right)^\theta, \quad (5.1)$$

gdzie K to prywatny kapitał rzeczowy, Z_i ($i = 1, \dots, m$) to inne prywatne czynniki wytwórcze (np. kapitał ludzki), L to praca, A to wie-

dza, G to dostarczane przez rząd czynniki wytwórcze, T to transfery budżetowe i $0 < \gamma + \theta < \alpha < 1$.

W modelu wzrostu gospodarczego Bajo-Rubio są dwa równania akumulacji wiedzy A i pracy L , które rosną ze stałą stopą a i n

$$\dot{A} = aA, \quad (5.2)$$

$$\dot{L} = nL, \quad (5.3)$$

oraz $m + 2$ równań akumulacji kapitału K , Z_i i G

$$\dot{K} = s_K(1 - \tau)Y - \delta K, \quad (5.4)$$

$$\dot{Z}_i = s_{Z_i}(1 - \tau)Y - \delta Z_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.5)$$

$$\dot{G} = s_G \tau Y - \delta G, \quad (5.6)$$

gdzie s_K , s_{Z_i} i s_G są oznaczeniami części oszczędności przeznaczonych odpowiednio na inwestycje w prywatny kapitał rzeczowy, na inwestycje w inne prywatne czynniki wytwórcze i na inwestycje w publiczny kapitał rzeczowy, τ jest oznaczeniem wielkości podatków, δ jest oznaczeniem stopy deprecjacji kapitału (taka sama dla wszystkich rodzajów kapitału). W modelu Bajo-Rubio mamy do czynienia z efektem przepełnienia dla dobra publicznego G . Rozmiar korzyści, które odnosi reprezentatywny producent, korzystając z dostarczanego publicznie czynnika wytwórczego, zależy od wielkości nakładu publicznego kapitału rzeczowego. Jednakże jego dostępna ilość maleje w stosunku do ilości prywatnego kapitału rzeczowego, gdy inni producenci, inwestując, zwiększają zasób tego drugiego.

Analizowane w dalszej części tego rozdziału modele wzrostu gospodarczego z publicznym kapitałem rzeczowym będą oparte na postaci neoklasycznej funkcji produkcji zaproponowanej przez Bajo-Rubio. W przedstawionych modelach wzrostu gospodarczego obok publicznego kapitału rzeczowego będzie uwzględnione opóźnienie inwestycyjne. W rozważanych modelach cechą charakterystyczną będzie to, że dla publicznego kapitału rzeczowego będzie występował efekt przepełnienia. Oznacza to, że ilość publicznie dostarczanego publicznego kapitału rzeczowego dostępnego dla producentów zależy od ilości prywatnego kapitału rzeczowego. Z drugiej strony zarówno prywatny, jak i publiczny kapitał rzeczowy jest wytwarzany w ciągu pewnego okresu, przeciętnego czasu trwania inwestycji. Sprawdzimy, czy w długim okresie w modelu będzie osiągany stan stacjonarny, czy też będzie występować cykliczne zachowanie.

5.2. Model ze stałą stopą wzrostu publicznego kapitału rzeczowego

Punktem wyjścia neoklasycznej teorii wzrostu gospodarczego jest model Solowa z prywatnym kapitałem publicznym (Solow, 1956). Bajo-Rubio (2000) rozszerzył ten model wzrostu o inne czynniki produkcji, przede wszystkim publiczny kapitał rzeczowy dostarczany przez rząd. Główną cechą tego modelu jest przepełnienie publicznego kapitału rzeczowego. Prywatny kapitał rzeczowy i publiczny kapitał rzeczowy są używane w procesie produkcji, ale dla danego poziomu publicznego kapitału rzeczowego wzrost ilości prywatnego kapitału rzeczowego zmniejsza ilość publicznego kapitału rzeczowego dostępnego dla każdego producenta.

Zakładamy neoklasyczną funkcję produkcji (5.1), zaproponowaną przez Bajo-Rubio (2000), w której dla uproszczenia uwzględnimy tylko prywatny kapitał rzeczowy K i publiczny kapitał rzeczowy G . Funkcja produkcji ma następującą formę (Krawiec, 2005, 2006)

$$Y(t) = K^\alpha(t)[A(t)L(t)]^{1-\alpha} \left[\frac{G(t)}{K(t)} \right]^\beta, \quad (5.7)$$

gdzie $0 < \beta < \alpha < 1$ oraz Y oznacza produkt, K prywatny kapitał rzeczowy, G publiczny kapitał rzeczowy, L pracę i A wiedzę.

Akumulacja prywatnego kapitału rzeczowego zależy od oszczędności gospodarstw domowych. Oszczędzana jest stała część dochodu rozporządzalnego, dochodu pomniejszonego o podatek T . Wtedy równanie na akumulację prywatnego kapitału rzeczowego ma postać

$$\dot{K}(t) = s[Y(t) - T(t)] - \delta K(t), \quad (5.8)$$

gdzie $s \in (0, 1)$ jest stałą stopą oszczędności i δ jest stopą deprecjacji prywatnego kapitału rzeczowego.

Założmy, że całość przychodów podatkowych T jest przeznaczona na inwestycje w publiczny kapitał rzeczowy G . Wielkość tych wydatków jest równa inwestycjom brutto. Inwestycje brutto możemy zapisać jako sumę inwestycji netto (przyrost zasobu publicznego kapitału rzeczowego) i inwestycji odtworzeniowych

$$T(t) = \dot{G}(t) + \delta G(t), \quad (5.9)$$

gdzie δ jest stopą deprecjacji publicznego kapitału rzeczowego, taką samą jak stopa deprecjacji prywatnego kapitału rzeczowego. Podstawiając (5.9) do (5.8), dostajemy

$$\dot{K}(t) = s[Y(t) - \dot{G}(t) - \delta G(t)] - \delta K(t). \quad (5.10)$$

Przyjmujemy, że praca L i wiedza A zmieniają się ze stałymi stopami wzrostu n i a

$$\dot{L}(t) = nL, \quad (5.11)$$

$$\dot{A}(t) = aA. \quad (5.12)$$

Przyjmijmy, że wielkość przychodów podatkowych, a tym samym wydatków inwestycyjnych na publiczny kapitał rzeczowy jest ustalona tak, by zapewnić stałą wielkość publicznego kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej. Ponieważ nakłady pracy efektywnej AL rosną ze stałą stopą $n + a$, dlatego z taką samą stopą musi rosnąć zasób rzeczowego kapitału publicznego. To założenie ma postać

$$\dot{G}(t) = (n + a)G(t). \quad (5.13)$$

Zapiszmy teraz równanie (5.8) w zmiennych na jednostkę pracy efektywnej AL . Te nowe zmienne zdefiniowane są następująco: $k = K/AL$ i $g = G/AL$. Przyrost publicznego kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej wynosi

$$\dot{g} = \frac{d}{dt} \frac{G}{AL} = \frac{\dot{G}AL - G(\dot{A}L + A\dot{L})}{(AL)^2} = (a + n)g - (a + n)g = 0. \quad (5.14)$$

Dzięki założeniu (5.13) zasób publicznego kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej g jest stały. Jest to kluczowa własność, dzięki której otrzymujemy bardzo prosty model wzrostu z prywatnym kapitałem rzeczowym na jednostkę pracy efektywnej k jako jedyną zmienną

$$\dot{k}(t) = sg^\beta k(t)^{\alpha-\beta} - (n + a + \delta)k(t) - s(n + a + \delta)g. \quad (5.15)$$

Dla przejrzystości prezentacji zdefiniujemy nową stałą

$$D = n + a + \delta \quad (5.16)$$

i wtedy równanie (5.15) przyjmie postać

$$\dot{k}(t) = sg^\beta k(t)^{\alpha-\beta} - Dk(t) - sDg. \quad (5.17)$$

Przyrównując prawą stronę równania (5.17) do zera, otrzymujemy

$$sg^{\beta}k(t)^{\alpha-\beta} = Dk(t) + sDg. \quad (5.18)$$

Zarówno lewa, jak i prawa strona równania (5.18) są monotonicznie rosnącymi funkcjami prywatnego kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej k . W zależności od ilości prywatnego i publicznego kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej mamy trzy przypadki: mogą istnieć dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie lub zero rozwiązań. Graficzne rozwiązanie zostało przedstawione na rysunku 5.1.

Założmy, że przeciętny okres realizacji inwestycji wynosi ϑ . Dla uproszczenia przyjmiemy, że odnosi się to zarówno do wytworzenia rzeczowego kapitału prywatnego K , jak i publicznego G . Inwestycje oddane do użytku w chwili t zostały rozpoczęte w chwili $t - \vartheta$ i zależą od poziomu dochodu Y w tej samej chwili, czyli od funkcji produkcji

$$Y(t - \vartheta) = K^{\alpha}(t - \vartheta)[A(t - \vartheta)L(t - \vartheta)]^{1-\alpha} \left[\frac{G(t - \vartheta)}{K(t - \vartheta)} \right]^{\beta}, \quad (5.19)$$

a równanie akumulacji prywatnego kapitału rzeczowego ma postać

$$\dot{K}(t) = s[Y(t - \vartheta) - T(t - \vartheta)] - \delta K(t), \quad (5.20)$$

gdzie inwestycje brutto to zaoszczędzona część rozporządzalnego dochodu $(Y - T)$ w chwili $t - \vartheta$. Ze względu na to, że realizacja inwestycji wymaga czasu ϑ , inwestycje zakończone w chwili t są finansowane ze środków dostępnych w chwili rozpoczęcia inwestycji $t - \vartheta$. Wielkość podatków w chwili $t - \vartheta$ jest równa inwestycjom brutto oddanym w chwili t

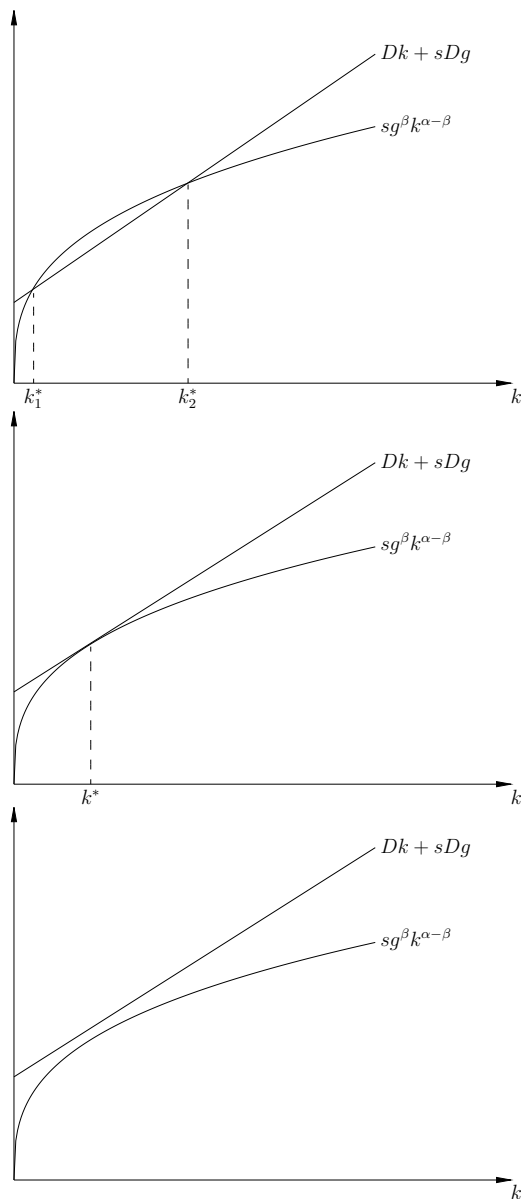
$$T(t - \vartheta) = \dot{G}(t) + \delta G(t). \quad (5.21)$$

Wprowadzamy nowe zmienne na jednostkę pracy efektywnej $y = Y/AL$, $k = K/AL$ i $g = G/AL$. Stopa wzrostu publicznego kapitału rzeczowego wynosi $n + a$ (5.13) i dlatego zasób publicznego kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej g jest stały. Przy powyższych założeniach równanie akumulacji prywatnego kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej ma postać

$$\dot{k}(t) = sEg^{\beta}k(t - \vartheta)^{\alpha-\beta} - Dk(t) - sDg, \quad (5.22)$$

gdzie dla przejrzystości zostały wprowadzone stałe

$$E = e^{-(n+a)\vartheta}, \quad D = n + a + \delta, \quad (5.23)$$



Rysunek 5.1. Graficzne rozwiązania modelu z kapitałem rzeczowym publicznym k^* . Dla stałych wartości parametrów α , β , s , $D = n + a + \delta$ otrzymano trzy wykresy dla różnych wartości publicznego kapitału rzeczowego g . Dla najmniejszej wartości g mamy dwa rozwiązania (górny wykres), dla największej wartości g model nie ma rozwiązania, dla pewnej wartości g istnieje tylko jedno rozwiązanie (rysunek środkowy).

a funkcja początkowa $\phi(t)$ jest zadana przez

$$k(t) = \phi(t) \quad \text{dla} \quad t \in [-\vartheta, 0]. \quad (5.24)$$

W celu analizy własności modelu (5.22) przeprowadźmy analizę lokalnej stabilności. Zaczniemy od znalezienia punktu krytycznego k^* równania (5.22), takiego że $\dot{k} = 0$. W punkcie krytycznym równania różniczkowego z opóźnionym argumentem $k(t) = k(t - \vartheta)$ i wtedy

$$sEg^\beta(k^*)^{\alpha-\beta} = Dk^* + sDg. \quad (5.25)$$

Następnie linearyzujemy prawą stronę równania (5.22) w punkcie krytycznym k^* . Wtedy otrzymamy

$$\dot{k}(t) = sEg^\beta(\alpha - \beta)(k^*)^{\alpha-\beta-1}(k - k^*)(t - \vartheta) - D(k - k^*)(t). \quad (5.26)$$

Równanie to opisuje zachowanie układu w otoczeniu stanu stacjonarnego.

Po wprowadzeniu nowej zmiennej $z(t) = (k - k^*)(t)$ punkt krytyczny zostaje przesunięty do początku układu współrzędnych i wtedy równanie (5.26) można przepisać w następującej formie

$$\dot{z}(t) = sEg^\beta(\alpha - \beta)(k^*)^{\alpha-\beta-1}z(t - \vartheta) - Dz(t). \quad (5.27)$$

W celu stwierdzenia, czy istnieją rozwiązania cykliczne, rozważmy równanie charakterystyczne modelu (5.27), które otrzymamy przez podstawienie rozwiązania $z(t) = e^{\lambda t}$ do równania (5.27). Równanie charakterystyczne, którego rozwiązaniami są wartości własne λ , ma postać

$$\lambda - Ce^{-\lambda\vartheta} + D = 0, \quad (5.28)$$

gdzie $C = sEg^\beta(\alpha - \beta)(k^*)^{\alpha-\beta-1}$ i $D = n + a + \delta$.

Istnieje wiele mechanizmów, które prowadzą do cyklicznego zachowania w układach dynamicznych. Wśród nich mechanizmy bifurkacyjne odgrywają specjalną rolę. Jednym z nich jest bifurkacja Hopfa, opisana przez twierdzenie Poincarégo-Andronova-Hopfa (PAH), które określa warunki konieczne, by otrzymać rozwiązanie okresowe poprzez bifurkację do cyklu granicznego. Mechanizm ten występuje również dla układów opisanych równaniami różniczkowymi z opóźnionym argumentem.

Udowodnijmy istnienie endogenicznych cykli w równaniu (5.27), korzystając z uogólnionego twierdzenia PAH do przypadku funkcjonalnych równań różniczkowych.

Pierwszym krokiem jest znalezienie wartości parametru opóźnienia $\vartheta = \vartheta_{\text{bif}}$, dla której następuje bifurkacja. W tym celu wystarczy wykazać istnienie tylko jednej pary zespolonych sprzężonych rozwiązań równania (5.28) $(\lambda, \bar{\lambda})$.

Dla zespolonych wartości własnych $\lambda = \xi + i\omega$, stosując formułę Eulera i rozkładając równanie charakterystyczne (5.28) na część rzeczywistą i urojoną, otrzymujemy

$$\xi - Ce^{-\xi\vartheta} \cos \omega\vartheta + D = 0, \quad (5.29a)$$

$$\omega + Ce^{-\xi\vartheta} \sin \omega\vartheta = 0. \quad (5.29b)$$

Dla uproszczenia dalszych rozważań zauważmy, że układ równań (5.29) posiada symetrię odbicia względem zmiany $\omega \rightarrow -\omega$; wtedy zarówno $\lambda = \xi + i\omega$, jak i $\bar{\lambda} = \xi - i\omega$ są rozwiązaniami układu (5.29). Dlatego też bez utraty ogólności możemy założyć, że $\omega > 0$.

Cykle Hopfa pojawiają się, gdy para pierwiastków układu równań (5.29) jest czysto urojona, tzn. $\xi = 0$. Wtedy układ równań (5.29) redukuje się do następującej postaci

$$-C \cos \omega\vartheta - D = 0, \quad (5.30a)$$

$$\omega + C \sin \omega\vartheta = 0. \quad (5.30b)$$

Podnosząc do kwadratu równanie (5.30a) i równanie (5.30b), oraz dodając je stronami, otrzymujemy

$$\omega^2 = C^2 - D^2 \quad (5.31)$$

i ostatecznie

$$\omega_{\text{bif}} = \sqrt{C^2 - D^2}. \quad (5.32)$$

Wartość rzeczywista urojonej części wartości własnej ω_{bif} , a tym samym para zespolonych sprzężonych wartości własnych istnieją, gdy spełniony jest warunek $C^2 > D^2$. Jeśli jest odwrotnie, jest to warunek wystarczający nieistnienia rozwiązań cyklicznych.

Ponieważ stałe C i D są dodatnie, stąd warunkiem wystarczającym istnienia rzeczywistej wartości ω_{bif} jest, by $C > D$. Po przekształce-

niach algebraicznych otrzymujemy, że ten warunek jest spełniony, gdy wartość k^* w punkcie krytycznym jest ograniczona z góry

$$k^* < \frac{(\alpha - \beta)sg}{1 - \alpha + \beta} < 0,05g, \quad (5.33)$$

jeżeli podstawimy wartości $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,1$ i $s = 0,2$.

Wtedy wartość bifurkacyjna parametru opóźnienia wynosi

$$\vartheta_{\text{bif}} = \frac{1}{\omega_{\text{bif}}} \arctg \left(\frac{\omega_{\text{bif}}}{D} \right). \quad (5.34)$$

Następnie sprawdzamy warunek transversalności. W tym celu różniczkujemy równanie charakterystyczne (5.28) po parametrze opóźnienia ϑ

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} + Ce^{-\lambda \vartheta} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} \vartheta + \lambda \right) = 0. \quad (5.35)$$

Wykorzystując ponownie równanie charakterystyczne, podstawiamy za $Ce^{-\lambda \vartheta}$ wyrażenie $\lambda + D$ i otrzymujemy

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} = -\frac{(\lambda + D)\lambda}{1 + (\lambda + D)\vartheta}. \quad (5.36)$$

Dla czysto urojonej wartości własnej $\lambda = i\omega$ bierzemy część rzeczywistą tej pochodnej

$$\operatorname{Re} \frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} \Big|_{\xi=0} = \frac{\omega^2}{(1 + D\lambda)^2 + (\omega\vartheta)^2} > 0. \quad (5.37)$$

W ten sposób zakończyliśmy dowód istnienia cykli granicznych w modelu wzrostu z kapitałem rzeczowym publicznym i opóźnieniem inwestycyjnym.

Widzimy, że cykle wystąpią w tym modelu i mają one charakter cykli granicznych powstałych z bifurkacji Hopfa, jeśli publiczny kapitał rzeczowy będzie dominował nad kapitałem rzeczowym prywatnym w stanie stacjonarnym. Gdy warunek $C > D$ nie będzie spełniony, nie będą istnieć zespolone wartości własne, a wartości własne będą rzeczywiste. Na zakończenie analizy tego modelu zajmijmy się tym przypadkiem. Równanie charakterystyczne ma postać

$$\lambda - Ce^{-\lambda \vartheta} + D = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.38)$$

Aby znaleźć rozwiązanie graficzne równania (5.38), zapiszmy je w następującej postaci

$$Ce^{-\lambda\vartheta} = \lambda + D. \quad (5.39)$$

Rozwiązaniem będą punkty przecięcia wykresów funkcji po lewej i prawej stronie równości (5.39). Ponieważ C jest dodatnie, będzie istnieć pojedyncze rozwiązanie rzeczywiste. Gdy $D < C$, istnieje rozwiązanie dla dodatniej wartości własnej i wówczas stan stacjonarny jest niestabilny. Dla $C < D$ istnieje rozwiązanie dla ujemnej wartości własnej i wówczas stan stacjonarny jest stabilny. Widzimy, że gdy

$$k^* > \frac{(\alpha - \beta)sg}{1 - \alpha + \beta}, \quad (5.40)$$

wówczas stan stacjonarny jest stabilny. Dla przykładowych wartości parametrów $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,1$ i $s = 0,2$ otrzymujemy warunek istnienia stanu stacjonarnego w modelu wzrostu gospodarczego ze stałą stopą wzrostu publicznego kapitału rzeczowego i opóźnieniem inwestycyjnym (5.15)

$$k^* > 0,05g. \quad (5.41)$$

W modelu (5.22) zostanie więc osiągnięty stabilny stan stacjonarny, gdy zasób prywatnego kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej będzie większy niż 0,05 zasobu publicznego kapitału rzeczowego.

5.3. Model ze stałą stopą podatkową

W tym podrozdziale zostanie przedstawiony model z publicznym kapitałem rzeczowym, w którym stopa podatkowa będzie stała. W gospodarce korzystamy z dwóch rodzajów kapitału rzeczowego, prywatnego i publicznego, oraz pracy i wiedzy. Przyjmujemy, że funkcja produkcji ma postać Cobba-Douglasa

$$Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha} \left(\frac{G}{K} \right)^\beta, \quad (5.42)$$

gdzie K jest oznaczeniem prywatnego kapitału rzeczowego, G publicznego kapitału rzeczowego, A wiedzą i L pracą. Jeśli wprowadzimy zmienne na jednostkę efektywnej pracy $y = Y/AL$, $k = K/AL$, $g = G/AL$, to funkcja produkcji będzie miała postać

$$y = k^{\alpha-\beta} g^\beta. \quad (5.43)$$

Równania na akumulację prywatnego i publicznego kapitału rzeczowego mają postać

$$\dot{K}(t) = s(1 - \tau)Y(t) - \delta K(t), \quad (5.44a)$$

$$\dot{G}(t) = \tau Y(t) - \delta G(t), \quad (5.44b)$$

gdzie τ oznacza stopę podatku dochodowego, a δ to stopa deprecjacji rzeczowego kapitału prywatnego i publicznego.

Jeśli założymy, że wiedza i praca rosną wykładniczo ze stałymi stopami a i g , tzn. $\dot{A} = aA$ i $\dot{L} = nL$, to równania na akumulację kapitału rzeczowego w zmiennych na jednostkę pracy efektywnej mają postać

$$\dot{k}(t) = s(1 - \tau)k^{\alpha-\beta}(t)g^{\beta}(t) - Dk(t) \quad (5.45a)$$

$$\dot{g}(t) = \tau k^{\alpha-\beta}(t)g^{\beta}(t) - Dg(t), \quad (5.45b)$$

gdzie dla uproszczenia zapisu przyjmujemy $D = n + a + \delta$.

W modelu (5.45) istnieją dwa punkty krytyczne. Pierwszy z nich $k(t) = 0$ i $g(t) = 0$ jest nieistotny z ekonomicznego punktu widzenia, z kolei drugi określa stan stacjonarny

$$k^* = \left[\frac{s(1 - \tau)}{D} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{\tau}{s(1 - \tau)} \right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}}, \quad (5.46a)$$

$$g^* = \left[\frac{s(1 - \tau)}{D} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{\tau}{s(1 - \tau)} \right]^{\frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha}}. \quad (5.46b)$$

Stosunek prywatnego kapitału rzeczowego do publicznego kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym wynosi

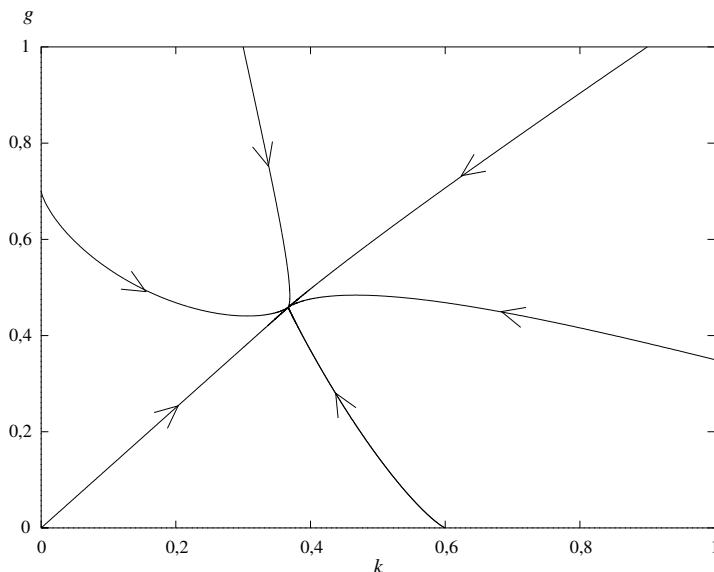
$$\frac{k^*}{g^*} = \frac{s(1 - \tau)}{\tau}. \quad (5.47)$$

Z równania (5.43) wynika, że poziom produkcji na jednostkę pracy efektywnej w stanie stacjonarnym wynosi

$$y^* = (k^*)^{\alpha} \left(\frac{g^*}{k^*} \right)^{\beta}. \quad (5.48)$$

Charakter tego punktu krytycznego określimy, analizując macierz linearyzacji układu równań (5.45) w punkcie (k^*, g^*)

$$M = \begin{bmatrix} (\alpha - \beta - 1)D & \frac{(1-\tau)}{\tau}\beta D \\ \frac{\tau}{1-\tau}(\alpha - \beta)D & (\beta - 1)D \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$



Rysunek 5.2. Portret fazowy dla modelu wzrostu z kapitałem rzeczowym publicznym (5.45).

Równanie charakterystyczne ma postać

$$\lambda^2 - (\text{tr } M)\lambda + \det M = 0. \quad (5.50)$$

Wyróżnik równania charakterystycznego wynosi

$$\Delta = (\text{tr } M)^2 - 4 \det M = \alpha(\alpha + 2)D^2 \quad (5.51)$$

i jest on zawsze dodatni ze względu na założenie $0 < \beta < \alpha < 1$. Z tego samego założenia wynika, że ślad jest zawsze ujemny i wyznacznik dodatni

$$\text{tr } M = (\alpha - 2)D < 0, \quad (5.52)$$

$$\det M = (1 - \alpha)D^2 > 0. \quad (5.53)$$

Wyznacznik macierzy linearyzacji jest dodatni, co oznacza, że punkt krytyczny jest węzłem, który jest stabilny, ponieważ ślad wyznacznika jest ujemny. Rozwiązanie to jest pokazane na rysunku 5.2.

Wielkość zasobu prywatnego i publicznego kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej oraz produkcji na jednostkę pracy efek-

tywnej w stanie stacjonarnym zależy od stopy podatkowej τ . Jej optymalną wielkość otrzymamy, różniczkując (5.46) i (5.43) względem parametru τ

$$\frac{\partial k^*}{\partial \tau} = 0 \quad \implies \quad \tau_{\text{opt},k} = \beta, \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial g^*}{\partial \tau} = 0 \quad \implies \quad \tau_{\text{opt},g} = 1 - \alpha + \beta, \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial \tau} = 0 \quad \implies \quad \tau_{\text{opt},y} = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (5.56)$$

W zależności od wielkości, którą optymalizujemy, optymalne stopy podatkowe są różne. Gdy maksymalizujemy zasób prywatnego kapitału rzeczowego w gospodarce, stopa podatkowa jest najniższa. Wyższa stopa podatkowa musi być wybrana, gdy maksymalizujemy wielkość produkcji i tym samym konsumpcji. W przypadku gdy rząd chciałby maksymalizować wielkość publicznego kapitału rzeczowego, stopa podatkowa jest najwyższa. Zbyt wysoka stopa podatkowa (większa niż β/α) i zbyt duży zasób publicznego kapitału rzeczowego prowadzą do niższej konsumpcji w gospodarce znajdującej się w stanie stacjonarnym.

W rozważanym do tej pory modelu zakładaliśmy, że inwestycje są realizowane natychmiastowo. Zmodyfikujmy model i przyjmijmy, że realizacja inwestycji kapitałowych, tak w przypadku kapitału rzeczowego prywatnego, jak i publicznego, wymaga czasu. Dla uproszczenia założmy, że budowa prywatnego i publicznego kapitału rzeczowego wymaga tego samego okresu ϑ .

Równania na akumulację kapitału rzeczowego prywatnego i publicznego mają postać

$$\dot{K}(t) = s(1 - \tau)Y(t - \vartheta) - \delta K(t), \quad (5.57a)$$

$$\dot{G}(t) = \tau Y(t - \vartheta) - \delta G(t), \quad (5.57b)$$

gdzie τ oznacza stopę podatku dochodowego, δ stopę deprecjacji rzeczowego kapitału prywatnego i publicznego oraz $t - \vartheta$ czas rozpoczęcia inwestycji kapitałowych. Parametr ϑ jest średnim czasem realizacji inwestycji w gospodarce.

Podobnie jak poprzednio, zakładamy, że funkcja produkcji jest dana równaniem (5.42), a wiedza A i praca L rosną ze stałymi stopami wzrostu odpowiednio a i n . Wprowadźmy nowe zmienne na jednostkę

pracy efektywnej AL , $k = K/AL$ i $g = G/AL$, wtedy układ równań (5.57) przyjmuje postać

$$\dot{k}(t) = Es(1 - \tau)k^{\alpha-\beta}(t - \vartheta)g^{\beta}(t - \vartheta) - Dk(t), \quad (5.58a)$$

$$\dot{g}(t) = E\tau k^{\alpha-\beta}(t - \vartheta)g^{\beta}(t - \vartheta) - Dg(t), \quad (5.58b)$$

gdzie dla uproszczenia zapisu przyjmujemy

$$E = e^{-(n+a)\vartheta}, \quad D = n + a + \delta. \quad (5.59)$$

Punkty krytyczne nie są identyczne jak w przypadku modelu bez opóźnienia. Oprócz trywialnego rozwiązania, gdy w gospodarce nie ma ani kapitału rzeczowego prywatnego, ani publicznego $k_1^* = 0$ i $g_1^* = 0$, istnieje drugie rozwiązanie (indeks „2” opuszczamy)

$$k^* = \left[\frac{Es(1 - \tau)}{D} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{\tau}{s(1 - \tau)} \right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}}, \quad (5.60a)$$

$$g^* = \left[\frac{Es(1 - \tau)}{D} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{\tau}{s(1 - \tau)} \right]^{\frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha}}. \quad (5.60b)$$

Rozwiązanie to opisuje stan stacjonarny, w którym zarówno zasoby rzeczowego kapitału prywatnego, jak i rzeczowego kapitału publicznego na jednostkę pracy efektywnej są stałe. Zbadajmy, jaki charakter ma dynamika modelu w otoczeniu stanu stacjonarnego. W tym celu skorzystamy z metody wyznaczania macierzy linearyzacji przedstawionej w pracy Bambiego i Licandro (2004). Najpierw wprowadźmy nowe zmienne x i y , takie że

$$k = e^x, \quad g = e^y. \quad (5.61)$$

Wtedy układ równań modelu (5.58) przyjmie postać

$$\dot{x}(t) = Es(1 - \tau)e^{(\alpha-\beta)x(t-\vartheta)-x(t)+\beta y(t-\vartheta)} - D, \quad (5.62a)$$

$$\dot{y}(t) = E\tau e^{(\alpha-\beta)x(t-\vartheta)+\beta y(t-\vartheta)-y(t)} - D. \quad (5.62b)$$

W stanie stacjonarnym nowe zmienne x i y mają wartość

$$x^* = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \left(\frac{Es(1 - \tau)}{D} \right) + \frac{\beta}{1 - \alpha} \ln \left(\frac{\tau}{s(1 - \tau)} \right), \quad (5.63a)$$

$$y^* = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \left(\frac{Es(1 - \tau)}{D} \right) + \frac{1 - (\alpha - \beta)}{1 - \alpha} \ln \left(\frac{\tau}{s(1 - \tau)} \right). \quad (5.63b)$$

Macierz linearyzacji układu (5.62) w punkcie krytycznym (5.63) otrzymujemy, różniczkując równania układu (5.58). W tym celu, aby zróżniczkować zmienną x w chwili $t - \vartheta$ względem tej samej zmiennej w chwili t , korzystamy z przybliżenia $x(t - \vartheta) = e^{\lambda(t-\vartheta)}$ i $x(t) = e^{\lambda t}$ w punkcie krytycznym. Dla uproszczenia oznaczmy $S = s(1 - \tau)$, wtedy

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{x}(t)}{\partial x(t)} &= ES \left[(\alpha - \beta) \frac{\partial x(t - \vartheta)}{\partial x(t)} \Big|_{x^*} - 1 \right] e^{(\alpha - \beta)x(t - \vartheta)|_{x^*} - x(t)|_{x^*} + \beta y(t - \vartheta)|_{y^*}} \\
 &= ES \left[(\alpha - \beta) \frac{\partial e^{\lambda(t - \vartheta)}}{\partial e^{\lambda t}} \Big|_{x^*} - 1 \right] e^{(\alpha - \beta)x(t - \vartheta)|_{x^*} - x(t)|_{x^*} + \beta y(t - \vartheta)|_{y^*}} \\
 &= ES[(\alpha - \beta)e^{-\lambda\vartheta} - 1](k^*)^{\alpha - \beta}(k^*)^{-1}(g^*)^\beta \\
 &= ES[(\alpha - \beta)e^{-\lambda\vartheta} - 1] \left[\frac{ES}{D} \right]^{-1} \left[\frac{\tau}{S} \right]^0 \\
 &= [(\alpha - \beta)e^{-\lambda\vartheta} - 1]D.
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{x}(t)}{\partial y(t)} &= ES\beta \frac{\partial y(t - \vartheta)}{\partial y(t)} \Big|_{y^*} e^{(\alpha - \beta)x(t - \vartheta)|_{x^*} - x(t)|_{x^*} + \beta y(t - \vartheta)|_{y^*}} \\
 &= ES\beta \frac{\partial e^{\lambda(t - \vartheta)}}{\partial e^{\lambda t}} \Big|_{y^*} e^{(\alpha - \beta)x(t - \vartheta)|_{x^*} - x(t)|_{x^*} + \beta y(t - \vartheta)|_{y^*}} \\
 &= ES\beta e^{-\lambda\vartheta}(k^*)^{\alpha - \beta}(k^*)^{-1}(g^*)^\beta \\
 &= ES\beta e^{-\lambda\vartheta} \left[\frac{ES}{D} \right]^{-1} \left[\frac{\tau}{S} \right]^0 \\
 &= \beta e^{-\lambda\vartheta} D.
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial x(t)} &= ES(\alpha - \beta) \frac{\partial x(t - \vartheta)}{\partial x(t)} \Big|_{x^*} e^{(\alpha - \beta)x(t - \vartheta)|_{x^*} - x(t)|_{x^*} + \beta y(t - \vartheta)|_{y^*}} \\
 &= ES(\alpha - \beta) \frac{\partial e^{\lambda(t - \vartheta)}}{\partial e^{\lambda t}} \Big|_{x^*} e^{(\alpha - \beta)x(t - \vartheta)|_{x^*} - x(t)|_{x^*} + \beta y(t - \vartheta)|_{y^*}} \\
 &= ES(\alpha - \beta)e^{-\lambda\vartheta}(k^*)^{\alpha - \beta}(k^*)^{-1}(g^*)^\beta \\
 &= ES(\alpha - \beta)e^{-\lambda\vartheta} \left[\frac{ES}{D} \right]^{-1} \left[\frac{\tau}{S} \right]^0 \\
 &= (\alpha - \beta)e^{-\lambda\vartheta} D.
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial y(t)} &= ES \left[\beta \frac{\partial y(t-\vartheta)}{\partial y(t)} \Big|_{y^*} - 1 \right] e^{(\alpha-\beta)x(t-\vartheta)|_{x^*} - x(t)|_{x^*} + \beta y(t-\vartheta)|_{y^*}} \\
&= ES \left[\beta \frac{\partial e^{\lambda(t-\vartheta)}}{\partial e^{\lambda t}} \Big|_{x^*} - 1 \right] e^{(\alpha-\beta)x(t-\vartheta)|_{x^*} - x(t)|_{x^*} + \beta y(t-\vartheta)|_{y^*}} \\
&= ES(\beta e^{-\lambda\vartheta} - 1)(k^*)^{\alpha-\beta}(k^*)^{-1}(g^*)^\beta \\
&= ES(\beta e^{-\lambda\vartheta} - 1) \left[\frac{ES}{D} \right]^{-1} \left[\frac{\tau}{S} \right]^0 \\
&= (\beta e^{-\lambda\vartheta} - 1)D.
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Macierz linearyzacji ma postać

$$M = \begin{bmatrix} [(\alpha - \beta)e^{-\lambda\vartheta} - 1]D & \beta e^{-\lambda\vartheta} D \\ (\alpha - \beta)e^{-\lambda\vartheta} D & (\beta e^{-\lambda\vartheta} - 1)D \end{bmatrix}. \tag{5.68}$$

Równanie charakterystyczne

$$h(\lambda) = \lambda^2 - (\text{tr } M)\lambda + \det M = 0 \tag{5.69}$$

jest w tym przypadku równaniem transcendentnym

$$\lambda^2 + C_1 e^{-\lambda\vartheta} \lambda + C_2 \lambda + C_3 e^{-\lambda\vartheta} + C_4 = 0, \tag{5.70}$$

gdzie dla uproszczenia zapisu wprowadziliśmy oznaczenia

$$C_1 = -\alpha D < 0, \tag{5.71}$$

$$C_2 = 2D > 0, \tag{5.72}$$

$$C_3 = -\alpha D^2 < 0, \tag{5.73}$$

$$C_4 = D^2 > 0. \tag{5.74}$$

Założmy, że wartości własne równania charakterystycznego (5.70) są zespolone $\lambda = \xi + i\omega$. Następnie rozpisujemy to równanie charakterystyczne na część rzeczywistą i urojoną

$$\begin{aligned}
&\xi^2 - \omega^2 + C_1 e^{-\xi\vartheta} \xi \cos(\omega\vartheta) + C_1 e^{-\xi\vartheta} \omega \sin(\omega\vartheta) \\
&\quad + C_2 \xi + C_3 e^{-\xi\vartheta} \cos(\omega\vartheta) + C_4 = 0,
\end{aligned} \tag{5.75a}$$

$$\begin{aligned}
&2\xi\omega + C_1 e^{-\xi\vartheta} \omega \cos(\omega\vartheta) - C_1 e^{-\xi\vartheta} \xi \sin(\omega\vartheta) \\
&\quad + C_2 \omega - C_3 e^{-\xi\vartheta} \sin(\omega\vartheta) = 0.
\end{aligned} \tag{5.75b}$$

Podstawiając $\xi = 0$, otrzymujemy

$$-\omega^2 + C_1\omega \sin \omega\vartheta + C_3 \cos \omega\vartheta + C_4 = 0, \quad (5.76a)$$

$$C_1\omega \cos \omega\vartheta + C_2\omega - C_3 \sin \omega\vartheta = 0. \quad (5.76b)$$

Układ równań (5.76) zapisujemy w następujący sposób

$$C_1\omega \sin \omega\vartheta + C_3 \cos \omega\vartheta = \omega^2 - C_4, \quad (5.77a)$$

$$C_1\omega \cos \omega\vartheta - C_3 \sin \omega\vartheta = -C_2\omega, \quad (5.77b)$$

następnie każde z równań podnosimy do kwadratu, dodajemy stronami i otrzymujemy równanie

$$\omega^4 + (-C_1^2 + C_2^2 - 2C_4)\omega^2 - C_3^2 + C_4^2 = 0. \quad (5.78)$$

Równanie (5.78) jest wielomianem czwartego stopnia i szukamy jego rzeczywistych rozwiązań. Jak łatwo sprawdzić, założone wartości parametrów modelu nie dopuszczają takiego rozwiązania. Niech $z = \omega^2$, wtedy równanie (5.78) ma postać

$$z^2 + (-C_1^2 + C_2^2 - 2C_4)z - C_3^2 + C_4^2 = 0. \quad (5.79)$$

Dostajemy następującą formułę na pierwiastki tego równania

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}[(\alpha - 2)D^2 \pm \alpha^2 D^2]. \quad (5.80)$$

Założenie o funkcji produkcji stanowi, że $0 < \alpha < 1$, stąd pierwiastki $z_{1,2} < 0$ i rozwiązania $\omega = \sqrt{z}$ są zespolone. Nie zostało spełnione założenie twierdzenia o bifurkacji Hopfa, że istnieją czysto urojone wartości własne równania charakterystycznego i dlatego nie występują w modelu rozwiązania okresowe.

Pozostaje sprawdzić istnienie rozwiązań rzeczywistych dla równania charakterystycznego (5.70)

$$\lambda^2 + C_1 e^{-\lambda\vartheta} \lambda + C_2 \lambda + C_3 e^{-\lambda\vartheta} + C_4 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.81)$$

Po pierwsze zauważamy, że $\lambda = 0$ jest szczególnym rozwiązaniem tego równania, gdy $C_3 = -C_4$, czyli $\alpha + \beta = 1$. Taki przypadek jest wykluczony, ponieważ $\alpha + \beta < 1$ z założenia nałożonego na funkcję produkcji, która charakteryzuje się malejącymi przychodami skali.

Przypomnijmy, że cztery parametry C_i są wyrażone przez stałe α , β i $D = n + a + \delta < 1$. Oznacza to, że stałe C_3 i C_4 zależne kwadratu D są małą poprawką w porównaniu z członami związanymi ze stałymi C_1 i C_2 zależnymi liniowo od D . Dlatego w analizie rzeczywistych wartości własnych pominiemy w równaniu charakterystycznym człony związane z parametrami C_3 i C_4 . Ostatecznie uzyskujemy równanie charakterystyczne o postaci

$$\lambda^2 + C_1 e^{-\lambda\vartheta} \lambda + C_2 \lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (5.82)$$

czyli

$$\lambda + C_1 e^{-\lambda\vartheta} + C_2 = 0. \quad (5.83)$$

Wychodząc od równania (5.83), możemy w prosty sposób przedstawić kryteria dopuszczalności rozwiązań rzeczywistych. Tak jak wcześniej przeprowadzimy analizę graficzną. Na tym samym wykresie umieścimy wykresy funkcji stojących po lewej i prawej stronie równości, ponieważ $C_1 < 0$

$$|C_1| e^{-\lambda\vartheta} = \vartheta + C_2, \quad C_2 > 0. \quad (5.84)$$

Należy odróżnić dwa przypadki w zależności od tego, czy C_2 jest większe lub mniejsze od $|C_1|$. W pierwszym przypadku, gdy $C_2 < |C_1|$, istnieje pojedyncza dodatnia wartość własna. W drugim przypadku, gdy $C_2 > |C_1|$, będzie istnieć pojedyncza ujemna wartość własna, co oznacza, że stan stacjonarny jest stabilny.

Podsumowując, gdy spełniony jest warunek

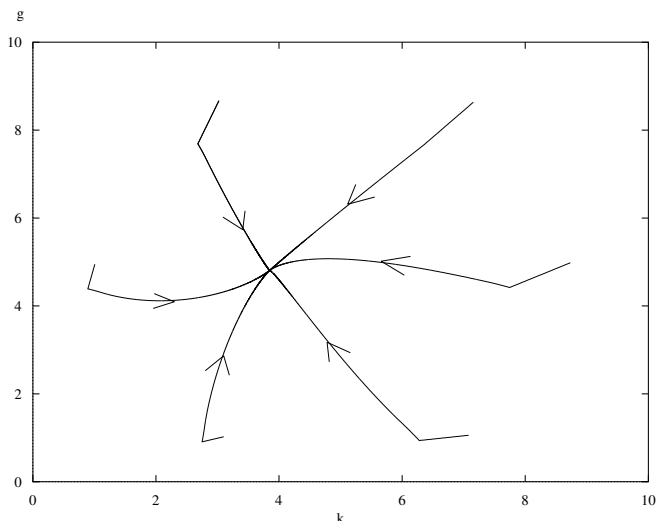
$$\alpha + \beta < 2, \quad (5.85)$$

to osiągany stan stacjonarny jest stabilny, czyli przy naszych założeniach odnośnie do funkcji produkcji i przyjętego przybliżenia $D^2 < 1$ stan stacjonarny jest zawsze stabilny.

Portret fazowy dla rozważanego modelu jest przedstawiony na rysunku 5.3. Funkcje początkowe były stałe, co wpływa najbardziej na trajektorię całkowaną w przedziale czasu $(0, \vartheta)$; z upływem czasu funkcje początkowe mają coraz mniejszy wpływ na przebieg trajektorii i ostatecznie nie mają wpływu na stan stacjonarny.

5.4. Podsumowanie

W tym rozdziale analizowaliśmy modele wzrostu gospodarczego z prywatnym i publicznym rzeczowym kapitałem publicznym. Rozróż-



Rysunek 5.3. Portret fazowy dla modelu (5.58). Pokazano kilka przykładowych trajektorii dążących do stabilnego węzła. Przyjęto następujące wartości parametrów $s = 0,2$; $\tau = 0,2$, $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,1$, $D = n + a + \delta = 0,1$ i opóźnienie $\vartheta = 2$. Funkcje początkowe były stałe.

nienie między prywatnym i publicznym kapitałem rzeczowym pozwoliło na uwzględnienie w modelu polityki fiskalnej. Polega ona na tym, że środki uzyskane z podatków są w całości przeznaczone na finansowanie inwestycji, które powiększają zasób publicznego kapitału rzeczowego. Badałem dwa modele wzrostu gospodarczego z publicznym kapitałem rzeczowym. Pierwszym był model ze stałą stopą wzrostu publicznego kapitału rzeczowego, a drugim model ze stałą stopą podatkową.

W modelu wzrostu gospodarczego ze stałą stopą wzrostu publicznego kapitału rzeczowego (5.22) zasób publicznego kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej jest stały. W modelu tym może wystąpić stan stacjonarny lub rozwiązanie cykliczne. Stabilny stan stacjonarny zostanie osiągnięty, gdy zasób prywatnego kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej będzie znacząco większy niż zasób publicznego kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej.

W modelu wzrostu ze stałą stopą podatkową zostały obliczone optymalne stopy podatkowe maksymalizujące zasób prywatnego kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej, zasób publicznego kapitału rzeczowego na jednostkę pracy efektywnej i strumień produk-

tu na jednostkę pracy efektywnej w stanie stacjonarnym. W modelu osiągany jest tylko stan stacjonarny. Rozwiązanie cykliczne nie istnieje pomimo uwzględnienia opóźnienia inwestycyjnego w produkcji dóbr kapitałowych.

Zakończenie

W niniejszej pracy pokazałem wpływ opóźnienia inwestycyjnego na dynamikę kilku modeli cyklu koniunkturalnego i modeli wzrostu gospodarczego. Modele te są opisane ciągłymi równaniami różniczkowymi z opóźnionym argumentem. Uwzględnienie opóźnienia inwestycyjnego prowadzi do rozwiązań modeli ekonomicznych, które albo ilościowo, albo jakościowo różnią się od ich odpowiedników bez opóźnienia. Obok rozwiązań typu stanu stacjonarnego pojawiają się rozwiązania cykliczne.

Tinbergen i Kalecki, wykorzystując teorię równań różniczkowych z opóźnionym argumentem, stworzyli pierwsze matematyczne modele cyklu koniunkturalnego, w których uwzględnili opóźnienie związane z procesem inwestycyjnym. Pokazali oni, że opóźnienie inwestycyjne jest czynnikiem odpowiedzialnym za występowanie cyklicznych wahań w gospodarce. Cykle te mają endogeniczny charakter. Wiele zjawisk ekonomicznych, w których występują różnego typu opóźnienia, poddają się tego typu opisowi. Modele Tinbergena i Kaleckiego były liniowymi modelami cykli koniunkturalnych i od ich omówienia rozpocząłem analizę opóźnienia inwestycyjnego.

Głównym zadaniem pracy było zbadanie wpływu opóźnienia inwestycyjnego na długookresową równowagę w modelach wzrostu gospodarczego na przykładzie wybranych modeli. W tym celu przedstawiłem model wzrostu (Krawiec, 2003) będący modyfikacją modelu cyklu koniunkturalnego Kaldora-Kaleckiego (Krawiec i Szydłowski, 1998, 1999). Pokazałem, że w modelu występują cykliczne rozwiązania (cykle wzrostu) powstałe w wyniku bifurkacji Hopfa.

Następnie zbadłem trzy wersje modelu Solowa z opóźnieniem. W modelach tych wielkość opóźnienia ma wpływ na wartości zmiennych modelu w stanie stacjonarnym. Pokazałem też, że wystąpienie cyklicznych rozwiązań w modelu Solowa z opóźnieniem inwestycyjnym

jest zależne od tego, czy deprecjacja kapitału rzeczowego ma miejsce w chwili rozpoczęcia inwestycji czy w chwili zakończenia inwestycji. Rozważyłem też modele, w których wiedza ma charakter endogeniczny (model AK i model Mankiwa-Romera-Weila), oraz model Ramseya-Cassa-Koopmansa z optymalną konsumpcją.

Model Ramseya-Cassa-Koopmansa z opóźnieniem inwestycyjnym różni się od pozostałych modeli przedstawionych w pracy, ponieważ jest opisany przez układ równań różniczkowych z opóźnionym i wyprzedzonym argumentem. Rozwiązanie problemu optymalnej konsumpcji w tym modelu prowadzi do pojawienia się równania różniczkowego z wyprzedzonym argumentem. Przyrost konsumpcji na jednostkę pracy efektywnej reprezentatywnego gospodarstwa domowego zależy od jego przyszłej konsumpcji na jednostkę pracy efektywnej. Istotną kwestią jest interpretacja ekonomiczna wyprzedzenia w równaniach różniczkowych z wyprzedzonym argumentem. W przypadku modelu Ramseya-Cassa-Koopmansa z opóźnieniem inwestycyjnym możemy mówić o oczekiwanej konsumpcji. Analiza układów równań z opóźnionym i wyprzedzonym argumentem jest bardzo trudna, ponieważ brakuje odpowiednich narzędzi matematycznych. Niemniej jednak wydaje się, że równania z opóźnionym i wyprzedzonym argumentem mogą być interesującym narzędziem do modelowania układów ekonomicznych, jednakże w obecnej chwili jest to słabo poznany obszar metod matematycznych ekonomii.

Ostatnia część pracy poświęcona jest modelom, w których obok kapitału rzeczowego prywatnego w produkcji wykorzystywany jest kapitał rzeczowy publiczny. Wprowadzenie publicznego kapitału rzeczowego jako dodatkowego czynnika wytwórczego pozwoliło na prostą analizę polityki gospodarczej (dochody z podatku były w całości przeznaczone na inwestycje). Rozważone zostały dwa modele: ze stałą stopą wzrostu publicznego kapitału rzeczowego i ze stałą stopą podatkową (Krawiec, 2005, 2006). Kapitał rzeczowy publiczny charakteryzuje się tym, że w wyniku efektu przepełnienia (*congestion*) użyteczność publicznego kapitału rzeczowego maleje wraz ze względnym wzrostem prywatnego kapitału rzeczowego. W prostszym modelu ze stałą stopą wzrostu publicznego kapitału rzeczowego występują cykliczne rozwiązania, z kolei model ze stałą stopą podatkową nie posiada takich rozwiązań. Z drugiej strony dynamika modelu ze stałą stopą podatko-

wą jest bardzo podobna do dynamiki modelu Mankiwa-Romera-Weila z kapitałem ludzkim.

Opóźnienie inwestycyjne jest ważnym czynnikiem mającym wpływ na procesy gospodarcze i w pracy pokazałem, że należy brać je pod uwagę w analizie wzrostu gospodarczego. Chociaż zaniedbanie opóźnienia w niektórych przypadkach prowadzi do uproszczenia analizy, w innych ze względu na odmienne zachowanie dynamiczne modelu (np. występowanie cyklicznych rozwiązań) pojawiające się w modelu po uwzględnieniu opóźnienia wskazuje, że modele z opóźnieniem powinny stać się ważną częścią teorii ekonomii. W pracy skoncentrowałem się na uwzględnieniu opóźnienia w modelach ekonomicznych cyklu koniunkturalnego i wzrostu gospodarczego i pokazałem skuteczność teorii równań różniczkowych z opóźnionym argumentem w modelowaniu zjawisk ekonomicznych, w których występują opóźnienia.

Używając modeli z opóźnionym argumentem, napotykamy wiele problemów, najczęściej o charakterze matematycznym. Teoria równań różniczkowych z opóźnionym argumentem nie posiada jeszcze takich narzędzi, jakimi dysponuje teoria równań różniczkowych zwyczajnych. Rozwój metod matematycznych, a także numerycznych z pewnością pozwoli w przyszłości na badanie coraz bardziej złożonych modeli procesów ekonomicznych. Dostępne dziś narzędzia analityczne i numeryczne pozwalają na analizę prostych modeli. Niemniej jednak możliwość uzyskania złożonej dynamiki w tak prostych modelach wskazuje, że należy wykorzystywać tego typu modele w teorii ekonomii. Tym bardziej, że niektóre zjawiska (jak rozpatrywane w pracy opóźnienie inwestycyjne) w sposób naturalny mogą być modelowane przez równania różniczkowe z odchylnym argumentem. Dzisiaj znamy własności jedynie niektórych typów równań z odchylnym argumentem. W związku tym niewiele wiemy o rozwiązaniach, zachowaniu bardziej skomplikowanych równań z odchylnym argumentem. Jednakże nie jest to kwestia przekreślająca tego typu badania, należy się bowiem spodziewać, że rozwój metod matematycznych pozwoli w przyszłości na pełną analizę bardziej złożonych modeli procesów ekonomicznych z opóźnieniem.

Istnieje wiele problemów ekonomicznych, w których opóźnienia odgrywają istotną rolę, a które ze względu na swoją złożoność nie zostały jeszcze zbadane. Ciekawym tematem przyszłych badań może być problem dwóch lub więcej opóźnień występujących w modelu eko-

nomicznym. Należy oczekiwać, że może wystąpić złożone zachowanie cykliczne quasi-periodyczne lub nawet chaotyczne. Sądzę, że rozwój metod matematycznych równań różniczkowych z odchylonym argumentem pozwoli w przyszłości na stworzenie nowych ekonomicznych modeli, w których opóźnienia będą odgrywać istotną rolę. Analiza takich modeli sprawi, że lepiej będziemy rozumieli naturę zjawisk ekonomicznych.

Dodatek A

Równania różniczkowe

A.1. Równania różniczkowe zwyczajne

Układ dynamiczny jest matematyczną reprezentacją (modelem) dynamiki zjawiska w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{dx^i}{dt} \equiv \dot{x}^i = F^i(x^i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{A.1})$$

gdzie $F^i(x^i)$ są oznaczeniami funkcji posiadających ciągle wszystkie pochodne swojego argumentu (o takich funkcjach mówimy, że są gładkie), indeks i numeruje liczbę równań układu. Jeżeli funkcje $F^i(x^i)$ nie zależą w sposób jawny od czasu t , to taki układ nazywamy autonomicznym układem dynamicznym. W ekonomicznych zastosowaniach zmienne x^i mogą oznaczać dowolne wielkości zmieniające się w czasie, np. dochód narodowy. Wtedy dx^i/dt reprezentują chwilowe szybkości zmian tych wielkości w chwili t .

Rozwiązaniem układu (A.1) jest n funkcji $x^i(x_0, t)$, opisujących ewolucję w czasie pewnego punktu początkowego, $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$, zwanego warunkiem początkowym. Graficznym sposobem prezentacji rozwiązań układu (A.1) jest przestrzeń fazowa układu. Jest to n -wymiarowa przestrzeń, której każdy z punktów reprezentuje stan układu w ustalonej chwili czasu. Rozwiązania układu (A.1) tworzą w przestrzeni fazowej pewne krzywe, które nazywamy krzywymi fazowymi układu albo trajektoriami fazowymi układu. Na rozwiązania $x^i(x_0, t)$ możemy patrzeć również jak na odwzorowanie $t \rightarrow x^i(x_0, t)$, przyporządkowujące w dowolnej chwili czasu t pozycję punktu początkowego x_0 po upływie czasu t na krzywej fazowej. Ten ruch nazywa się potokiem fazowym. Z fundamentalnego twierdzenia o istnieniu i jed-

noznaczności rozwiązań układu (A.1) wynika, że trajektorie układu dynamicznego nie mogą się przecinać.

Naszym celem jest wyznaczenie wszystkich trajektorii tego układu dla wszystkich dopuszczalnych warunków początkowych. W ten sposób obrazem dynamiki układu jest zbiór krzywych fazowych tworzących tzw. portret fazowy układu.

Rozwiązania układu (A.1) są zdeterminowane wyborem warunków początkowych x_0 . W rzeczywistości warunki te są nam znane ze skończoną dokładnością (ponieważ każdy pomiar jest obarczony błędem), dlatego korzystamy z analizy jakościowej, gdzie pożądana jest jedynie znajomość rodziny rozwiązań dla różnych warunków początkowych. Innymi słowy, chcemy wiedzieć, jaki typ długookresowego zachowania reprezentują trajektorie przechodzące przez dane punkty przestrzeni fazowej. Informacja ta wydaje się mieć szczególne znaczenie w ekonomii, gdzie czasami nie tyle chodzi nam o wyznaczenie dokładnych wartości z modelu, ile o znalezienie pewnych zależności, tendencji, kierunków ewolucji.

Wśród rozwiązań układu istnieją tzw. rozwiązania osobliwe, odpowiadające zerowaniu się prawych stron układu (A.1)

$$F^i(x^i) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.2})$$

W przestrzeni fazowej rozwiązania te są reprezentowane przez punkty krytyczne albo punkty osobliwe. W rzeczywistości punkty te odpowiadają położeniom równowagi układu. Widzimy więc, że jeśli układ znajdzie się w punkcie krytycznym, wówczas nie zmieniają się wartości zmiennych x^i , czyli układ osiągnął stan równowagi. Krzywe fazowe w otoczeniu punktu krytycznego mogą się zachowywać w różny sposób i to będzie określać charakter tego punktu. Dla układów dynamicznych na płaszczyźnie możliwa jest pełna klasyfikacja zachowań układu w otoczeniu jego punktów krytycznych. Dzięki temu znamy wszystkie możliwe typy zachowań w dwuwymiarowej przestrzeni fazowej.

W dalszej części skoncentrujemy szczególną uwagę właśnie na układach dwuwymiarowych o postaci

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = P(x, y), \quad (\text{A.3a})$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = Q(x, y). \quad (\text{A.3b})$$

Izokliną stycznych pionowych nazywamy zbiór punktów na płaszczyźnie fazowej, dla których $\frac{dx}{dt} = P(x, y) = 0$. Podobnie definiujemy izoklinę stycznych poziomych jako krzywą, wzdłuż której nie zmienia się wartość zmiennej y , tzn. $\frac{dy}{dt} = Q(x, y) = 0$. Punkty krytyczne układu równań (A.3) leżą na przecięciach izokliny stycznych pionowych z izokliną stycznych poziomych.

W analizie modeli ekonomicznych istotne jest zbadanie stabilności rozwiązań, czyli określenie co dzieje się w otoczeniu punktów krytycznych. Z upływem czasu wartości zmiennych (x, y) mogą się oddalać od punktu krytycznego bądź do niego zbliżać. Najogólniej ujmując, punkt krytyczny będzie stabilny, jeśli zmienne układu (x, y) początkowo znajdujące się w jego otoczeniu z upływem czasu nie będą się od niego oddalać. Istnieją różne definicje stabilności. W praktyce jednak, z tego powodu, że istnieje odpowiedni aparat matematyczny, najczęściej używana jest koncepcja asymptotycznej stabilności. O stabilności asymptotycznej w sensie Lapunowa mówimy wtedy, gdy z upływem czasu wartości zmiennych coraz bardziej zbliżają się do punktu krytycznego i osiągają go po nieskończonym czasie. Punkty krytyczne układu równań różniczkowych reprezentują jego stany asymptotyczne.

W dowolnie małym otoczeniu niezdegenerowanego punktu krytycznego (x_0, y_0) (punkt krytyczny jest zdegenerowany, jeśli przynajmniej jedna z wartości własnych jest równa zero) zachowanie nieliniowego układu równań różniczkowych (A.3) jest jakościowo równoważne z zachowaniem jego głównej części liniowej. Oznacza to, że układ równań różniczkowych (A.3) może być aproksymowany w otoczeniu punktu krytycznego (x_0, y_0) przez następujący układ liniowy

$$\dot{x} = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (\text{A.4a})$$

$$\dot{y} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (\text{A.4b})$$

Typ i stabilność punktu krytycznego (x_0, y_0) są określone przez wartości własne macierzy linearyzacji układu (A.3), która ma postać

$$M = \begin{bmatrix} \frac{dP}{dx}(x_0, y_0) & \frac{dP}{dy}(x_0, y_0) \\ \frac{dQ}{dx}(x_0, y_0) & \frac{dQ}{dy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Tabela A.1. Klasyfikacja punktów krytycznych dwuwymiarowych układów dynamicznych (A.3).

punkt krytyczny	$\Delta = p^2 - 4q$	$q = \det M$	$p = -\operatorname{tr} M$
węzeł stabilny	$\Delta > 0$	$q > 0$	$p > 0$
węzeł niestabilny	$\Delta > 0$	$q > 0$	$p < 0$
siodło	$\Delta > 0$	$q < 0$	dowolne
ognisko stabilne	$\Delta < 0$	$q > 0$	$p > 0$
ognisko niestabilne	$\Delta < 0$	$q > 0$	$p < 0$
centrum	$\Delta < 0$	$q > 0$	$p = 0$

Wartości własne macierzy M znajdujemy, rozwiązując równanie charakterystyczne

$$\det[M - \lambda \mathbb{1}] = 0 \iff \lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (\text{A.6})$$

gdzie p jest ujemnym śladem, a q wyznacznikiem macierzy M .

Dla układów dynamicznych na płaszczyźnie możemy przedstawić klasyfikację punktów krytycznych w zależności od zachowania trajektorii w otoczeniu punktu krytycznego. Określony typ zachowania zależy od śladu i wyznacznika macierzy linearyzacji oraz tego, czy wartości własne tej macierzy są rzeczywiste, czy zespolone. W tabeli A.1 wymienione zostały warunki istnienia i stabilności wszystkich typów punktów krytycznych oraz na rysunku A.1 zostały przedstawione: stabilny węzeł, stabilne ognisko, siodło i centrum.

Liniovyy układ równań różniczkowych (A.4) łatwo możemy rozwiązać i wtedy otrzymamy

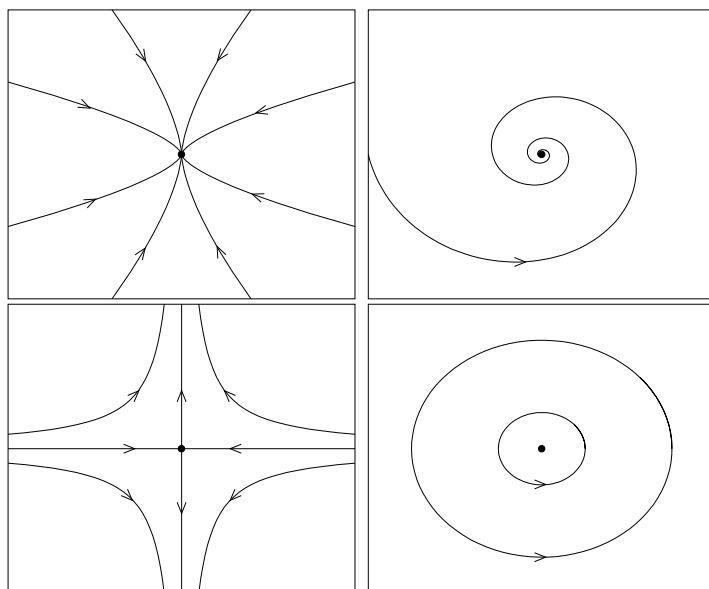
$$x - x_0 = \operatorname{Re}(C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}), \quad (\text{A.7})$$

$$y - y_0 = \operatorname{Re}(C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_2 t}), \quad (\text{A.8})$$

gdzie

$$k_1 = \frac{\lambda_1 - \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)}, \quad k_2 = \frac{\lambda_2 - \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

są współczynnikami kierunkowymi wyznaczonymi przez wektory własne macierzy linearyzacji M . Współczynniki kierunkowe określają nam kierunki trajektorii wchodzących ($t \rightarrow \infty$) i wychodzących ($t \rightarrow -\infty$) z punktów krytycznych.

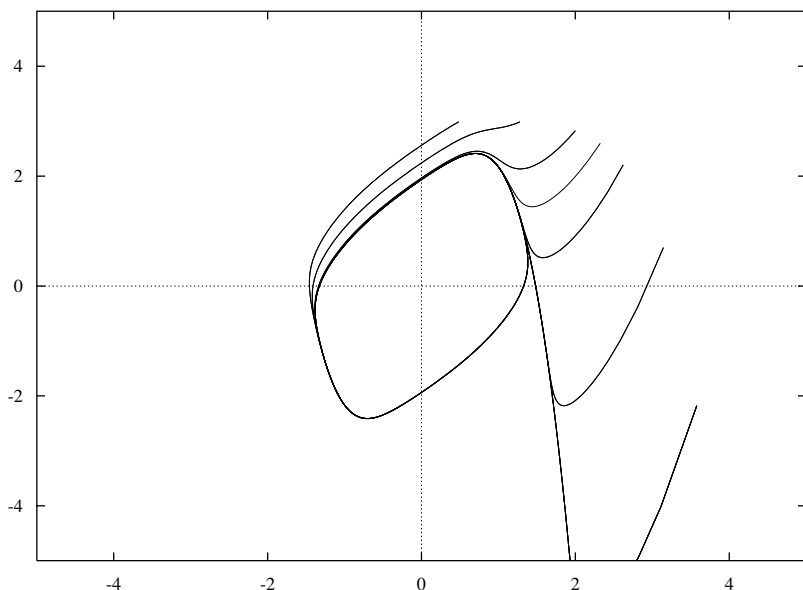


Rysunek A.1. Portrety fazowe punktów krytycznych układu dynamicznego na płaszczyźnie: stabilny węzeł, stabilne ognisko, siodło i centrum.

Stabilność punktu krytycznego jest związana ze znakiem wartości własnych macierzy linearyzacji. Niezależnie od tego, czy wartości własne są rzeczywiste (węzeł), czy zespolone (ognisko), wystarczy, że wszystkie części rzeczywiste wartości własnych są ujemne, by układ był stabilny. Jeśli części rzeczywiste wartości własnych są dodatnie, układ jest niestabilny. Szczególnym przypadkiem jest siodło, które ma dodatnią i ujemną wartość własną. Jest więc ono niestabilne, chociaż ze względu na ujemną wartość własną istnieją dwie trajektorie (tzw. separatory), które zmierzają do punktu krytycznego.

Wszystkie wyróżnione typy zachowań trajektorii w otoczeniu punktów krytycznych były uzyskane przy założeniu, że aproksymowaliśmy nieliniowy układ dynamiczny jego częścią liniową. Rozważaliśmy jedynie trajektorie z bliskiego otoczenia punktu krytycznego, które zbliżają się do niego. W takim przypadku mówimy o lokalnej stabilności. Gdy do punktu krytycznego zbliżają się trajektorie z dowolnego punktu przestrzeni fazowej, wtedy punkt krytyczny jest globalnie stabilny.

Gdy układ dynamiczny ma więcej niż dwa wymiary, jego dynamika staje się bardziej złożona. Może pojawić się chaos deterministyczny



Rysunek A.2. Portret fazowy cyklu granicznego.

(Lorenz, 1993; Medio, 1991). Ogólna zasada stabilności punktu krytycznego pozostaje ta sama, wszystkie wartości własne muszą mieć ujemne części rzeczywiste. Nawet gdy układ jest nieskończenie wymiarowy, gdy nie istnieje wartość własna o niedodatniej części rzeczywistej, rozwiązanie jest stabilne.

W układach dynamicznych na płaszczyźnie oprócz wymienionych czterech typów punktów krytycznych istnieje jeszcze jeden rodzaj rozwiązania, rozwiązanie okresowe nazywane cyklem granicznym. Nie jest to punkt, ale krzywa zamknięta. Z twierdzenia Poincarégo-Bendixsona wynika, że jeśli trajektorie leżą w skończonym obszarze płaszczyzny i nie zbliżają się do żadnych punktowych atraktorów, to są orbitą zamkniętą zwaną cyklem granicznym, albo taką orbitą osiągną. Trajektorie w sąsiedztwie cyklu granicznego będą go obiegać i zbliżać się do niego, jeśli jest on stabilny, lub oddalać, jeśli jest niestabilny. Na rysunku A.2 przedstawiony został cykl graniczny.

Rozwiązanie typu cyklu granicznego jest funkcją okresową o określonej amplitudzie. Obecność stabilnego cyklu granicznego na płaszczyźnie fazowej oznacza, że każda trajektoria znajdująca się w otoczeniu tego cyklu po dostatecznie długim czasie zbliży się do niego i będzie

go obiegać. Jest to stabilność w sensie Laplace'a. Jednak w odróżnieniu od sytuacji, z którą mamy do czynienia w przypadku punktu krytycznego typu centrum, zmiana warunków początkowych nie prowadzi do zmiany amplitudy oscylacji.

A.2. Równania różniczkowe z opóźnionym argumentem

Równania różniczkowe z opóźnionym argumentem są, obok neutralnych równań różniczkowych z odchylnym argumentem i równań różniczkowych z wyprzedzonym argumentem, jednym z trzech typów równań różniczkowych z odchylnym argumentem (Elsogolc, 1966).

Równanie różniczkowe z odchylnym argumentem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x[t - \vartheta(t)]) \quad (\text{A.9})$$

jest równaniem różniczkowym z opóźnionym argumentem, jeśli $\vartheta(t) > 0$, lub jest równaniem różniczkowym z wyprzedzonym argumentem, jeżeli $\vartheta(t) < 0$.

Przykładem neutralnego równania różniczkowego z odchylnym argumentem jest równanie

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x[t - \vartheta(t)], \dot{x}[t - \vartheta(t)]). \quad (\text{A.10})$$

W równaniach różniczkowych z opóźnionym argumentem stan układu w chwili t zależy od jego przeszłych stanów. Najprostsze równanie różniczkowe z opóźnionym argumentem ma postać

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t - \vartheta)], \quad (\text{A.11})$$

gdzie $x(t)$ jest zmienną stanu układu, $t \in \mathbb{R}$, a opóźnienie $\vartheta > 0$ jest stałą.

Rozwiązanie równania różniczkowego wymaga określenia warunku początkowego. Dla równań różniczkowych zwyczajnych ma on postać wartości początkowej. W przypadku równań różniczkowych z opóźnionym argumentem konieczna jest znajomość całej historii układu od chwili $t_0 - \vartheta$ do chwili początkowej t_0 . Warunek początkowy ma postać ciągłej funkcji określonej na przedziale $[t_0 - \vartheta, t_0]$.

Rozwiązanie równania (A.11) z warunkiem

$$x_{t_0} = x(t_0 + \vartheta) = \varphi(\vartheta), \quad (\text{A.12})$$

gdzie t_0 jest dowolną chwilą czasu, a $\varphi(\vartheta)$ jest zadaną funkcją. W określeniu problemu Cauchy'ego dla równania (A.11) definiujemy funkcję $x(t)$ spełniającą równanie $\dot{x}(t) = f(t, x(t - \vartheta))$ dla $t \geq t_0$ (równanie (A.11)); dla $t < t_0$ funkcja spełnia dane początkowe (A.12) (Kolmanovskii i Nosov, 1986).

Równanie (A.11) jest szczególnym przypadkiem równań funkcyjnych często używanych do modelowania procesów i zjawisk. Takie układy są równoważne z nieskończone wymiarowymi układami dynamicznymi.

Do analizy tych równań, które najczęściej są nieliniowe i trudne do rozwiązania, wykorzystujemy jakościowe metody analityczne lub metody numeryczne.

Metoda kroków

Rozwiązanie równania (A.11) może być otrzymane metodą kroków (Elszolg, 1966, s. 12–19). W tej metodzie definiujemy ciągłą funkcję spełniającą (A.11) i (A.12) przez kolejne całkowania równania różniczkowego bez opóźnienia. Zastępując $x(t - \vartheta)$ dla $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$ w (A.11) przez $\varphi(t - \vartheta)$, otrzymujemy zwyczajne równanie różniczkowe

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), \varphi(t - \vartheta)] \quad \text{dla} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \vartheta, \quad x(t_0) = \varphi_0(t_0). \quad (\text{A.13})$$

Mając zdefiniowane rozwiązanie $x(t)$ w przedziale $[t_0, t_0 + \vartheta]$, możemy w podobny sposób otrzymać $x(t)$ w przedziale $[t_0 + \vartheta, t_0 + 2\vartheta]$ i następnie w przedziałach $[t_0 + 2\vartheta, t_0 + 3\vartheta]$, $[t_0 + 3\vartheta, t_0 + 4\vartheta]$...

Przykładowo, dla równania

$$\dot{x} = \alpha x(t - \vartheta), \quad (\text{A.14})$$

dla którego funkcja początkowa $\varphi(t) = C$, $t_0 - t \leq t \leq t_0$, α , C i ϑ są stałymi, metodą kroków otrzymamy następujące rozwiązanie

$$x(t) = C \sum_{n=0}^{[(t-t_0)/\vartheta]+1} \alpha^n \frac{[t - t_0 - (n-1)\vartheta]^n}{n!}, \quad (\text{A.15})$$

gdzie $[t]$ oznacza część całkowitą t .

Metoda kroków nie jest uniwersalna. Przykładowo, nie może być zastosowana bezpośrednio dla układów ze zmiennym w czasie opóźnieniem, które zeruje się w pewnych punktach

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \vartheta(t))), \quad \vartheta(t) \geq 0,$$

$$h(t_i) = 0, \quad t_i = t_0.$$

Metoda kroków ma zastosowanie do układów, gdzie $f(t, x(t - \vartheta))$ zależy tylko od $x(t)$ i $x(t - \vartheta)$. W pewnych przypadkach metoda kroków pozwala nam na otrzymanie różnych twierdzeń o istnieniu i gładkości rozwiązań i innych charakterystyk jakościowych.

Metoda D-podziału

W przypadku liniowego równania różniczkowego o postaci

$$\dot{x} = bx(t - \vartheta) - ax(t) \tag{A.16}$$

jednym z narzędzi zbadania stabilności jego rozwiązań jest metoda D-podziału (El'sgol'ts i Norkin, 1973). Polega ona na określeniu dla każdej pary wartości parametrów a i b , ile z nieskończonej liczby rozwiązań równania charakterystycznego posiada dodatnie części rzeczywiste. Liczba pierwiastków równania charakterystycznego jest nieskończona, ponieważ ze względu na opóźnienie w argumencie zmiennej x jest ono transcendentalne. Jeśli wszystkie pierwiastki, wartości własne, równania charakterystycznego mają ujemne części rzeczywiste (lub nie istnieją pierwiastki o dodatniej i zerowej części rzeczywistej), to rozwiązanie równania (A.16) jest stabilne. Płaszczyzna wyznaczona przez parametry (a, b) jest podzielona na obszary, rozgraniczone liniami. Punkty każdego obszaru mają taką samą ilość pierwiastków z dodatnią częścią rzeczywistą. Linie rozgraniczające są wyznaczone dla takich wartości (a, b) , dla których równanie charakterystyczne ma jeden lub więcej pierwiastków z rzeczywistą częścią równą zeru. Dany obszar ma zawsze o jeden więcej lub mniej pierwiastek o dodatniej części rzeczywistej niż obszar przylegający do niego. Obszar, w którym nie ma pierwiastków z dodatnią częścią rzeczywistą, określa nam zbiór wartości parametrów a i b , dla których rozwiązanie równania (A.16) jest stabilne.

Konstrukcję wykresu D-podziału zaczynamy od wypisania równania charakterystycznego

$$h(\lambda) = \lambda - be^{-\lambda\vartheta} + a = 0. \tag{A.17}$$

Pierwszą linię rozgraniczającą znajdujemy, przyjmując $\lambda = 0$, i jest ona dana równaniem

$$a = b. \quad (\text{A.18})$$

Pozostałe krzywe rozdzielające obszary otrzymujemy, przyjmując, że wartości własne są czysto urojone $\lambda = i\omega$, wtedy

$$i\omega - be^{-i\omega\vartheta} + a = 0. \quad (\text{A.19})$$

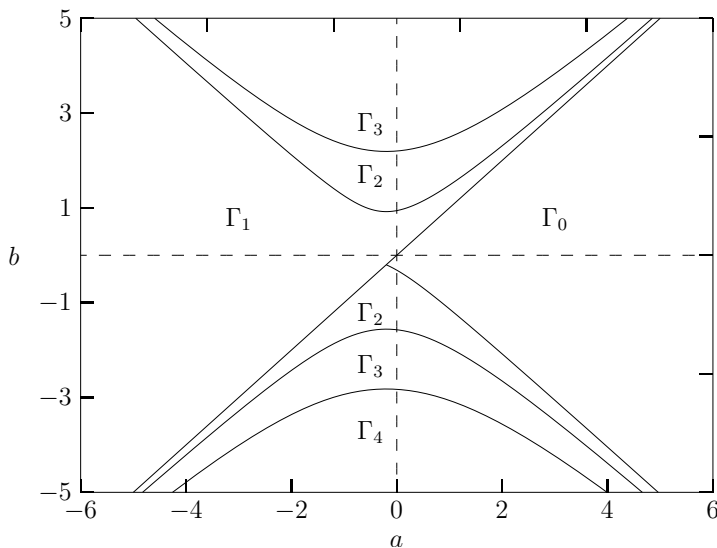
Biorąc część rzeczywistą i urojoną, dostajemy układ równań, którego rozwiązanie ma parametryczną formę nieskończonego zbioru krzywych

$$a\vartheta = -\frac{\omega\vartheta}{\sin(\omega\vartheta)} \cos(\omega\vartheta) \quad (\text{A.20a})$$

$$b\vartheta = -\frac{\omega\vartheta}{\sin(\omega\vartheta)}. \quad (\text{A.20b})$$

Krzywe te tworzą pozostałe krzywe rozgraniczające obszary o różnej liczbie wartości własnych z dodatnimi częściami rzeczywistymi. Jeżeli jedna z wartości własnych zmienia znak części rzeczywistej z ujemnego na dodatni w wyniku zmiany wartości parametrów a i b , następuje przejście z jednego obszaru do drugiego przez krzywą rozgraniczającą, na której część rzeczywista wartości własnej się zeruje. Linie rozgraniczające wyznaczone przez (A.17) i (A.20) zostały przedstawione na rysunku A.3. Obszar Γ_0 odpowiada stabilnemu rozwiązaniu równania. Następne obszary są oznaczone przez Γ_i , gdzie i jest równe liczbie pierwiastków z dodatnimi częściami rzeczywistymi. Punkt na zbiegu obszarów Γ_0 , Γ_1 i Γ_2 ma współrzędne $a = -1/\vartheta$, $b = -1/\vartheta$.

Na rysunku A.3 jest przedstawiony wykres obszarów o różnej liczbie pierwiastków z dodatnią częścią rzeczywistą, otrzymany metodą D-podziału dla równania (A.16) z ustaloną wartością parametru opóźnienia $\vartheta = 5$. Następnie określamy liczbę pierwiastków o dodatniej części rzeczywistej w poszczególnych obszarach. W obszarze Γ_0 wybieramy punkt (równanie różniczkowe) z $b = 0$ i $a > 0$. Wtedy równanie (A.16) sprowadza się do liniowego jednorodnego równania różniczkowego zwyczajnego, którego rozwiązanie jest stabilne. Stąd w każdym punkcie obszaru Γ_0 płaszczyzny (a, b) rozwiązania są stabilne (pierwiastki równania charakterystycznego nie mają dodatnich części rzeczywistych).



Rysunek A.3. Wykres D-podziału dla liniowego równania różniczkowego z opóźnionym argumentem (A.16) na płaszczyźnie parametrów (a, b) . Przyjęto wartość parametru opóźnienia $\vartheta = 5$.

Z kolei w obszarze Γ_1 rozwiązanie jest niestabilne. Można to stwierdzić, przyjmując $b = 0$ i $a > 0$; wtedy z równania (A.17) otrzymujemy

$$\lambda = -a \quad (\text{A.21})$$

i jedyny pierwiastek λ jest ujemny. Dlatego w każdym punkcie w obszarze Γ_1 wszystkie pierwiastki mają jeden pierwiastek z dodatnią częścią rzeczywistą.

Aby stwierdzić, co dzieje się z liczbą pierwiastków o dodatniej części rzeczywistej w pozostałych obszarach, przykładowo rozważmy przejście z obszaru Γ_1 do obszaru Γ_2 . W tym celu weźmy równanie charakterystyczne

$$h(\lambda, a, b) = 0, \quad (\text{A.22})$$

które zależy od trzech parametrów i jego różniczka zupełna ma postać

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial h}{\partial a} da + \frac{\partial h}{\partial b} db = 0. \quad (\text{A.23})$$

Część rzeczywista różniczki pierwiastka $d\lambda$ jest dana przez

$$\operatorname{Re}(d\lambda) = \operatorname{Re} \left(\frac{-\frac{\partial h}{\partial a} da - \frac{\partial h}{\partial b} db}{\frac{\partial h}{\partial \lambda}} \right). \quad (\text{A.24})$$

Przechodzimy z obszaru Γ_1 do obszaru Γ_2 przez linię $a = b$ (w części rozgraniczającej te dwa obszary mamy $b < -1/\vartheta$) w taki sposób, że przesuwamy się wzdłuż rosnącego a ($da > 0$, $db = 0$). Wtedy dostajemy

$$\operatorname{Re}(d\lambda) = -\frac{da}{1+b\vartheta} > 0. \quad (\text{A.25})$$

Oznacza to, że w obszarze Γ_2 mamy co najmniej jeden pierwiastek z dodatnią częścią rzeczywistą więcej niż w obszarze Γ_1 . Podobnie postępujemy, przechodząc do następnych obszarów wzdłuż linii $a = 0$ (Illing i inni, 2006).

A.3. Bifurkacja Hopfa

Twierdzenie A.1. *Założmy, że układ dynamiczny*

$$\dot{x} = f(x, \vartheta), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \vartheta \in \mathbb{R} \quad (\text{A.26})$$

ma punkt równowagi (x^, ϑ_0) , w którym spełnione są następujące własności:*

a) jacobian układu równań (A.26) ma parę czysto urojonych wartości własnych i żadnych innych wartości własnych z zerową częścią rzeczywistą. To implikuje, że istnieje gładka krzywa punktów równowagi $(x^(\vartheta), \vartheta)$ z $x^*(\vartheta_0) = x^*$. Zespolone sprzężone wartości własne $\lambda(\vartheta)$, $\bar{\lambda}(\vartheta)$ jacobianu, które są czysto urojone w $\vartheta = \vartheta_0$, są gładką funkcją parametru ϑ ;*

b) dla parametru bifurkacyjnego ϑ_0 spełniony jest warunek transwersalności

$$\frac{d}{d\vartheta} \operatorname{Re} \lambda(\vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_0} > 0,$$

wtedy istnieje okresowe rozwiązanie dla $x^(\vartheta_0)$ w $\vartheta = \vartheta_0$ i okres tego rozwiązania jest bliski $2\pi/\operatorname{Im}\lambda(\vartheta_0)$.*

Podczas gdy istnienie zamkniętych orbit powstałych w wyniku bifurkacji Hopfa można w większości przypadków łatwo ustalić, rozróżnienie między subkrytyczną i superkrytyczną bifurkacją Hopfa jest o wiele trudniejsze. Techniczne trudności pojawiają się podczas koniecznej transformacji układu do postaci normalnej

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + g(x, y).$$

Algorytm tego przekształcenia istnieje tylko dla dwuwymiarowych układów dynamicznych. Gdy ϑ rośnie od $\vartheta < \vartheta_0$ do $\vartheta > \vartheta_0$, pojedynczy punkt stały zmienia stabilność, ponieważ rzeczywiste części wartości własnych stają się dodatnie. Aby wykazać istnienie bifurkacji Hopfa w danym układzie dynamicznym, wystarczy pokazać, że

- 1) istnieją lub pojawiają się zespolone wartości własne;
- 2) rzeczywiste części pary zespolonych sprzężonych pierwiastków są równe zero dla wartości parametru bifurkacyjnego $\vartheta = \vartheta_0$, tzn. że takie ϑ_0 istnieje;
- 3) wszystkie pozostałe rzeczywiste pierwiastki różnią się od zera dla $\vartheta = \vartheta_0$;
- 4) części rzeczywiste różnią się od zera dla $\vartheta > \vartheta_0$ lub $\dim W_{\text{inv}}^u \geq 1$.

Dodatek B

Programy komputerowe

Istnieje wiele programów komputerowych, w których można całkować równania różniczkowe i następnie przedstawiać graficznie ich rozwiązania. Mogą to być programy, gdzie tego typu procedury są jednymi z wielu wbudowanych procedur matematycznych lub są dołączane w postaci specjalnie napisanych modułów. Należy wymienić w tym miejscu następujące programy: Matlab, Maple lub Mathematica. W programach tych przede wszystkim dostępne są procedury i funkcje do całkowania równań różniczkowych zwyczajnych. Dostępne są również funkcje pozwalające numerycznie badać równania różniczkowe z opóźnionym argumentem, np. `dde23` w Matlabie umożliwia numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych z opóźnionym argumentem o stałych współczynnikach.

Odrębną grupą są programy, które zostały napisane wyłącznie w celu numerycznej analizy równań różniczkowych. Wymieńmy najpierw programy, w których można całkować tylko równania różniczkowe zwyczajne. Program Dynamics2 stworzony na Uniwersytecie Maryland pod kierunkiem Jamesa A. Yorke'a jest rozbudowanym programem pozwalającym na analizę chaotycznego zachowania układów dynamicznych (Nusse i Yorke, 1998). Jednym z najlepszych programów do analizy bifurkacji jest program AUTO autorstwa E.J. Doedela (<http://cmvl.cs.concordia.ca/auto/>). Innym programem, który udostępnia wiele metod analizy równań różniczkowych zwyczajnych i bifurkacji, jest CONTENT (<ftp://ftp.cwi.nl/CONTENT>).

Wśród programów, które oprócz standardowych metod posiadają możliwość całkowania równań różniczkowych z odchylnym argumentem, należy wymienić XPPAut. Autorem programu jest Bard Ermentrout (2002). Program oprócz szerokiej gamy procedur całkowania różnego typu równań różniczkowych zawiera również niewielką część kodu programu AUTO do analizy bifurkacji. Jest on dostępny na stronie

<http://www.math.pitt.edu/bard/xpp/xpp.html>. W niniejszej pracy program ten był wykorzystany do analizy numerycznej modeli wzrostu gospodarczego.

Wymienione programy stanowią jedynie niewielką część dostępnych programów, procedur i bibliotek, które służą do numerycznej analizy równań różniczkowych. Więcej informacji o programach można znaleźć na portalu DSWeb (<http://www.dynamicalsystems.org/>) w sekcji „software”.

Bibliografia

- Acemoglu D. (2009): *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton: Princeton University Press.
- Aftalion A. (1927): *The theory of economic cycles based on the capitalistic technique of production*, „Review of Economic Statistics” 9, s. 165–170.
- Agell J., Lindh T., Ohlsson H. (1997): *Growth and the public sector: a critical review essay*, „European Journal of Political Economy” 13, s. 33–52.
- Aghion P., Howitt P. (1998): *Endogenous Growth Theory*, Cambridge: MIT Press.
- Aghion P., Howitt P. (2009): *The Economics of Growth*, Cambridge: MIT Press.
- Asea P.K., Zak P.J. (1999): *Time-to-build and cycles*, „Journal of Economic Dynamics and Control” 23, s. 1155–1175.
- Bajo-Rubio O. (2000): *A further generalization of the Solow model: the role of the public sector*, „Economics Letters” 68, s. 79–84.
- Bambi M. (2008): *Endogenous growth and time-to-build: The AK case*, „Journal of Economic Dynamics & Control” 32, s. 1015–1040.
- Bambi M., Licandro O. (2004): *(In)determinacy and time-to-build*, Economics Working Papers ECO2004/17, European University Institute, revised May 2005.
- Barro R. (1990): *Government spending in a simple model of endogenous growth*, „Journal of Political Economy” 98, s. S103–S125.
- Barro R., Sala-i-Martin X. (1992): *Public finance in models of economic growth*, „Review of Economic Studies” 59, s. 645–661.
- Barro R., Sala-i-Martin X. (2004): *Economic Growth*, Cambridge: MIT Press, second edition.

- Bélair J., Mackey M. (1989): *Consumer memory and price fluctuations in commodity markets: An integro-differential model*, „Journal of Dynamics and Differential Equations” 1, s. 299–325.
- Bellman R., Cooke K.L. (1963): *Differential-Difference Equations*, New York: Academic Press.
- Benhabib J., Nishimura K. (1979): *The Hopf bifurcation and the existence and stability of closed orbits in multisectorial models of optimal economic growth*, „Journal of Economic Theory” 21, s. 421–444.
- Blaug M. (1994): *Teoria ekonomii. Ujęcie retrospektywne*, Warszawa: PWN.
- Cass D. (1965): *Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation*, „Review of Economic Studies” 32, s. 233–240.
- Chang W.W., Smyth D.J. (1971): *The existence and persistence of cycles in a nonlinear model: Kaldor’s 1940 model re-examined*, „Review of Economic Studies” 38, s. 37–44.
- Cichy K., Malaga K. (2007): *Kapitał ludzki w modelach i teorii wzrostu gospodarczego*, w: *Kapitał ludzki i kapitał społeczny a rozwój regionalny*, pod red. M. Herbst, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Scholar, s. 18–53.
- Collard F., Licandro O., Puch L.A. (2004): *The short-run dynamics of optimal growth models with delays*, Economics Working Papers ECO2004/4, European University Institute.
- Czerwiński Z. (1973): *Podstawy matematycznych modeli wzrostu gospodarczego*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne.
- Dana R.A., Malgrange P. (1984): *The dynamics of a discrete version of a growth cycle model*, w: *Analysing the Structure of Econometric Models*, ed. by J.P. Ancot, The Hague: Martinus Nijhoff, s. 115–142.
- De Cesare L., Sportelli M. (2005): *A dynamic IS-LM model with delayed taxation revenues*, „Chaos, Solitons and Fractals” 25, s. 233–244.
- Del Boca A., Galeotti M., Himmelberg C.P., Rota P. (2008): *Investment and time to plan and build: A comparison of structures vs. equipment in a panel of Italian firms*, „Journal of the European Economic Association” 6, s. 864–889.
- Dixit A.K. (1990): *Optimization in Economic Theory*, Oxford: Oxford University Press.
- Domar E.D. (1946): *Capital expansion, rate of growth, and employment*, „Econometrica” 14, s. 137–147.

- Domański S.R. (1993): *Kapitał ludzki i wzrost gospodarczy*, Warszawa: PWN.
- El-Hodiri M.A., Loehman E., Whinston A. (1972): *An optimal growth model with time lags*, „Econometrica” 40, s. 1137–1146.
- Elszgolc Ł.E. (1966): *Równania różniczkowe z odchylnym argumentem*, Warszawa: PWN.
- El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. (1971): *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument*, Moscow: Nauka.
- El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. (1973): *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument*, revised edition, New York: Academic Press.
- Ermentrout B. (2002): *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems: A Guide to XPPAUT for Researchers and Students*, Philadelphia: SIAM.
- Fanti L., Manfredi P. (2003): *The Solow's model with endogenous population: A neoclassical growth cycle model*, „Journal of Economic Development” 28, s. 103–115.
- Fölster S., Henrekson M. (1999): *Growth and the public sector: a critique of the critics*, „European Journal of Political Economy” 15, s. 337–358.
- Frisch R. (1933): *Propagation problems and impulse problems in dynamic economics*, w: *Economic Essays in Honor of Gustav Cassel*, London: George Allen & Unwin, s. 171–205.
- Frisch R., Holme H. (1935): *The characteristic solutions of a mixed difference and differential equation occurring in economic dynamics*, „Econometrica” 3, s. 225–239.
- Gandolfo G. (1980): *Economic Dynamics: Methods and Models*, Amsterdam: North-Holland, second edition.
- Goodwin R.M. (1967): *A growth cycle*, w: *Socialism, Capitalism, and Economic Growth*, ed. by C.H. Feinstein, Cambridge: Cambridge University Press, s. 54–58.
- Greiner A. (1996): *Fiscal Policy and Economic Growth*, Aldershot: Avebury.
- Guckenheimer J., Holmes P. (1983): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, New York: Springer-Verlag.
- Halanay A. (1966): *Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags*, New York: Academic Press.

- Hale J.K., Verduyn Lunel S.M. (1993): *Introduction to Functional Differential Equations*, New York: Springer-Verlag.
- Harrod R.F. (1939): *An essay in dynamic theory*, „Economic Journal” 49, s. 14–33.
- Howroyd T.D., Russell A.M. (1984): *Cournot oligopoly models with time lags*, „Journal of Mathematical Economics” 13, s. 97–103.
- Illing L., Gauthier D.J., Roy J.N. (2006): *Controlling optical chaos, spatio-temporal dynamics, and patterns*, w: *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 54, ed. by P.R. Berman, E. Arimondo, C. Lin, New York: Academic Press.
- Inada K. (1964): *Some structural characteristics of turnpike theorems*, „Review of Economic Studies” 31, s. 43–58.
- Kaddar A., Alaoui K.T. (2008): *Hopf bifurcation analysis in a delayed Kaldor-Kalecki model of business cycle*, „Nonlinear Analysis: Modelling and Control” 13, s. 439–449.
- Kaldor N. (1940): *A model of the trade cycle*, „Economic Journal” 50, s. 78–92; polski przekład: *Model cyklu koniunkturalnego*, w: *Eseje z teorii stabilizacji i wzrostu gospodarczego*, Warszawa: PWN, 1971, s. 1–8,
- Kaldor N. (1963): *Capital accumulation and economic growth*, w: *Proceedings of a Conference Held by the International Economic Association*, ed. by F.A. Lutz, D.C. Hague, London: Macmillan.
- Kaldor N. (1971): *A comment*, „Review of Economic Studies” 38, s. 45–46.
- Kalecki M. (1933): *Próba teorii koniunktury*, Warszawa: Instytut Badań Koniunktur Gospodarczych i Cen.
- Kalecki M. (1935a): *Essai d’une théorie du mouvement cyclique des affaires*, „Revue d’Economie Politique” XLIX, s. 285–305.
- Kalecki M. (1935b): *A macrodynamic theory of business cycles*, „Econometrica” 3, s. 327–344.
- Kalecki M. (1979): *Kapitalizm. Koniunktura i zatrudnienie*, *Dzieła*, t. 1, Warszawa: PWE.
- Kalecki M. (1979–1985): *Dzieła*, t. 1–5, pod red. J. Osiatyńskiego, Warszawa: PWE.
- Keynes J.M. (1985): *Ogólna teoria zatrudnienia, procentu i pieniądza*, Warszawa: PWN.
- Kind C. (1999): *Remarks on the economic interpretation of Hopf bifurcations*, „Economics Letters” 62, s. 147–154.

- Kobrinskii N.E., Kusmint V.I. (ed.) (1981): *Accuracy of Economic-mathematical Models*, Moscow: Finansy and Statistika.
- Kolmanovskii V., Myshkis A. (1999): *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Dordrecht: Kluwer.
- Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. (1986): *Stability of Functional Differential Equations*, London: Academic Press.
- Koopmans T.C. (1965): *On the concept of optimal economic growth*, w: *The Economic Approach to Development Planning*, Amsterdam: North-Holland.
- Krawiec A. (2003): *Dynamika modeli cyklu koniunkturalnego Kaldora i Kaldora-Kaleckiego*, w: *Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych VI*, pod red. A. Orłowskiego, Warszawa: Wydawnictwo SGGW, s. 182–197.
- Krawiec A. (2005): *A note on optimized growth model with public capital*, *Acta Universitatis Lodziensis Folia Oeconomica* 190, s. 31–36.
- Krawiec A. (2006): *On an optimal tax rate in the growth model with public capital*, w: *Modelling Economies in Transition 2005*, ed. by W. Welfe, P. Wdowiński, Łódź: AMFET, s. 31–38.
- Krawiec A., Szydłowski M. (1998): *Czas budowy dóbr inwestycyjnych i cykl koniunkturalny*, „Roczniki Kolegium Analiz Ekonomicznych SGH” 6, s. 13–26.
- Krawiec A., Szydłowski M. (1999): *The Kaldor-Kalecki business cycle model*, „Annals of Operations Research” 89, s. 89–100.
- Krawiec A., Szydłowski M. (2001): *On nonlinear mechanics of business cycle model*, „Regular and Chaotic Dynamics” 6, s. 101–118.
- Krawiec A., Szydłowski M. (2003): *Investment delay in a growth cycle model*, w: *Macromodels 2002*, ed. by W. Welfe, A. Welfe, Łódź: Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, s. 81–98.
- Krawiec A., Szydłowski M. (2004): *Endogenous technological progress and economic growth*, w: *Modelling Economies in Transition 2003*, ed. by W. Welfe, P. Wdowiński, Łódź: AMFET, s. 49–58.
- Landreth H., Colander D.C. (1998): *Historia myśli ekonomicznej*, Warszawa: PWN.
- Larson A.B. (1964): *The hog cycle as harmonic motion*, „Journal of Farm Economics” 46, s. 375–386.

- Liu W., Levin S., Yoh I. (1986): *Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of sirs epidemiological models*, „Journal of Mathematical Biology” 23, s. 187–204.
- Lorenz H.W. (1993): *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Berlin: Springer-Verlag, second edition.
- Mackey M.C. (1989): *Commodity price fluctuations: Price dependent delays and nonlinearities as explanatory factors*, „Journal of Economic Theory” 48, s. 497–509.
- Malawski M., Wieczorek A., Sosnowska H. (2006): *Konkurencja i kooperacja. Teoria gier w ekonomii i naukach społecznych*, Warszawa: PWN.
- Mankiw N.G., Romer D., Weil D.N. (1992): *A contribution to the empirics of economic growth*, „Quarterly Journal of Economics” 107, s. 407–437.
- Mayer T. (1960): *Plant and equipment lead times*, „Journal of Business” 33, s. 127–132.
- Medio A. (1991): *Continuous-time models of chaos in economics*, „Journal of Economic Behavior and Organization” 16, s. 115–151.
- Mishkis A.D. (1972): *Linear Differential Equations with Retarded Argument*, Moscow: Nauka.
- Montgomery M.R. (1995): *‘Time-to-build’ completion patterns for nonresidential structures, 1961–1991*, „Economics Letters” 48, s. 155–163.
- Neamtu M., Opris D., Chilărescu C. (2007): *Hopf bifurcation in a dynamic IS-LM model with time delay*, „Chaos, Solitons & Fractals” 34, s. 519–530.
- Nusse H.E., Yorke J.A. (1998): *Dynamika: badania numeryczne*, Warszawa: PWN.
- Panek E. (2003): *Ekonomia matematyczna*, Poznań: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.
- Ramsey F.P. (1928): *A mathematical theory of saving*, „Economic Journal” 38, s. 543–559.
- Rustichini A. (1989): *Hopf bifurcation for functional differential equations of mixed type*, „Journal of Dynamics and Differential Equations” 1, s. 145–177.
- Smith A. (1954): *Badania nad naturą i przyczynami bogactwa narodów*, Warszawa: PWN.

- Solow R.M. (1956): *A contribution to the theory of economic growth*, „Quarterly Journal of Economics” 70, s. 65–94.
- Swan T.W. (1956): *Economic growth and capital accumulation*, „Economic Record” 32, s. 334–361.
- Szydłowski M., Krawiec A. (2000): *The Hopf bifurcation in the Kaldor-Kalecki model*, w: *Computation in Economics, Finance and Engineering: Economic Systems*, ed. by S. Holly, S. Greenblatt, New York: Elsevier, s. 391–396.
- Szydłowski M., Krawiec A. (2001): *The Kaldor-Kalecki model of business cycle as a two-dimensional dynamical system*, „Journal of Nonlinear Mathematical Physics” 8, s. 266–271, Suppl.
- Szydłowski M., Krawiec A. (2004): *A note on Kaleckian lags in the Solow model*, „Review of Political Economy” 16, s. 501–506.
- Szydłowski M., Krawiec A. (2005): *The stability problem in the Kaldor-Kalecki business cycle model*, „Chaos, Solitons & Fractals” 25, s. 299–305.
- Szydłowski M., Krawiec A., Toboła J. (2001): *Nonlinear oscillations in business cycle model with time lags*, „Chaos, Solitons & Fractals” 12, s. 505–517.
- Tinbergen J. (1931): *Ein Schiffbauzyklus?* „Weltwirtschaftliches Archiv” 34, s. 152–164; przekład angielski: tenże, *A shipbuilding cycle?* w: *Selected Papers*, ed. by L.H. Klaassen, L.M. Koyck, H.J. Witteveen, Amsterdam: North-Holland, 1959, s. 1–14.
- Tokarski T. (2005): *Wybrane modele podażowych czynników wzrostu gospodarczego*, Kraków: Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego.
- Welfe W. (red.) (2007): *Gospodarka oparta na wiedzy*, Warszawa: PWE.
- Zak P.J. (1999): *Kaleckian lags in general equilibrium*, „Review of Political Economy” 11, s. 321–330.
- Zhang C., Wei J. (2004): *Stability and bifurcation analysis in a kind of business cycle model with delay*, „Chaos, Solitons & Fractals” 22, s. 883–896.
- Zhou L., Li Y. (2008): *A generalized dynamic IS-LM model with delayed time in investment processes*, „Applied Mathematics and Computation” 196, s. 774–781.

REDAKTOR

Mirosław Ruszkiewicz

KOREKTOR

Jerzy Hrycyk

SKŁAD I ŁAMANIE

Adam Krawiec

Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego

Redakcja: ul. Michałowskiego 9/2, 31-126 Kraków

tel. 12-631-18-80, tel./fax 12-631-18-83